

—TD MATHS "FONCTIONS À UNE VARIABLE COMPLEXE"—

—"1ÈRE SÉANCE"—

**Exercice 1.** Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme exponentielle  
 $7 + 7\sqrt{3}i$ ;  $-3 + 3i$ ;  $-5i$ .

**Exercice 2.** Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe  $(1 + i)^{2k+1}$ .

**Exercice 3.** Représenter graphiquement chacun des nombres complexes suivants  $2e^{3\pi i/5}$ ;  $3e^{-\pi i/4}$ .

**Exercice 4.** Représenter les ensembles des points suivants dans le plan complexe.  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} / |z + i| < 2\}$ ,  $D_2 = \{z \in \mathbb{C} / |z + 1 - i| \geq 2\}$ ,  $D_3 = \{z \in \mathbb{C} / 1 < |z + 1 - i| < 2\}$ ,  $D_4 = \{z \in \mathbb{C} / |z + 1 - i| \geq 2\}$ ,  $D_5 = \{z \in \mathbb{C} / \Re(z) > \Im(z)\}$ .

**Exercice 5.** Résoudre les équations suivantes et préciser leur répartition dans le plan complexe  
 $z^2 = -3 + 3i$ ;  $z^4 = 5$ ;  $z^5 = 32i$ .

—"2ÈME SÉANCE"—

**Exercice 6.** 1. Démontrer,  $|e^{iz}| = |e^{-y}|$  et  $\sin 2z = 2 \cos z \sin z$

2. Démontrer que la fonction  $z \mapsto \cos z$  n'est pas bornée dans  $\mathbb{C}$ .

3. Si  $\cos z = 2$ , calculer  $\cos 2z$

4. Calculer  $i^i$ ,  $(2 + i)^{2+i}$ ,  $\log(-2)$ ,  $\log(5i)$  et  $\log(\sqrt{3} - i)$ .

**Corrigé:**

1. •  $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{ix}e^{-y}| = |e^{ix}||e^{-y}| = |e^{-y}|$

$$\bullet \sin 2z = \frac{1}{2i}(e^{2iz} - e^{-2iz}) = \frac{1}{2i}((e^{iz})^2 - (e^{-iz})^2) = \frac{1}{2i}(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iz} - e^{-iz}) = 2 \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \cos z \sin z$$

2. En effet, il suffit de démontrer que le module de  $|\cos z|$  n'est pas bornée dans  $\mathbb{C}$ .

$$|\cos z| = |\cos x + iy| = |\cos x \cos iy - \sin x \sin iy| = |\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y| = \sqrt{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y} \\ \sqrt{\cos^2 x (1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \sinh^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}, \text{ doù } |\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y} \\ \text{tend vers l'infini quand } y \text{ tend vers l'infini.}$$

3. On a  $\cos z = 2$ , alors  $\cos 2z = 2 \cos^2(z) - 1 = 7$ .

4. •  $\log(-2) = \ln(|-2|) + i \arg(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

•  $\log(5i) = \ln(|5i|) + i \arg(5i) = \ln 5 + i(\pi/2 + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

•  $\log(\sqrt{3} - i) = \ln(|\sqrt{3} - i|) + i \arg(\sqrt{3} - i) = \ln 2 + i(-\pi/6 + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 7.** Calculer,  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3}{x^2 + y^2}$ ;  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3}{x^3 + y^3}$ ;  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{xy}{z}$ ;  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ .

**Corrigé:** Soit  $z = x + iy = re^{i\theta}$  où  $r = |z|$  et  $\theta = \arg(z)$ .

On a ( $z$  tend vers 0)  $\Leftrightarrow$  ( $r$  tend vers 0) donc

1.  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 e^{3i\theta}}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r e^{3i\theta} = 0$  car  $e^{3i\theta}$  est une fonct bornée ( $|e^{3i\theta}| = 1$ ).
2.  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{xy}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r e^{i\theta}} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin \theta e^{-i\theta} = 0$  car  $\cos \theta \sin \theta e^{-i\theta}$  est bornée ( $|\cos \theta \sin \theta e^{-i\theta}| \leq 1$ ).

