CHAPITRE 1 : **RAPPELS D'ELECTROCINETIQUE**

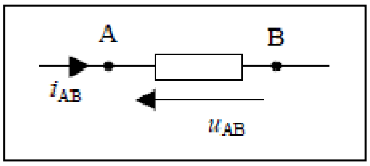
LOIS GENERALES DE L'ELECTRICITE

1 Dipôles électriques

1.1 Définition

On appelle dipôle électrocinétique tout système relié à l'extérieur par deux conducteurs uniquement. Le comportement d'un dipôle est caractérisé par deux grandeurs électriques duales : la tension et le courant.

La tension aux bornes d'un dipôle représente la différence de potentiel u(t) entre les deux bornes du dipôle. La tension s'exprime en Volt (V).



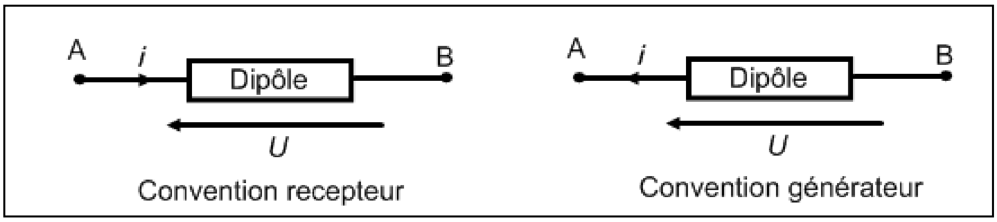
Le courant traversant un dipôle correspond au déplacement de charges électriques sous l'effet du champ électrique induit par la différence de potentiel aux bornes du dipôle. A tout instant le courant entrant par une borne d'un dipôle est égal au courant sortant par l'autre borne. L'intensité i(t) de ce courant s'exprime en Ampère (A).

Le courant électrique est une grandeur orientée. Conventionnellement le sens positif correspond au sens de déplacement des charges positives (sens contraire au déplacement des électrons de charge négative).

On a $i_A(t) = i_B(t) = i_{AB}(t)$.

Représentation et caractéristique :

Il existe deux possibilités pour le choix des sens conventionnels de la tension et du courant. Selon que u et i sont de même sens ou non :



Un dipôle impose une relation entre la tension *u* à ses bornes et l'intensité du courant *i* qui le traverse. La fonction liant *u* à *i* : $u = u(i)$ $(ou bien\ i = i(u)$ imposée par le dipôle est appelée *caractéristique* du dipôle.

1.2 Classification des dipôles :

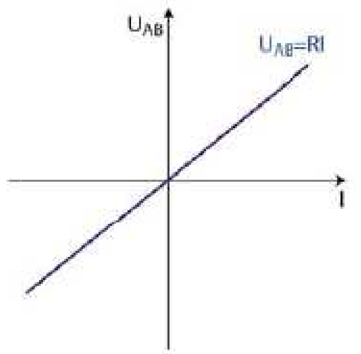
1.2.1 Dipôles passifs

Un dipôle passif est un dipôle qui consomme de l'énergie électrique et qui transforme toute cette énergie enchaleur.

a) Le résistor (loi d'Ohm)

Un résistor est un dipôle linéaire passif qui si on lui applique entre ses bornes *A* et *B* une ddp $U_{AB} = V_A - V_B$, il sera parcouru par un courant *I* tel que $U_{AB} = I.R$. *R* est appelée la résistance du dipôle. Cette loi entre le courant et la tension dite loi d'Ohm est empirique et est vérifiée par la plupart des dipôles passifs en régime continu. *R* s'exprime en Ohm Ω.

La caractéristique de transfert est une droite linéaire de pente *R* :



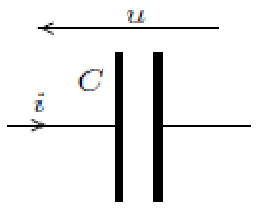
L'inverse de la résistance est la *conductance*, souvent notée *G*, et s'exprime en *Siemens* (abréviation S) : $G = \frac{1}{R}$.

