MASTER 2
ANALYSE MATHÉMATIQUE

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE CONVEXITÉ ET OPTIMISATION

RESPONSABLE DU MODULE : Arezki KHELOUFI.

Exercice n° 1 :

1. Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ qui contient l'origine. Montrons que $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 C \supset \lambda_2 C.$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\lambda_1 > \lambda_2$.

1,5

Montrons que $\lambda_1 C \supset \lambda_2 C$.

Soit $x \in \lambda_2 C$. Alors $x = \lambda_2 x_0$ avec $x_0 \in C$. Puisque $0 \in C$ et $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in]0, 1[$,

$$x = \lambda_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_0 = \lambda_1 \left(\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) 0 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_0 \right) \in \lambda_1 C.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall t > 0, \ f(tx) = t f(x).$$

Montrons que

$$f \text{ est convexe} \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

$\Rightarrow$) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$f(x+y) = f\left(2 \frac{x+y}{2}\right) = 2 f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\leq 2 \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{y}{2}\right) \right)$$
$$= 2 f\left(\frac{x}{2}\right) + 2 f\left(\frac{y}{2}\right)$$
$$= f(x) + f(y).$$

1

$\Leftarrow$) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in]0,1[$. On a

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant f(\lambda x) + f((1-\lambda) y)$$
$$= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

0,5

Les cas $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ sont faciles à vérifier.

3. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Pour $a \geqslant 0$, soit

$$S_a := \{x \in \mathbb{R}^n : B(x,a) \subseteq S\}.$$

Montrons que S_a est convexe.

Supposons que S est convexe.

On sait que :

$$B(x,a) = x + B(0,a).$$

1,5

Soient $x_1, x_2 \in S_a$, donc

$x_1 + u \in S$ et $x_2 + u \in S$, $\forall u$ avec $\|u\| < a$

Soient $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et u tel que $\|u\| < a$

$$\theta x_1 + (1-\theta) x_2 + u = \theta (x_1 + u) + (1-\theta)(x_2 + u) \in S$$

car S est convexe

Donc $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S_a$,

c'est à dire S_a est convexe.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante et soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Montrons que $v \geqslant 0$ pour $v \in \partial f(\bar{x})$

Soit $v \in \partial f(\bar{x}) \Rightarrow v(x - \bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Prenons $x_1 < \bar{x}$, donc on aura

$$v(x_1 - \bar{x}) \leqslant f(x_1) - f(\bar{x}).$$

1

$\Rightarrow v(x_1 - \bar{x}) \leqslant 0$ car f est croissante

$\Rightarrow v \geqslant 0$ car $x_1 - \bar{x} < 0$.

Exercice n°II 2 :

1) Déterminons les fonctions conjuguées des fonctions suivantes

a) $f_1(x) = -\ln x, \quad x \in \mathbb{R}_+^*$

Soit $v \in \mathbb{R}$

$$f_1^*(v) = \sup \left\{ vx + \ln x, \; x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

On pose $\varphi(x) = vx + \ln x, \; x \in \mathbb{R}_+^*$

$\varphi'(x) = v + \frac{1}{x}$, $\varphi''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow \varphi$ est concave

Si $v < 0$

$\varphi'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{v}$

x	0		$-1/v$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$	$\varphi(-1/v)$	$\searrow$	

$$f_1^*(v) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} \varphi(x)$$

$$= \varphi\left(-\frac{1}{v}\right)$$

$$= v\left(-\frac{1}{v}\right) + \ln\left(\frac{1}{-v}\right)$$

$$= -1 - \ln(-v)$$

Si $v \geq 0$ $\quad \varphi'(x) = v + \frac{1}{x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

alors φ est croissante

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

2

finalement

$$f_1^*(v) = \begin{cases} -1 - \ln(-v) & \text{si } v < 0 \\ +\infty & \text{si } v \geq 0 \end{cases}$$

b) $f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $v \in \mathbb{R}$

$$f_2^*(v) = \sup \left\{ vx - \frac{1}{x}, \ x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

On pose

$$\varphi_2(x) = vx - \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\varphi_2'(x) = v + \frac{1}{x^2}$$

Si $v > 0$ $\quad \varphi_2'(x) > 0$ alors φ est strictement croissante

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} \varphi_2(x) = \lim_{x \to +\infty} \varphi_2(x) = +\infty \quad 0{,}5$$