**Exercice 8.** En quels domaines de  $\mathbb{C}$  les fonctions suivantes sont-elles holomorphes?

$z \mapsto \Re(z)$ ;  $z \mapsto \Im(z)$ ;  $z \mapsto |z|^2$ ;  $z \mapsto x^2 + iy^2$

---

—"3ÈME SÉANCE"—

---

**Exercice 9.** En quels domaines de  $\mathbb{C}$  les fonctions suivantes sont-elles holomorphes?

$z \mapsto \Re(z)$ ;  $z \mapsto \Im(z)$ ;  $z \mapsto |z|^2$ ;  $z \mapsto x^2 + iy^2$

**Corrigé:**

1. **1<sup>re</sup> Méthode:** En utilisant la définition.

(a)  $f(z) = \Re(z) = x$ : Soit  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ .

On a la limite de  $l = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$  n'existe pas car:

si  $y = y_0$  alors  $l = 1$  tend vers 1 quand  $z$  tend vers  $z_0$  et si  $x = x_0$  alors  $l = 0$  tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $z_0$  (si la limite existe alors elle est unique). Alors  $f$  n'est dérivable en aucun point de  $\mathbb{C}$ , d'où  $f$  n'est holomorphe en aucun domaine de  $\mathbb{C}$ .

(b)  $z \mapsto \Im(z)$  même chose que (a).

(c)  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = r^2$ : Soit  $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}^*$  ( $z_0 \neq 0$ ).

On a la limite de  $l = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{r^2 - r_0^2}{r e^{i\theta} - r_0 e^{i\theta_0}} = \frac{(r - r_0)(r + r_0)}{r e^{i\theta} - r_0 e^{i\theta_0}}$  n'existe pas car:

si  $\theta = \theta_0$  alors  $l = (r + r_0)e^{-\theta_0 i}$  tend vers  $2r_0 e^{-\theta_0 i}$  quand  $r$  tend vers  $r_0$

et si  $\theta = \theta_0 + \pi$  alors  $l = -(r - r_0)e^{-\theta_0 i}$  tend vers 0 quand  $r$  tend vers  $r_0$ .

Alors  $f$  n'est dérivable en aucun point de  $\mathbb{C}^*$ , d'où  $f$  n'est holomorphe en aucun domaine de  $\mathbb{C}^*$ .

Maintenant si  $z_0 = 0$  alors  $l = r e^{-i\theta}$  tend vers 0 quand  $r$  tend vers  $r_0$ . Mais l'ensemble  $\{0\}$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{C}$  donc pas un domaine de  $\mathbb{C}$ , d'où  $f$  n'est holomorphe en aucun domaine de  $\mathbb{C}$ .

(d)  $f(z) = x^2 + iy^2$ : Soit  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $x_0 \neq y_0$ .

On a la limite de  $l = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x^2 - x_0^2) + i(y^2 - y_0^2)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$  n'existe pas car si  $y = y_0$

alors  $l = x + x_0$  tend vers  $2x_0$  quand  $z$  tend vers  $z_0$  et si  $x = x_0$  alors  $l = y + y_0$  tend vers  $2y_0$  quand  $z$  tend vers  $z_0$ . Alors  $f$  n'est dérivable en aucun point de  $\mathbb{C}/\{z = x + iy \in \mathbb{C}/x = y\}$ , et comme la droite  $\{z = x + iy \in \mathbb{C}/x = y\}$  n'est pas un ouvert donc pas un domaine alors la fonction  $f$  n'est holomorphe en aucun domaine de  $\mathbb{C}$ .

2. **2<sup>me</sup> Méthode:** En utilisant les conditions de Cauchy.