La difficulté avec laquelle les électrons circulent dans le résistor s'accompagne d'un échauffement : c'est ce qu'on appelle l'*effet Joule*. Cet échauffement, du point de vue du circuit électrique, est une perte d'énergie par dissipation thermique. Pour une résistance *R*, et un courant *i* et une tension *U*, cette puissance P_J perdue dans le résistor est égale à :

$$P_J = R.I^2 = U.I = \frac{U^2}{R}$$

b) Le condensateur

Il est constitué de deux armatures conductrices séparées par un isolant. En régime continu le condensateur est chargé par la d.d.p. appliquée à ses bornes et il se comporte comme un interrupteur ouvert : $i = 0$.



On définit sa *capacité C* comme le rapport de la charge accumulée sur la tension appliquée à ses bornes : $C = \dfrac{q}{u}$

L'unité de *C* est le Farad (F).

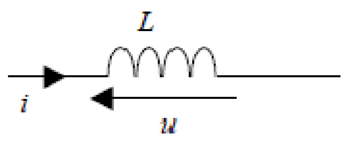
Or le courant est la dérivée de la charge par rapport au temps : $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$ donc il vient :

$i(t) = C \cdot \dfrac{du}{dt}$ en régime transitoire (charge / décharge).

L'énergie stockée dans le condensateur est $E = \dfrac{1}{2} \cdot C \cdot u^2$ avec $(u(0) = 0)$.

c) La bobine

Elle est constituée de spires qui lorsqu'elles sont parcourues par un courant continu se comportent comme un court-circuit.

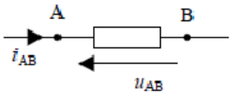
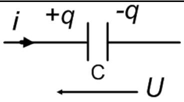
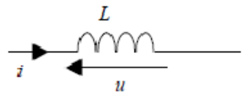
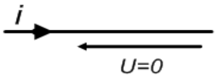
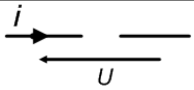


Parcourue par un courant variable, la tension aux bornes est : $u = L \cdot \dfrac{di}{dt}$

L : inductance en henry (H).

L'énergie stockée dans la bobine est $E = \dfrac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$ avec $(i(0) = 0)$.

L'intérêt de ces deux dipôles réside dans les propriétés en régime transitoire ou permanent sinusoïdal. Ils sont capables alors d'emmagasiner de l'énergie puis de la restituer ultérieurement. Cependant la puissance moyenne dissipée est toujours nulle.

Composant	symbole	Grandeur caractéristique et unité	loi	unités
Résistance (résistor)		R : résistance en Ohms (Ω)	*U=R.I*	*V = Ω.A*
Condensateur		C : capacité en Farads (F)	$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$	$A = F.\frac{V}{s}$
bobine		L : inductance en Henrys (H)	$u = L \cdot \frac{di}{dt}$	$V = H.\frac{A}{s}$
Court-circuit			$\forall i$, *u=0*	
Circuit ouvert			$\forall u$, *i=0*	

1.2.2 Dipôles actifs

Un **dipôle actif** est un dipôle qui fournit de l'énergie au circuit associe.

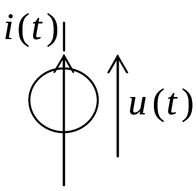
Exemple : pile, générateur, moteur électrique à courant continu etc..

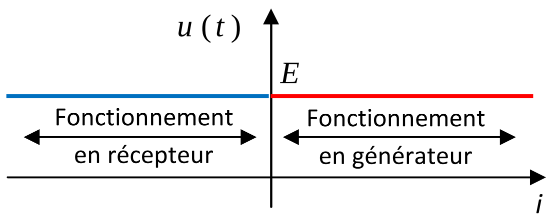
On s'intéresse ici aux dipôles générateurs de tension et de courant.

