جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

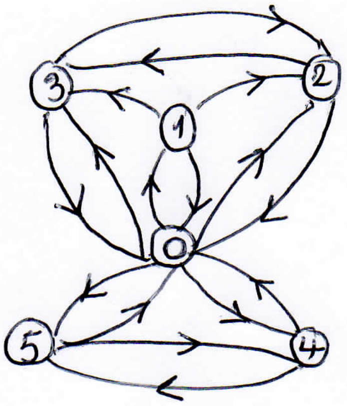
Université A. Mira – Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I
Master 1 (PSA)

Corrigé de l'Examen de Processus Stochastiques

Exercice 1. (06 points)

(X_n) une C.M sur $\mathbb{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$



1. Le graphe de transition (voir la figure ci-dessus). **0.5 pt**

2.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1,\ X_2 = 2 | X_0 = 0) &= \frac{\mathbb{P}(X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 0)}{\mathbb{P}(X_0 = 0)} \\ &= \mathbb{P}(X_2 = 2 | X_1 = 1,\ X_0 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = 2 | X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 0) \\ &= P_{12} \times P_{01} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$ **1 pt**

$\mathbb{P}(X_2 = 0 | X_0 = 0) = P_{00}^{(2)} = (1/6)^2 + 5(1/6.1/2) = \frac{1}{36} + \frac{5}{12} = \frac{4}{9}$. **1 pt**

3. On a $\forall i, j \in \mathbb{E},\quad i \longleftrightarrow j$. Donc (X_n) est irréductible. **0.5 pt**

Le graphe possède une seule classe finale apériodique $\mathbb{E}$. Donc (X_n) est régulière. **0.5 pt**

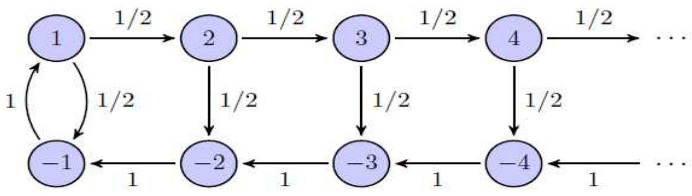
L'état 0 est un site intermédiaire pour passer d'une page web à une autre. **0.5 pt**

4. (X_n) est une C.M finie, irréductible, apériodique donc ergodique. Elle possède donc une unique distribution stationnaire $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ telle que $\pi = \pi P$ et $\sum_{i=0}^{5} \pi_i = 1$.

Après résolution du système linéaire, on trouve $\pi = (\frac{3}{8}, \frac{1}{16}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ **2 pt**

Exercice 2. (08 points)

(X_n)une chaîne de Markov sur $\mathbb{E} = \mathbb{Z}^*$.



1. $\forall i, j \in \mathbb{E}, \quad i \longleftrightarrow j$. Donc (X_n) est irréductible. **1 pt**

2. Soit $f_{11}^{(n)}$ la probabilité du premier retour en 1 en n étapes. L'état 1 est récurrent si $\sum_{n\geq 1} f_{11}^{(n)} = 1$

On a $f_{11}^{(1)} = 0, \; f_{11}^{(2)} = 1/2, \; f_{11}^{(3)} = 0, \; f_{11}^{(4)} = (\frac{1}{2})^2$

On en déduit que $f_{11}^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k+1; \\ (\frac{1}{2})^k, & \text{si } n = 2k. \end{cases}$

Par la suite, $\sum_{n\geq 1} f_{11}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = 1$. D'où l'état 1 est récurrent. **2 pt**

3. L'état 1 est récurrent positif car le temps moyen de retour est
$\mu_1 = \sum_{n\geq 1} f_{11}^{(n)} = \sum_{k\geq 1} 2k(\frac{1}{2})^k = 4 < \infty$. Donc l'état 1 est récurrent positif. **1 pt**

4. On a $PGCD\{n \geq A : P_{11}^{(n)} > 0\} = 2$. Donc l'état 1 est périodique de période 2. **1 pt**

5. Soit π la distribution stationnaire de la chaîne. 0n $\pi = \pi P$

On trouve $\pi_1 = \pi_{-1}$ et $\pi_i = \pi_{-i} = (\frac{1}{2})^{i-1}\pi_1$ et comme $\sum_{i\in\mathbb{Z}^*} \pi_i = 1$, on trouve $\pi_1 = 1/4$ **2 pts**

6. $\pi_i = (\frac{1}{2})^{i-1}\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^{|i|+1}$ pour tout $i \in \mathbb{E}$. **1 pt**

Exercice 3. (06 points)

Soit $N_1(t)$:" nombre de voitures arrivant à la station sur $[0, t]$".

$(N_1(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson da paramètre $\lambda_1 = 10v/h$

1. Soit T temps entre le passage de deux voitures consécutives: On sait que $T \rightsquigarrow \exp(\lambda_1)$.

D'où $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{10}h = 6mn$ **1 pt**

2. Sachant que 10 voitures sont passées entre 12h et 13h, la probabilité que 5 voitures soient passées entre 12h et 12h30 est donnée par:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1(\frac{1}{2}) = 5 | N_1(1) = 10) &= \frac{\mathbb{P}(N_1(\frac{1}{2}) = 5, N_1(1) = 10)}{\mathbb{P}(N_1(1) = 10)} \quad \text{(d'après } C_1) \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_1(\frac{1}{2}) = 5, N_1(\frac{1}{2}) = 5)}{\mathbb{P}(N_1(1) = 10)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_1(\frac{1}{2}) = 5)\mathbb{P}(N_1(\frac{1}{2}) = 5)}{\mathbb{P}(N_1(1) = 10)} \quad \text{(d'après } C_2) \\
&= \frac{e^{-5} \times \frac{5^5}{5!}}{e^{-10}\frac{10^{10}}{10!}} = \frac{63}{256} \simeq 0.25 \qquad \textbf{2 pts}
\end{aligned}$$

3. Soit $N_2(t)$:"Le nombre de camions arrivant à la station service sur $[0,t]$."

$(N_2(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson da paramètre $\lambda_2 = 5c/h$.

$(N_1(t))$ et $(N_2(t))$ sont indépendants.

Soit $N(t)$:"Le nombre de véhicules arrivant sur l'intervalle $[0,t]$." $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.

$(N(t))$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 15v/h$ (supperposition de deux processus de Poisson indépendants.) Donc $N(t) \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda t)$. **1 pt**

La probabilité que k véhicules (voitures ou camions) passent entre les instants 0 et t est donnée par

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = e^{-15t}\frac{(15t)^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$ **1 pt**

4. Soit S: "le temps séparant le passage de deux véhicules consécutifs."

$S \rightsquigarrow \exp(\lambda) \Longrightarrow \mathbb{E}(S) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{15}h = 4mn.$ **1 pt**

Fin