- (a)  $f(z) = \Re(z) = x = u(x, y) + iv(x, y) \Rightarrow u(x, y) = x$  et  $v(x, y) = 0$ . On a  $\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) = 1 \neq \frac{\partial}{\partial x}v(x, y) = 0$  donc la première condition de Cauchy n'est pas vérifiée en aucun point de  $\mathbb{C}$  alors  $f$  n'est dérivable en aucun points de  $\mathbb{C}$  d'où  $f$  n'est holomorphe en aucun domaine de  $\mathbb{C}$ .
- (b)  $z \mapsto \Im(z)$  même chose que (a).
- (c)  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow u(x, y) = x^2 + y^2$  et  $v(x, y) = 0$ . On a  $\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) = 2x \neq \frac{\partial}{\partial x}v(x, y) = 0 \forall, z \neq 0$  donc la première condition de Cauchy n'est pas vérifiée en aucun point de  $\mathbb{C}^*$  alors  $f$  n'est dérivable en aucun points de  $\mathbb{C}^*$  et comme  $\{0\}$  n'est pas un ouvert dans  $\mathbb{C}$  alors  $f$  n'est holomorphe en aucun domaine de  $\mathbb{C}$ .
- (d)  $f(z) = x^2 + iy^2 \Rightarrow u(x, y) = x^2$  et  $v(x, y) = y^2$ . Soit  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $x_0 \neq y_0$ . La première condition de Cauchy donne  $\frac{\partial}{\partial x}u(x_0, y_0) = 2x_0 \neq \frac{\partial}{\partial x}v(x, y) = 2y_0$  donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable en aucun point  $z_0$  tel que  $x_0 \neq y_0$ . Et comme l'ensemble  $\{z = x + iy \in \mathbb{C}/x = y\}$  n'est pas un ouvert donc la fonction  $f$  n'est holomorphe en aucun domaine de  $\mathbb{C}$ .

3. **3<sup>me</sup> Méthode:** En utilisant la dérivée par rapport à  $\bar{z}$ .

- (a)  $f(z) = \Re(z) = x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  on a  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(z) = \frac{1}{2} \neq 0$  donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable en aucun points de  $\mathbb{C}$  d'où  $f$  n'est holomorphe en aucun domaine de  $\mathbb{C}$ .
- (b)  $z \mapsto \Im(z)$  même chose que (a).
- (c)  $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$  on a  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(z) = z \neq 0$  quand  $z \neq 0$  donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable en aucun points de  $\mathbb{C}^*$  et comme l'ensemble  $\{0\}$  n'est pas un ouvert dans  $\mathbb{C}$  d'où  $f$  n'est pas holomorphe en aucun domaine de  $\mathbb{C}$ .
- (d)  $f(z) = x^2 + iy^2 = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + i\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2$  on a  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = x - y \neq 0$  quand  $x \neq y$  donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable en aucun points de  $\mathbb{C}/\{z = x + iy \in \mathbb{C}/x = y\}$  et comme l'ensemble  $\{z = x + iy \in \mathbb{C}/x = y\} = \{z \in \mathbb{C}/(1 - i)z = (1 + i)\bar{z}\}$  n'est pas un ouvert dans  $\mathbb{C}$  d'où  $f$  n'est pas holomorphe en aucun domaine de  $\mathbb{C}$ .

— "4ÈME SÉANCE" —

**Exercice 10.** Soit  $P$  une fonction de deux variables définie par  $(x, y) \mapsto P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . Déterminer les fonctions réelles  $(x, y) \mapsto Q(x, y)$  telles que  $z = x + iy \mapsto f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$  soit holomorphe dans  $\mathbb{C} - \{0\}$ .

**Corrigé:** On détermine les fonctions  $Q$  telle que que  $f = P + iQ$  holomorphe dans  $\mathbb{C} - \{0\}$ , avec  $P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .

1. La fonction  $P$  est continûment-différentiable dans  $\mathbb{R}^2/\{(0, 0)\}$ .
2. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2/\{(0, 0)\}$ .

La première condition de Cauchy donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}P(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} &\Rightarrow Q(x, y) = \int \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y)dy \\ &\Rightarrow Q(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + c(x) \end{aligned} \quad (1)$$

D'une part

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + c'(x) \quad (2)$$

D'autre part, en utilisant la deuxième condition de Cauchy, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}Q(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3)$$

Les expressions (2) et (3) nous donne:  $c'(x) = 0$  donc  $c(x) = c$ .