a) Générateur de tension

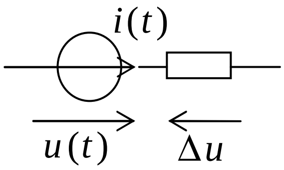
- **Générateur de tension idéal :**

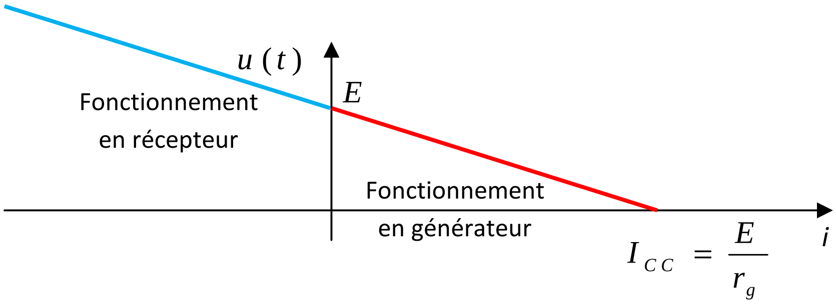
C'est un dipôle aux bornes duquel la tension reste constante quelle que soit l'intensité du courant délivré. Cette tension est appelée force électromotrice (f.é.m.). La caractéristique $u = f(i)$ est une droite horizontale.





- **Générateur de tension réel :** C'est un dipôle tel que, lorsque l'intensité du courant qu'il délivre croît la tension à ces bornes décroît. La chute de tension est proportionnelle à i ce qui est caractéristique d'une résistance.





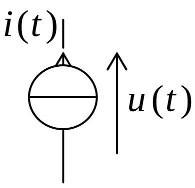
$$\Delta u = E - r_g \cdot i$$

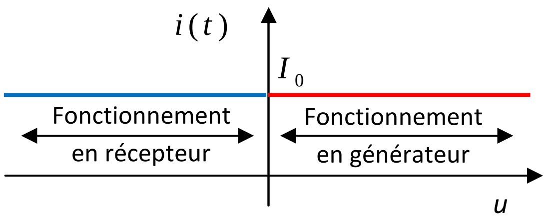
La caractéristique d'un générateur de tension réel est une droite ne passant pas par l'origine de pente négative.

b) Générateur de courant

- **Générateur de courant idéal :**

C'est un dipôle débitant un courant constant I_0 (courant électromoteur c.é.m.) indépendant de la tension à ses bornes. La caractéristique $i = f(u)$ est une droite horizontale. Lorsque le générateur fonctionne comme générateur dans un circuit la tension est comptée positive et orientée comme le courant.

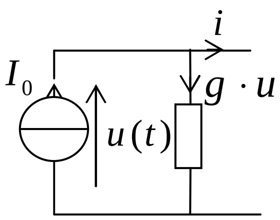


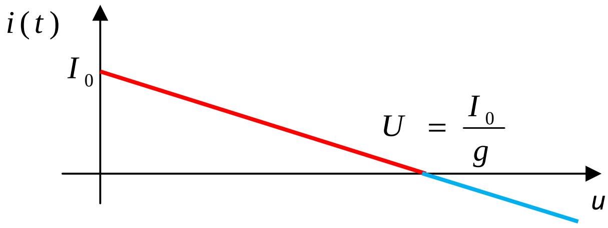


- **Générateur de courant réel :**

C'est un dipôle à la sortie duquel il y a une chute de courant lorsque la tension à ces bornes croît. Cette chute de courant Δi est proportionnelle à u et elle est associée à une résistance de conductance g telle que $\Delta i = -g \cdot u$, l'intensité délivrée sera alors égale à : $i = I_0 - g \cdot u$

avec $g = \frac{1}{r}$ conductance du générateur. Le modèle équivalent, est l'association en parallèle d'un générateur de courant idéal et d'une résistance r.





La caractéristique $i = f(u)$ est une droite ne passant pas par l'origine, de pente négative. Lorsque la tension $u = 0$, c'est à dire lorsque ses bornes sont court-circuitées le courant débité par le générateur est égal au c.é.m.. D'autre part lorsque la charge présente une résistance infinie (autrement dit lorsque le générateur est en circuit ouvert $i = 0$ alors on relève aux bornes du générateur une tension $r \cdot I_0$.

