

---

—TD MATHS "FONCTIONS À UNE VARIABLE COMPLEXE"—

---

—"1ÈRE SÉANCE"—

---

**Exercice 1.** Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme exponentielle  
 $7 + 7\sqrt{3}i$ ;  $-3 + 3i$ ;  $-5i$ .

**Exercice 2.** Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe  $(1 + i)^{2k+1}$ .

**Exercice 3.** Représenter graphiquement chacun des nombres complexes suivants  $2e^{3\pi i/5}$ ;  $3e^{-\pi i/4}$ .

**Exercice 4.** Représenter les ensembles des points suivants dans le plan complexe.  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} / |z + i| < 2\}$ ,  $D_2 = \{z \in \mathbb{C} / |z + 1 - i| \geq 2\}$ ,  $D_3 = \{z \in \mathbb{C} / 1 < |z + 1 - i| < 2\}$ ,  $D_4 = \{z \in \mathbb{C} / |z + 1 - i| \geq 2\}$ ,  $D_4 = \{z \in \mathbb{C} / \Re(z) > \Im(z)\}$ .

**Exercice 5.** Résoudre les équations suivantes et préciser leur répartition dans le plan complexe  
 $z^2 = -3 + 3i$ ;  $z^4 = 5$ ;  $z^5 = 32i$ .

---

—"2ÈME SÉANCE"—

---

**Exercice 6.** 1. Démontrer,  $|e^{iz}| = |e^{-y}|$  et  $\sin 2z = 2 \cos z \sin z$

2. Démontrer que la fonction  $z \mapsto \cos z$  n'est pas bornée dans  $\mathbb{C}$ .

3. Si  $\cos z = 2$ , calculer  $\cos 2z$

4. Calculer  $i^i$ ,  $(2 + i)^{2+i}$ ,  $\log(-2)$ ,  $\log(5i)$  et  $\log(\sqrt{3} - i)$ .

**Exercice 7.** Calculer,  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3}{x^2 + y^2}$ ;  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3}{x^3 + y^3}$ ;  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{xy}{z}$ ;  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ .

**Exercice 8.** En quels domaines de  $\mathbb{C}$  les fonctions suivantes sont-elles holomorphes?  
 $z \mapsto \Re(z)$ ;  $z \mapsto \Im(z)$ ;  $z \mapsto |z|^2$ ;  $z \mapsto x^2 + iy^2$

---

—"3ÈME SÉANCE"—

---

**Exercice 9.** En quels domaines de  $\mathbb{C}$  les fonctions suivantes sont-elles holomorphes?  
 $z \mapsto \Re(z)$ ;  $z \mapsto \Im(z)$ ;  $z \mapsto |z|^2$ ;  $z \mapsto x^2 + iy^2$

---

—"4ÈME SÉANCE"—

---

**Exercice 10.** Soit  $P$  une fonction de deux variables définie par  $(x, y) \mapsto P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .  
Déterminer les fonctions réelles  $(x, y) \mapsto Q(x, y)$  telles que  $z = x + iy \mapsto f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$  soit holomorphe dans  $\mathbb{C} - \{0\}$ .

**Exercice 11.** Soit  $P$  une fonction de deux variables définie par  $(x, y) \mapsto P(x, y) = \sin x \sinh y$ . Déterminer les fonctions réelles  $(x, y) \mapsto Q(x, y)$  telles que  $z = x + iy \mapsto f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$  soit holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 12.** Soit  $P(x, y) = x^3 - \lambda xy^2 - xy + 2x + 3$ . Donnez une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda$  pour que  $P$  soit la partie réelle d'une fonction  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Ecrire  $f$  en fonction de  $z$ .

**Exercice 13.** Soit  $f(z) = f(x + iy) = P(y) + iQ(x)$  définie sur  $\mathbb{C}$ . Déterminer l'expression des fonctions  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

— "5ÈME SÉANCE" —

**Exercice 14.** Calculer  $\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$

1. le long de la parabole  $y = x^2$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ;
2. le long du segment de droite  $(1 + i)$ ,  $(2 + 4i)$  ;
3. le long des segments  $(1 + i)$ ,  $(2 + i)$  et  $(2 + i)$ ,  $(2 + 4i)$ .