D'où les fonctions  $Q$  sont de la forme

$$Q(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + c$$

3. Les fonctions  $Q$  sont continûment-différentiable dans  $\mathbb{R}^2/\{(0, 0)\}$ , donc les fonctions  $f = P+iQ$  sont holomorphes dans  $\mathbb{C}^*$ .

$$\text{Et on a } f = P + iQ = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} + ci = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} + ci = \frac{1}{z} + ci.$$

$$z \in \mathbb{C}^* \mapsto f(z) = \frac{1}{z} + ci.$$

**Exercice 11.** Soit  $P$  une fonction de deux variables définie par  $(x, y) \mapsto P(x, y) = \sin x \sinh y$ . Déterminer les fonctions réelles  $(x, y) \mapsto Q(x, y)$  telles que  $z = x + iy \mapsto f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$  soit holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

**Corrigé:** On détermine les fonctions  $Q$  telle que que  $f = P + iQ$  holomorphe dans  $\mathbb{C}$ , avec  $P(x, y) = \sin x \sinh y$ .

1. La fonction  $P$  est continûment-différentiable dans  $\mathbb{R}^2$ .
2. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

La première condition de Cauchy donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}P(x, y) = \cos x \sinh y &\Rightarrow Q(x, y) = \int \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y)dy \\ &\Rightarrow Q(x, y) = \cos x \cosh y + c(x) \end{aligned} \quad (4)$$

D'une part

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y) = -\sin x \cosh y + c'(x) \quad (5)$$

D'autre part, en utilisant la deuxième condition de Cauchy on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}Q(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = -\sin x \cosh y \quad (6)$$

Les expressions (5) et (6) nous donne:  $c'(x) = 0$  donc  $c(x) = c$ .

D'où les fonctions  $Q$  sont de la forme

$$Q(x, y) = \cos x \cosh y + c$$

3. Les fonctions  $Q$  sont continûment-différentiable dans  $\mathbb{R}^2$ , donc  $f = P + iQ$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

Et on a

$$f = P + iQ = \sin x \sinh y + i \cos x \cosh y + ci = i(-\sin x \sin iy + \cos x \cos iy) + ci = i(\cos(z) + c).$$

$$z \in \mathbb{C}^* \mapsto f(z) = i(\cos(z) + c).$$

**Exercice 12.** Soit  $P(x, y) = x^3 - \lambda xy^2 - xy + 2x + 3$ . Donnez une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda$  pour que  $P$  soit la partie réelle d'une fonction  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Ecrire  $f$  en fonction de  $z$ .

**Corrigé:** Pour déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda$ , revient à trouver les fonctions  $Q$  et telle que  $f = P + iQ$  holomorphe dans  $\mathbb{C}$ , avec  $P(x, y) = x^3 - \lambda xy^2 - xy + 2x + 3$ . Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

La première condition de Cauchy donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}P(x, y) = 3x^2 - \lambda y^2 - y + 2 &\Rightarrow Q(x, y) = \int \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y)dy \\ &\Rightarrow Q(x, y) = 3x^2y - \frac{\lambda}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y + c(x) \end{aligned} \quad (7)$$

D'une part

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y) = 6xy + c'(x) \quad (8)$$

D'autre part, en utilisant la deuxième condition de Cauchy on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}Q(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = 2\lambda xy + x \quad (9)$$

De (8) et (9), on peut conclure que:

$$\begin{aligned} c'(x) = x &\Rightarrow c(x) = \frac{1}{2}x^2 + c \\ 2\lambda = 6 &\Rightarrow \lambda = 3 \end{aligned}$$

D'où pour  $\lambda = 3$  la fonction  $f$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ . Et on a

$$f = P + iQ = (x^3 - \lambda xy^2 - xy + 2x + 3) + i(3x^2y - y^3 + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + 2y + c) = z^3 + iz^2 + 2z + 3 + ci.$$

$$z \in \mathbb{C}^* \mapsto f(z) = z^3 + iz^2 + 2z + 3 + ci.$$

**Exercice 13.** Soit  $f(z) = f(x + iy) = P(y) + iQ(x)$  définie sur  $\mathbb{C}$ . Déterminer l'expression des fonctions  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

**Corrigé:** Soit  $f(z) = f(x + iy) = P(y) + iQ(x)$  définie sur  $\mathbb{C}$ . On suppose  $P$  et  $Q$  sont continûment différentiable dans  $\mathbb{C}$ , il reste à vérifier les conditions de Cauchy.