<u>1.2.3 Dipôles linéaires :</u>

Un dipôle est dit linéaire si et seulement si la fonction $u(i)$ (ou bien $i(u)$) est linéaire , c'est-à-dire :

$$u(\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2) = \alpha_1 . u(i_1) + \alpha_2 . u(i_2)$$

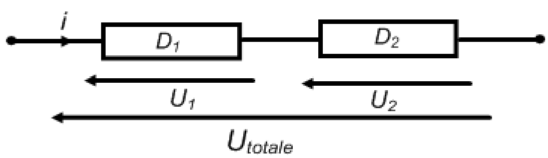
$$i(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2) = \beta_1 . i(u_1) + \beta_2 . i(u_2)$$

Un circuit constitué uniquement de dipôles linéaires est dit aussi linéaire.

<u>1.2.4 Association de dipôles :</u>

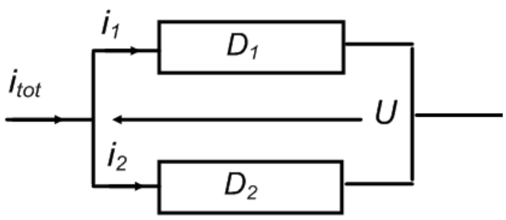
<u>a) Association en série :</u> Ils sont parcourus par le même courant

$$U_{tot} = U_1 + U_2$$
$$U_1 = f_1(i)$$
$$U_2 = f_2(i)$$
$$U_{tot} = U_1 + U_2 = f_1(i) + f_2(i)$$



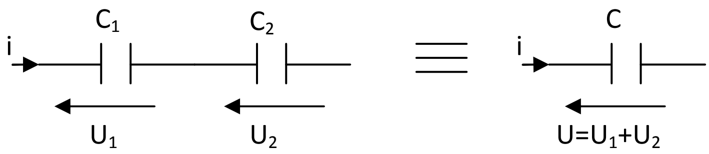
<u>b) Association en parallèle :</u> Ils sont alimentes sous la même tension U.

$$i_{tot} = i_1 + i_2$$
$$i_1 = g_1(u)$$
$$i_2 = g_1(u)$$
$$i_{tot} = i_1 + i_2 = g_1(u) + g_1(u)$$



Exemple : **association de condensateurs**

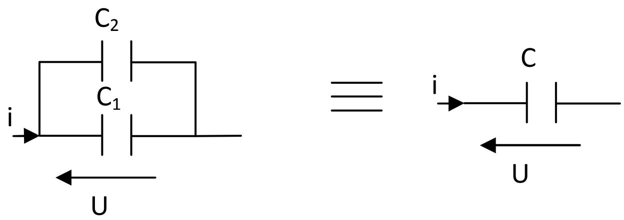
- **Association série**



Ona $\frac{i}{C_1} = \frac{dU_1}{dt}$ et $\frac{i}{C_2} = \frac{dU_2}{dt}$ de plus $\frac{i}{C} = \frac{dU}{dt} = \frac{dU_1}{dt} + \frac{dU_2}{dt}$

$\frac{i}{C} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2}$ soit $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

- **Association parallèle**



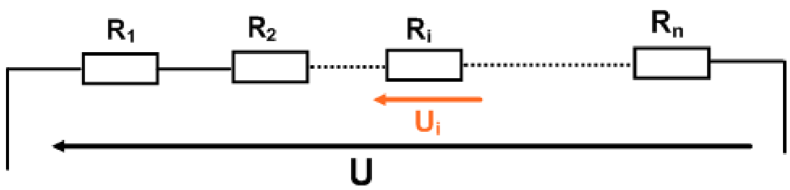
On a $i_1 = C_1 \frac{dU}{dt}$ et $i_2 = C_2 \cdot \frac{dU}{dt}$, de plus $i = i_1 + i_2 = (C_1 + C_2) \cdot \frac{dU}{dt} = C \cdot \frac{dU}{dt}$