Si $v = 0$

$$f_2^*(v) = 0 \quad 0{,}5$$

Si $v < 0$, φ_2 est concave car $\varphi_2''(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$

$$\varphi_2'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{-v}}$$

$$f_2^*(v) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{-v}}\right)$$

$$= v \frac{1}{\sqrt{-v}} - \sqrt{-v}$$

$$= \frac{v\sqrt{-v}}{-v} - \sqrt{-v}$$

$$= \frac{v\sqrt{-v} + v\sqrt{-v}}{-v} = -2\sqrt{-v}$$

1

finalement,

$$f_2^*(v) = \begin{cases} -2\sqrt{-v} & \text{si } v \leq 0 \\ +\infty & \text{si } v > 0. \end{cases}$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.
Considérons la fonction

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, t) \longmapsto h(x,t) = t f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Exprimons la fonction conjuguée de h en fonction de la fonction conjuguée de f.

$$h^*(y, s) = \sup_{\substack{\frac{x}{t} \in \operatorname{dom} f \\ t > 0}} \left\{ yx + st - t f\left(\frac{x}{t}\right) \right\}$$

$$= \sup_{t>0} \sup_{\frac{x}{t} \in \operatorname{dom} f} \left\{ t \left[y \frac{x}{t} + s - f\left(\frac{x}{t}\right) \right] \right\}$$

$$= \sup_{t>0} t \left\{ s + \sup_{\frac{x}{t} \in \operatorname{dom} f} \left(y \frac{x}{t} - f\left(\frac{x}{t}\right) \right) \right\}$$

1

$$= \sup_{t>0} t \left(s + f^*(y) \right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } s + f^*(y) \leqslant 0 \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

3) Soit $g(x,t) = t \ln t - t \ln x$, $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrons que g est convexe (en utilisant la définition)

0,5

On a $g(x,t) = t(\ln t - \ln x)$
$= -t(\ln x - \ln t) = -t \ln \frac{x}{t}$.

posons $k(y) = -\ln y$, $y \in \mathbb{R}_+^*$ qui est convexe

Donc $g(x,t) = t\, k\left(\frac{x}{t}\right)$.

Montrons que g est convexe (sachant que k est convexe)

Soient $(x_1, s_1), (x_2, s_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $0<\theta<1$

On a

$$g\left[\theta(x_1, s_1) + (1-\theta)(x_2, s_2)\right]$$

$$= g\left(\theta x_1 + (1-\theta)x_2,\ \theta s_1 + (1-\theta)s_2\right)$$

$$= (\theta s_1 + (1-\theta)s_2)\, k\left(\frac{\theta x_1 + (1-\theta)x_2}{\theta s_1 + (1-\theta)s_2}\right)$$

$$= (\theta s_1 + (1-\theta)s_2)\, k\left(\frac{\theta s_1 \frac{x_1}{s_1} + (1-\theta)s_2 \frac{x_2}{s_2}}{\theta s_1 + (1-\theta)s_2}\right)$$

$$= (\theta s_1 + (1-\theta)s_2)\, k\left(\frac{\theta s_1}{\theta s_1 + (1-\theta)s_2}\frac{x_1}{s_1} + \frac{(1-\theta)s_2}{\theta s_1 + (1-\theta)s_2}\frac{x_2}{s_2}\right)$$

$$\leqslant \theta s_1\, k\left(\frac{x_1}{s_1}\right) + (1-\theta)s_2\, k\left(\frac{x_2}{s_2}\right)$$

$$= \theta g(x_1, s_1) + (1-\theta) g(x_2, s_2)$$

1,5

3) Déterminons epi g

$$\text{epi}\, g = \{(x,t,\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} :\ g(x,t) \leqslant \lambda\}$$

$$= \{(x,t,\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} ;\ t\, k\left(\tfrac{x}{t}\right) \leqslant \lambda\}$$

$$= \{(x,t,\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} :\ k\left(\tfrac{x}{t}\right) \leqslant \tfrac{\lambda}{t}\}$$

$$= \{(x,t,\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} :$$

Donc

$$(x,t,\lambda) \in \text{epi}\, g \iff \left(\tfrac{x}{t}, \tfrac{\lambda}{t}\right) \in \text{epi}\, k$$

$$\iff (x,t,\lambda) \in P^{-1}(\text{epi}\, k)$$

1

Donc $\text{epi}\, g = P^{-1}(\text{epi}\, k)$

où $P : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, t) \longmapsto P(x,t) = \frac{x}{t}$

On a epi k est convexe car k est convexe

et par suite $P^{-1}(\text{epi}\, k)$ est convexe (comme image réciproque d'un convexe par P Voir exo de TD)

finalement $\text{epi}\, g = P^{-1}(\text{epi}\, k)$ est convexe

$\iff g$ est convexe

0,5

Exercice n° 3 :

Soit $B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application affine :

$$B(x) = Ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où A est une matrice $p \times n$ et $b \in \mathbb{R}^p$.

Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in gph(B)$ (où $gph(B)$ désigne le graphe de B).

1. Détermination de $N((\bar{x},\bar{y}); gph(B))$:

$N((\bar{x},\bar{y}); gph(B))$

$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : \langle (u,v), (x,y) - (\bar{x},\bar{y}) \rangle \leq 0 \quad \forall (x,y) \in gph(B)\}$

$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : \langle u, x - \bar{x} \rangle + \langle v, y - \bar{y} \rangle \leq 0 \quad \forall (x,y) \in gph(B)\}$

$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : \langle u, x - \bar{x} \rangle + \langle v, B(x) - B(\bar{x}) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : \langle u, x - \bar{x} \rangle + \langle v, A(x - \bar{x}) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : \langle u, x - \bar{x} \rangle + \langle A^T v, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : \langle u + A^T v, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : \langle u + A^T v, y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}$

$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : \langle u + A^T v, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}$ car c'est vrai aussi pour $-y$ dans l'inégalité précédente.

$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : u + A^T v = 0\}$

$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : u = -A^T v\}$.

3

2. Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe.

Fixons $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\bar{y} = B(\bar{x}) \in dom(f)$.

Montrons que

$$\partial(f \circ B)(\bar{x}) \supset A^T(\partial f(\bar{y})) = \{A^T v, \; v \in \partial f(\bar{y})\}.$$

Soit $u \in A^T(\partial f(\bar{y}))$. Alors

$$u = A^T v, \quad v \in \partial f(\bar{y})$$

3

On a $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \langle u, x - \bar{x} \rangle &= \langle A^T v, x - \bar{x} \rangle \\ &= \langle v, Ax - A\bar{x} \rangle \\ &= \langle v, B(x) - B(\bar{x}) \rangle \\ &\leq f(B(x)) - f(B(\bar{x})) \quad \text{car } v \in \partial f(\bar{y}) \\ &= (f \circ B)(x) - (f \circ B)(\bar{x}) \end{aligned}$$

Par suite $u \in \partial(f \circ B)(\bar{x})$.

Université A/ MIRA de Béjaia
Département de Mathématiques
Master 2

Février 2019

Examen : Convexité et optimisation. *Durée : 01H30*

Exercice n° 1. (05,5 pts)

1. Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ qui contient l'origine. Montrer que $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$
$$\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 C \supset \lambda_2 C.$$
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \ f(tx) = tf(x).$$
Montrer que :
f est convexe $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.
3. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Pour $a \geq 0$, soit
$$S_a := \{x \in \mathbb{R}^n : B(x,a) \subseteq S\}.$$
Montrer que si S est convexe, alors S_a est convexe.
4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante et soit $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Montrer que $v \geq 0$ pour $v \in \partial f(\overline{x})$.

Exercice n° 2. (08,5 pts)

1. Déterminer les fonctions conjuguées des fonctions suivantes :
$$f_1(x) = -\ln x, \ x \in \mathbb{R}_+^*; \ f_2(x) = \frac{1}{x}, \ x \in \mathbb{R}_+^*.$$
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Considérons la fonction
$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & h(x,t) = tf(\frac{x}{t}). \end{array}$$
Exprimer la fonction conjuguée de h en fonction de la fonction conjuguée de f.
3. Soit $g(x,t) = t\ln t - t\ln x, \ (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que g est convexe (en utilisant la définition).
   (b) Déterminer epi g et en déduire que g est convexe.

Exercice n° 3. (06 pts)

Soit $B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application affine :
$$B(x) = Ax + b, \ x \in \mathbb{R}^n,$$
où A est une matrice $p \times n$ et $b \in \mathbb{R}^p$. Soit $(\overline{x}, \overline{y}) \in \text{gph}(B)$ (où $\text{gph}(B)$ désigne le graphe de B).

1. Déterminer $N((\overline{x}, \overline{y}); gph(B))$
2. Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe. Fixons $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overline{y} = B(\overline{x}) \in$ dom(f). Montrer que
$$\partial(foB)(\overline{x}) \supset A^T(\partial f(\overline{y})) = \{A^T v, \ v \in \partial f(\overline{y})\}.$$

Bon courage