La première condition de Cauchy est vérifiée

$$\frac{\partial}{\partial x}P(y) = \frac{\partial}{\partial y}Q(x) = 0$$

La deuxième condition de Cauchy nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}P(y) = -\frac{\partial}{\partial x}Q(x) &\Rightarrow P'(y) = -Q'(x) = c \\ &\Rightarrow P(y) = cy + c_1 \text{ et } Q(x) = -cx + c_2 \\ &\Rightarrow f(z) = icz + c_1 + ic_2. \end{aligned}$$

— "5ÈME SÉANCE" —

**Exercice 14.** Calculer  $\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$

1. le long de la parabole  $y = x^2$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ;
2. le long du segment de droite  $(1 + i)$ ,  $(2 + 4i)$  ;
3. le long des segments  $(1 + i)$ ,  $(2 + i)$  et  $(2 + i)$ ,  $(2 + 4i)$ .

**Corrigé.** Soit  $f(z) = z^2$ ,  $z_0 = 1 + i$  et  $z_1 = 2 + 4i$ . Calcul de  $I = \int_{(\gamma)} f(z) dz$  tel que  $(\gamma) = z_0 z_1$ .

**Définition.** Soient  $f$  une fonction définie dans un domaine  $\Omega \in \mathbb{C}$  et  $(\gamma)$  un chemin de  $\Omega$  sa paramétrisation est définie par  $t \in [a, b] \mapsto z(t) \in (\gamma)$ . L'intégrale curviligne de  $f$  le long de la courbe  $(\gamma)$  est donnée par

$$\int_{(\gamma)} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

1. La paramétrisation de la courbe parabole  $(\gamma_0) = \{z = x + iy \in \mathbb{C} / y = x^2; 1 \leq x \leq 2\}$  est donnée par:

$$z(t) = t + it^2; \quad t \in [1, 2]$$

avec  $z(1) = z_0$ ,  $z(2) = z_1$  et  $z'(t) = 1 + 2it \neq 0$ .

Par définition, on a:

$$I = \int_{(\gamma_0)} f(z) dz = \int_1^2 z^2(t) z'(t) dt = \left[ \frac{1}{3} z^3(t) \right]_1^2 = \frac{1}{3} (z_1^3 - z_0^3) = -\frac{86}{3} - 6i.$$

2. La paramétrisation du segment  $[z_0, z_1] = \{z = x + iy \in \mathbb{C} / y = 3x - 2; 1 \leq x \leq 2\}$  est donnée par:

$$z(t) = t + i(3t - 2); t \in [1, 2]$$

avec  $z(1) = z_0$ ,  $z(2) = z_1$  et  $z'(t) = 1 + 3i \neq 0$ .

Par définition, on a:

$$I = \int_{[z_0, z_1]} f(z) dz = \int_1^2 z^2(t) z'(t) dt = \left[ \frac{1}{3} z^3(t) \right]_1^2 = \frac{1}{3} (z_1^3 - z_0^3) = -\frac{86}{3} - 6i.$$

3. On pose  $z_2 = 2 + i$ . Les paramétrisations des segments sont donnée par:

- $[z_0, z_2] = \{y = 1; 1 \leq x \leq 2\}$ :  $z(t) = t + i$ ,  $t \in [1, 2]$  avec  $z(1) = z_0$ ,  $z(2) = z_2$  et  $z'(t) = 1 \neq 0$ .

- $[z_2, z_1] = \{x = 2; 1 \leq y \leq 4\}$  est  $z(t) = 2 + it$ ;  $t \in [1, 4]$  avec  $z(1) = z_2$ ,  $z(4) = z_1$  et  $z'(t) = i \neq 0$ .

Par définition, on a:

$$I = \int_{[z_0, z_2]} f(z) dz + \int_{[z_2, z_1]} f(z) dz = -\frac{86}{3} - 6i.$$

**Remarque:** Notre fonction  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , donc l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi, de plus  $\exists F(z) = \frac{z^3}{3}$ , tel que  $F'(z) = f(z)$  alors  $I = F(z_1) - F(z_0) = -\frac{86}{3} - 6i$

**Exercice 15.** Démontrer que  $\int_{(\gamma)} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2i\pi, & n+1=0; \\ 0, & n+1 \neq 0. \end{cases}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), où  $(\gamma)$  étant un chemin fermé ayant  $a$  dans son intérieur et orienté positivement.