Ceci montre que $C = C_1 + C_2$

2 Principaux théorèmes pour l'analyse de réseaux électriques

2.1 Pont diviseur de tension:

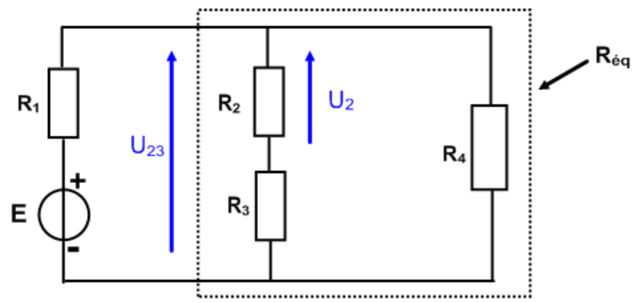
Ce théorème est utilisé pour calculer des tensions aux bornes des résistances placées en série. Soit n résistances placées en série et alimentées par une tension E.



La tension aux bornes de la i-ième résistance s'écrit:

$$U_i = \frac{R_i}{\sum_{j=1}^{n} R_j} U$$

Exemple : Soit à déterminer la tension aux bornes de la résistance R_2 du circuit ci-dessus.



On remarque que les résistances R_2 et R_3 sont en parallèle avec la résistance R_4, alors:

$$R_{éq} = (R_2 + R_3)//R_4 = \frac{(R_2+R_3)R_4}{R_2+R_3+R_4}$$

Les résistances R_{eq} et R_1 sont en série, donc:

$$U_{23} = \frac{R_{éq}}{R_{éq} + R_1} E$$

Les résistances R_2 et R_3 sont en série, donc:

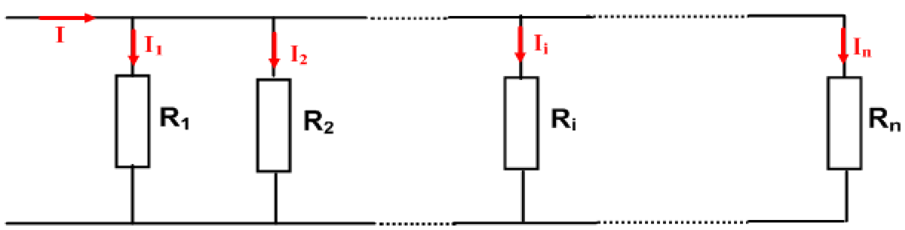
$$U_2 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} U_{23}$$

En remplaçant U_{23}, on obtient:

$$U_2 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \frac{R_{éq}}{R_{éq} + R_1} E$$

2.2 Pont diviseur de courant:

Ce théorème s'applique aux branches qui contiennent des résistances et/ou des impédances en parallèle comme il est montré dans la figure ci-dessous.

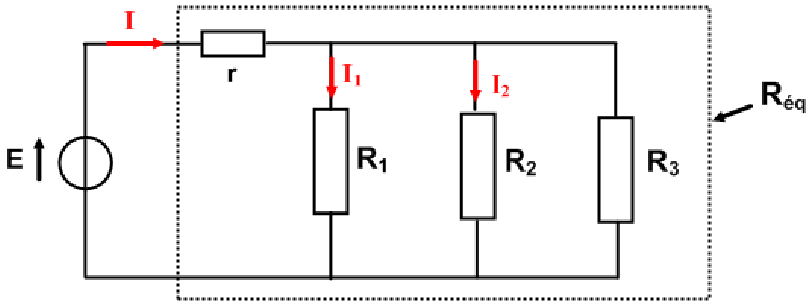


Le courant I_i traversant la résistance R_i placée en parallèle avec les résistances R_1, R_2, ... et R_n, est donné par:

$$I_i = \frac{\frac{1}{R_i}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}} I$$

Où I est le courant alimentant le circuit parallèle constitué par les n résistances.