**Exercice 15.** Démontrer que  $\int_{(\gamma)} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2i\pi, & n+1=0; \\ 0, & n+1 \neq 0. \end{cases}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), où  $(\gamma)$  étant un chemin fermé ayant  $a$  dans son intérieur et orienté positivement.

— "6ÈME SÉANCE" —

**Exercice 16.** Calculer

$$\int_{(\gamma)} \frac{\cos z}{z - \pi} dz \quad \text{et} \quad \int_{(\gamma)} \frac{e^z}{z(z+1)} dz,$$

où

1.  $(\gamma)$  est le cercle positif  $C^+(1, 3) = \{z; |z - 1| = 3\}$ ,
2.  $(\gamma)$  est le cercle positif  $C^+(1, 2.1) = \{z; |z - 1| = 2.1\}$ .

**Exercice 17.** Calculer

$$\int_{(\gamma)} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz \quad \text{et} \quad \int_{(\gamma)} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$$

, où  $(\gamma)$  est le cercle positif  $C^+(0, 3) = \{z; |z| = 3\}$ .

**Exercice 18.** Calculer

$$\int_{(\gamma^+)} \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz$$

où  $(\gamma^+)$  est un chemin fermé quelconque entourant  $z = 1$  et orienté positivement.

**Exercice 19.** Calculer

$$\int_{(\gamma)} \frac{\cosh z^2 + \sinh z^2}{(z - \pi)(z - 2)^2} dz$$

, où  $(\gamma)$  est le cercle positif  $C^+(0, 3) = \{z; |z| = 3\}$ .

---

— "7ÈME SÉANCE" —

---

**Exercice 20.** Donner le développement en série entière, au voisinage de  $z_0 = 0$ , de la fonction suivante

$$f(z) = \frac{z}{(z + 2)(z + 1)}.$$

**Exercice 21.** Donner le développement en série entière, au voisinage de  $z_0 = 1$ , de la fonction suivante

$$f(z) = \frac{z}{(z - 2)^2}.$$

**Exercice 22.** Déterminer le développement en série entière de  $z \mapsto \frac{1}{(z - 2)(z^2 + 1)}$  en 0.

---

— "8ÈME SÉANCE" —

---

**Exercice 23.** Trouver les singularités de chacune des fonctions suivantes et les caractériser.  $z \mapsto$

$$\frac{z^2}{(z + 1)^3}; z \mapsto \frac{2z^3 - z + 1}{(z - 4)^2(z - i)(z - 1 + 2i)}; z \mapsto \frac{\sin z}{z^2 + 2z + 2}; z \mapsto \frac{1 - \cos z}{z};$$

$$z \mapsto e^{-\frac{1}{(z - 1)^2}}.$$

**Exercice 24.** Déterminer les résidus de chacune des fonctions suivantes, au pôle indiqué.  $z \mapsto$

$$\frac{z^2}{(z - 2)(z^2 + 1)}, z_0 = 2, z_1 = i, z_2 = -i; z \mapsto \frac{1}{z(z + 2)^3}, z_0 = 0, z_1 = -2; z \mapsto \frac{ze^z}{(z - 3)^2}, z_0 = 3;$$

$$z \mapsto \cot z, z_0 = -5\pi;$$

**Exercice 25.** Trouver les séries de Laurent de  $z \mapsto \frac{z^2}{(z - 2)(z^2 + 1)}$  par rapport à ses pôles.

**Exercice 26.** Calculer

$$\int_{C^+(i, 1/2)} \frac{e^z}{(i - z)(3z + 1)^2} dz,$$

où  $C^+(i, 1/2)$  est le cercle de centre  $i$  est de rayon  $1/2$  orienté positivement.

---

— "9ÈME SÉANCE" —

---

**Exercice 27.** Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \sin t}.$$

**Exercice 28.** Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)}.$$

---