**Corrigé.** On suppose que  $(\gamma)$  est un cercle de centre  $a$  et de rayon  $R$  ( $R > 0$ ) c'est-à-dire  $(\gamma) = C(a, R) = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| = R\}$ . Sa paramétrisation est donnée par  $z(t) = a + Re^{it}$  avec  $t \in [0, 2\pi]$ . Donc  $\int_{(\gamma)} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_{C(a, R)} \frac{dz}{(z-a)^n} = R^{1-n} i \int_0^{2\pi} e^{it(1-n)} dt = \begin{cases} 2i\pi, & n-1=0; \\ 0, & n-1 \neq 0. \end{cases}$

— "6ÈME SÉANCE" —

**Exercice 16.** Calculer

$$\int_{(\gamma)} \frac{\cos z}{z - \pi} dz \quad \text{et} \quad \int_{(\gamma)} \frac{e^z}{z(z+1)} dz,$$

où

1.  $(\gamma)$  est le cercle positif  $C^+(1, 3) = \{z; |z - 1| = 3\}$ ,

2.  $(\gamma)$  est le cercle positif  $C^+(1, 2.1) = \{z; |z - 1| = 2.1\}$ .

**Corrigé.**

1. Calcul de

$$\int_{(\gamma)} \frac{\cos z}{z - \pi} dz$$

(a) Si  $(\gamma) = C^+(1, 3) = \{z; |z - 1| = 3\}$ .

On pose  $f(z) = \cos z$ . On a

- i. La fonction  $f$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ . (fonction trigonométrique)
- ii. La courbe  $C^+(1, 3) \subset \mathbb{C}$  est un chemin fermé dans  $\mathbb{C}$  et orienté positivement.
- iii.  $\text{int}(C^+(1, 3)) = D(1, 3) = \{z \in \mathbb{C} / |z - 1| < 3\} \subset \mathbb{C}$ .
- iv.  $z_0 = \pi \in \text{int}(C^+(1, 3))$ . En effet  $|z_0 - 1| = |\pi - 1| < 3$

Alors d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\int_{C^+(1,3)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2i\pi \cos(\pi) = -2i\pi.$$

(b) Si  $(\gamma) = C^+(1, 2.1) = \{z; |z - 1| = 2.1\}$ .

On pose  $f(z) = \frac{\cos z}{z - \pi}$ . On a

- i. La fonction  $f$  est holomorphe dans  $\mathbb{C} - \{\pi\}$ .
- ii. La courbe  $C^+(1, 2.1) \subset \mathbb{C}$  est un chemin fermé dans  $\mathbb{C} - \{\pi\}$  et orienté positivement.  
En effet

$$|\pi - 1| \neq 2.1$$

iii.  $\text{int}(C^+(1, 2.1)) = D(1, 2.1) = \{z \in \mathbb{C} / |z - 1| < 2.1\} \subset \mathbb{C} - \{\pi\}$ . En effet

$$|\pi - 1| \not< 2.1$$

Alors d'après le théorème de Cauchy

$$\int_{C^+(1,2.1)} \frac{\cos z}{z - \pi} dz = 0.$$

2. On a

$$\int_{(\gamma)} \frac{e^z}{z(z+1)} dz = \int_{(\gamma)} \frac{e^z}{z} dz - \int_{(\gamma)} \frac{e^z}{z+1} dz = I_1 - I_2.$$

(a) Si  $(\gamma) = C^+(1, 3) = \{z; |z - 1| = 3\}$ .

On pose  $f(z) = e^z$ . On a

- i. La fonction  $f$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .
- ii. La courbe  $C^+(1, 3) \subset \mathbb{C}$  est un chemin fermé dans  $\mathbb{C}$  et orienté positivement.
- iii.  $\text{int}(C^+(1, 3)) = D(1, 3) = \{z \in \mathbb{C} / |z - 1| < 3\} \subset \mathbb{C}$ .
- iv.  $z_0 = 0 \in \text{int}(C^+(1, 3))$  et  $z_1 = -1 \in \text{int}(C^+(1, 3))$ . En effet  $|z_0 - 1| = |0 - 1| = 1 < 3$   
et  $|z_1 - 1| = |-1 - 1| = 2 < 3$

Alors d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\int_{(\gamma)} \frac{e^z}{z(z+1)} dz = \int_{C^+(1,3)} \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_1)} dz = I_0 - I_1 = 2i\pi(f(z_0) - f(z_1)) = 2i\pi(1 - e^{-1}).$$