<u>Exemple :</u>
Exprimer les courants I_1 et I_2 en fonction de la tension continue E et des résistances r, R_1, R_2 et R_3.



En appliquant la loi d'Ohm, le courant I s'écrit: $I = \frac{E}{R_{eq}}$

où R_{eq} est la résistance équivalente au circuit encadré, tel que: $R_{eq} = r + (R_1//R_2//R_3)$

Puisque les résistances R_1, R_2 et R_3 sont en parallèle, alors on obtient après application du théorème du pont diviseur de courant:

$$I_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} I$$

En remplaçant le courant I dans l'expression de I_1, on obtient:

$$I_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \frac{E}{R_{eq}}$$

<u>2.3 Lois de Kirchhoff :</u>

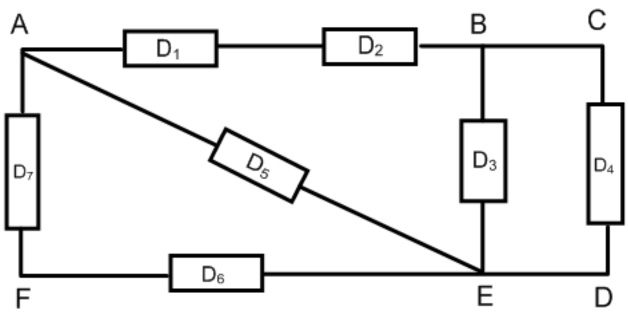
<u>a) vocabulaire électrocinétique :</u>

<u>Réseau ou circuit électrique</u> : ensemble de dipôles reliés entre eux par des fils conducteurs parfait et constituant un circuit fermé.

<u>Nœuds</u> : point du circuit où se rejoignent au moins 3 fils conducteurs.

<u>Branche</u> : ensemble de dipôles situés entre deux nœuds.

<u>Maille :</u> contours fermé de branches passant au plus une seule fois par un nœud donné.



Un réseau

Nœuds: A, B, E

Branches: AB, BE, AE, AFE, CD

Mailles: ABEA , ABEFA , ABCDEFA , ABCDEA, AEFA , BCDEB

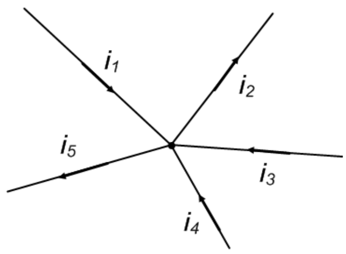
b) Lois des nœuds :

La somme algébrique des courants qui aboutissent à un nœud est nulle.

$$\sum_{j=1}^{n} i_j = 0$$

Les courants qui arrivent au nœud sont pris avec un signe (+)

et les courants qui partent du nœud sont pris avec un signe (-)



Ici $i_1 - i_2 + i_3 + i_4 - i_5 = 0$

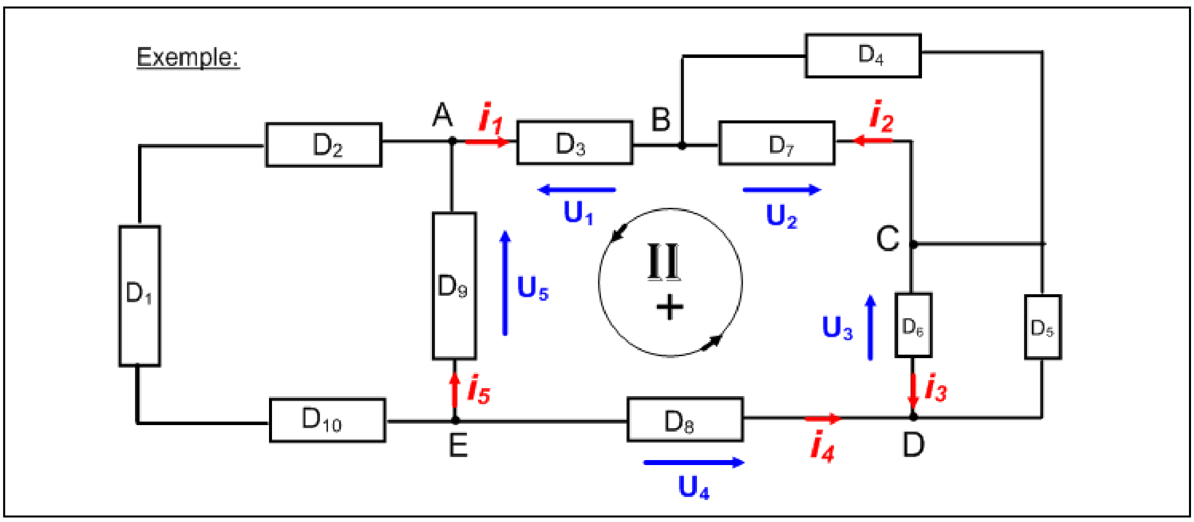
Soit $\underbrace{i_1 + i_3 + i_4} = \underbrace{i_2 + i_5}$