- (b) Si  $(\gamma) = C^+(1, 2.1) = \{z; |z - 1| = 2.1\}$ . Le calcul se fait de la même manière et on aura le même résultat, c'est-à-dire

$$\int_{C^+(1,2.1)} \frac{e^z}{z(z+1)} dz = 2i\pi(1 - e^{-1}).$$

**Exercice 17.** Calculer

$$\int_{(\gamma)} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz \quad \text{et} \quad \int_{(\gamma)} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$$

, où  $(\gamma)$  est le cercle positif  $C^+(0, 3) = \{z; |z| = 3\}$ .

**Corrigé.**

1. On a

$$\int_{C^+(0,3)} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = \int_{C^+(0,3)} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2} dz - \int_{C^+(0,3)} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1} dz$$

On pose  $f(z) = \sin \pi z^2 + \cos \pi z^2$ . On a

- (a) La fonction  $f$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .
- (b) La courbe  $C^+(0, 3) \subset \mathbb{C}$  est un chemin fermé dans  $\mathbb{C}$  et orienté positivement.
- (c)  $\text{int}(C^+(0, 3)) = D(0, 3) = \{z \in \mathbb{C} / |z - 0| < 3\} \subset \mathbb{C}$ .
- (d)  $z_0 = 1 \in \text{int}(C^+(0, 3))$  et  $z_1 = 2 \in \text{int}(C^+(0, 3))$ . En effet  $|z_0 - 0| = 1 < 3$  et  $|z_1 - 0| = 2 < 3$

Alors d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\int_{C^+(0,3)} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = 2i\pi(f(z_1) - f(z_0)) = 2i\pi(1 + i) = -2\pi(1 - i).$$

2. Calcul de

$$\int_{C^+(0,3)} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$$

On pose  $f(z) = e^{2z}$ . On a

- (a) La fonction  $f$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .
- (b) La courbe  $C^+(0, 3) \subset \mathbb{C}$  est un chemin fermé dans  $\mathbb{C}$  et orienté positivement.
- (c)  $\text{int}(C^+(0, 3)) = D(0, 3) = \{z \in \mathbb{C} / |z - 0| < 3\} \subset \mathbb{C}$ .
- (d)  $z_0 = -1 \in \text{int}(C^+(0, 3))$ . En effet  $|z_0 - 0| = 1 < 3$ .

Alors d'après la formule intégrale de Cauchy d'ordre supérieur

$$\int_{C^+(0,3)} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = \frac{2i\pi}{3!} f'''(z_0) = \frac{8}{3} \pi e^{-2}.$$

**Exercice 18.** Calculer

$$\int_{(\gamma^+)} \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z - 1)^3} dz$$

où  $(\gamma^+)$  est un chemin fermé quelconque entourant  $z = 1$  et orienté positivement.

**Corrigé.**

On pose  $f(z) = 5z^2 - 3z + 2$ . On a

1. La fonction  $f$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ . (polynôme)
2. La courbe  $(\gamma^+)$  est un chemin fermé dans  $\mathbb{C}$  et orienté positivement. (Hyp)
3. L'intérieur de  $(\gamma^+)$  est incluse dans  $\mathbb{C}$ . (evid)
4.  $z_0 = 1 \in \text{int}(\gamma)$ . (Hyp)

Alors d'après la formule intégrale de Cauchy d'ordre supérieur

$$\int_{(\gamma^+)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz = \frac{2i\pi}{2!} f''(z_0) = 10i\pi.$$

**Exercice 19.** Calculer

$$\int_{(\gamma)} \frac{\cosh z^2 + \sinh z^2}{(z - \pi)(z - 2)^2} dz$$

, où  $(\gamma)$  est le cercle positif  $C^+(0, 3) = \{z; |z| = 3\}$ .

---

— "7ÈME SÉANCE" —

---

**Exercice 20.** Donner le développement en série entière, au voisinage de  $z_0 = 0$ , de la fonction suivante

$$f(z) = \frac{z}{(z + 2)(z + 1)}.$$

**Corrigé.**

Le développement en série entière de  $\frac{1}{1 - z}$  voisinage de  $z_0 = 0$  est donné par

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad \forall z, |z| < 1.$$

Soit  $f(z) = \frac{z}{(z + 2)(z + 1)}$  et  $z_0 = 0$ .