$\sum courant\ entrant \quad = \quad \sum courants\ sortant$

c) Lois des mailles :

La somme des tensions (différence de potentiel ddp) le long d'une maille comptabilisées dans un sens donné est nulle.

Parmi ces tensions (ddp) , certaines sont produites par des sources , d'autres sont produites par le passage d'un courant dans des dipôles passifs. Dans ce dernier cas, nous parlons de chute de tension.



Méthode d'utilisation des lois de Kirchhoff :

1) Choisir la maille (II) par exemple ou ABCDEA.

2) Choisir le sens du courant dans chaque branche (soit physique s'il est connu ou par hasard)

3) Placer les ddp (flèches) aux bornes de chaque dipôle.

4) Choisir un sens arbitraire de parcours de la maille (exple : sens opposé des aiguilles d'une montre)

5) Faire la somme algébrique de toutes les ddp rencontrées en démarrant d'un point (ici A)

- On prendra la ddp avec un signe (+) si elle est dirigée dans le sens conventionnel choisi.
- Sinon, on la prendra avec un signe (-)

La maille (II) donnera : $U_1 - U_2 + U_3 + U_4 - U_5 = 0$

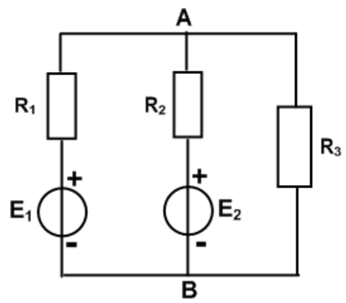
Il nous faut autant d'équations que d'inconnues. Or d'après le schéma, il y'a 8 branches , ce qui correspond à 8 courants (inconnues). Alors il va falloir poser 8 équations, ce qu'on peut formuler en utilisant la loi des nœuds et des mailles.

Exemple : Déterminer la tension U_{AB} avec $U_{AB} = U_{R3}$ et Les courants dans chaque branche.

Les grandeurs connues sont :

- Les valeurs des deux générateurs de tension $\mathbf{E_1}$ et $\mathbf{E_2}$.

- Les valeurs des trois résistances $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ et $\mathbf{R_3}$.



Résolution :

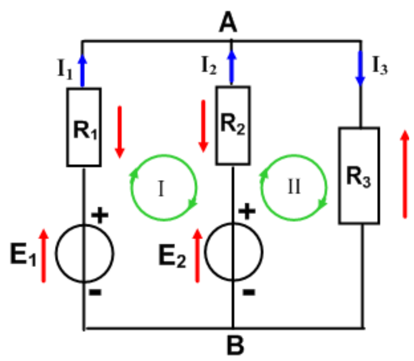
Le montage comporte deux nœuds A et B qui donnent la même relation : $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

Maille (I) : $E_1 - U_{R1} + U_{R2} - E_2 = 0$

Maille (II) : $E_2 - U_{R2} - U_{R3} = 0$

On obtient bien un système de trois équations pour les trois inconnues I_1, I_2 et I_3.