On a

$$f(z) = \frac{2}{2 + z} - \frac{1}{1 + z} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{1 - (-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$$

donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{2^n + 1}{2^n} \right) z^n$$

pour tout  $|z| < 1$ , car le rayon de convergence est  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$ , avec  $a_n = (-1)^n \left( \frac{2^n + 1}{2^n} \right)$

**Exercice 21.** Donner le développement en série entière, au voisinage de  $z_0 = 1$ , de la fonction suivante

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)^2}.$$

**Corrigé.**

Soit  $f(z) = \frac{z}{(z-2)^2}$  et  $z_0 = 1$ . On pose  $Z = z - z_0 = z - 1$ . Donc si  $z$  est au voisinage de 1, alors  $Z$  est au voisinage de zéro.

On a

$$f(z) = f(Z+1) = \frac{Z+1}{(Z-1)^2} = \frac{1}{Z-1} + \frac{2}{(Z-1)^2} = -\frac{1}{1-Z} - 2 \left( \frac{1}{1-Z} \right)'$$

$$f(z) = f(Z+1) = -\sum_{n=0}^{+\infty} Z^n - 2 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} Z^n \right)' = -\sum_{n=0}^{+\infty} Z^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n Z^{n-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} Z^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) Z^n$$

donc

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+3) Z^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+3)(z-1)^n$$

pour tout  $|z-1| < 1$ , car le rayon de convergence est  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$ , avec  $a_n = -(2n+3)$

**Exercice 22.** Déterminer le développement en série entière de  $z \mapsto \frac{1}{(z-2)(z^2+1)}$  en 0.

**Corrigé.**

Soit  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z^2+1)}$  et  $z_0 = 0$ .

On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{5} \left( \frac{1}{2-z} + \frac{2+z}{1+z^2} \right) = \frac{-1}{5} \left( \frac{1}{2-z} + \frac{2}{1+z^2} + \frac{z}{1+z^2} \right) \\ &= \frac{-1}{10} \left( \frac{1}{1-z/2} + \frac{4}{1-(-z^2)} + (\log 1+z^2)' \right) \\ &= \frac{-1}{10} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} z^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} z^{4n-2} \right)' \right) \\ &= \frac{-1}{10} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} z^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z^{4n-3} \right) \end{aligned}$$

donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

$$\text{avec } a_n = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } n = 0 \\ \frac{-1}{10} \left( \frac{1}{2^{4p-3}} + 4(-1)^{4p-3} + 2(-1)^{p-1} \right) & \text{si } n = 4p-3 \\ \frac{-1}{10} \left( \frac{1}{2^n} + 4(-1)^n \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 23.** Trouver les singularités de chacune des fonctions suivantes et les caractériser.  $z \mapsto \frac{z^2}{(z+1)^3}$ ;  $z \mapsto \frac{2z^3 - z + 1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$ ;  $z \mapsto \frac{\sin z}{z^2 + 2z + 2}$ ;  $z \mapsto \frac{1 - \cos z}{z}$ ;  
 $z \mapsto e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}$ .

**Exercice 24.** Déterminer les résidus de chacune des fonctions suivantes, au pôle indiqué.  $z \mapsto \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ ,  $z_0 = 2$ ,  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -i$ ;  $z \mapsto \frac{1}{z(z+2)^3}$ ,  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = -2$ ;  $z \mapsto \frac{ze^z}{(z-3)^2}$ ,  $z_0 = 3$ ;  
 $z \mapsto \cot z$ ,  $z_0 = -5\pi$ ;

**Exercice 25.** Trouver les séries de Laurent de  $z \mapsto \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$  par rapport à ses pôles.

**Exercice 26.** Calculer

$$\int_{C^+(i, 1/2)} \frac{e^z}{(i-z)(3z+1)^2} dz,$$

où  $C^+(i, 1/2)$  est le cercle de centre  $i$  est de rayon  $1/2$  orienté positivement.

— "9ÈME SÉANCE" —

**Exercice 27.** Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \sin t}.$$

**Exercice 28.** Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)}.$$