La quatrième inconnue U_{R3} sera trouvée en utilisant la loi d'Ohm, soit $U_{R3} = R_3 I_3$.



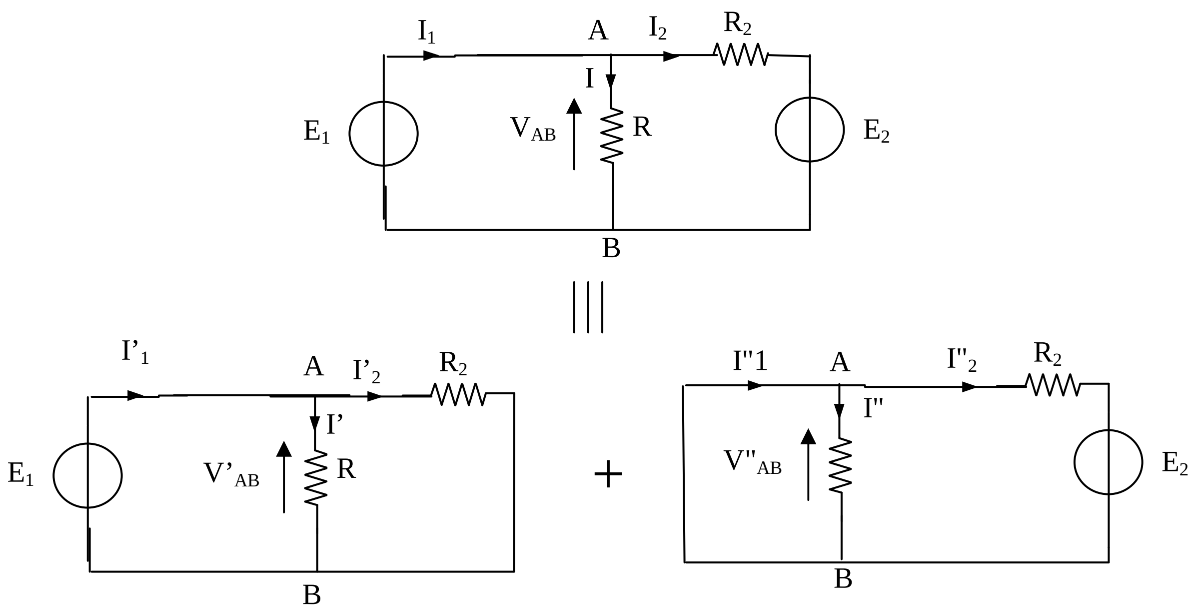
2.4 Théorème de superposition :

Dans un circuit linéaire contenant des sources indépendantes, le courant ou la tension à chaque point dans le circuit est la somme algébrique des contributions de chaque source agissant seule, les autres sources sont passivées.

- Une source de tension passivée $\Rightarrow$ court-circuitée (sa tension est nulle).
- Une source de courant passivée $\Rightarrow$ circuit ouvert (courant nul).

Exemple :

On cherche à montrer que le circuit suivant est équivalent à la somme des deux circuits en dessous.



Montrons que : $I_1 = I'_1 + I''_1$; $I_2 = I'_2 + I''_2$; $I = I' + I''$; $V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB}$

Commençons par le circuit 1 où E_2 est court-circuitée :

$I'_1 = \frac{E_1}{R'_{éq}}$ or $R'_{éq} = \frac{R \cdot R_2}{R + R_2}$ alors $I'_1 = E_1 \cdot \frac{R + R_2}{R \cdot R_2}$ ensuite $E_1 = R \cdot I'$

$\Rightarrow I' = \frac{E_1}{R}$ on a aussi $E_1 = R_2 \cdot I'_2$ $\Rightarrow I'_2 = \frac{E_1}{R_2}$

On dégage simplement : $V'_{AB} = E_1$

De même pour le circuit 2 où E_1 est court-circuitée :

On a : $V''_{AB} = 0$

$I''_2 = -\dfrac{E_2}{R_2}$ et $I''_1 = I''_2$ D'autre part : $I'' = 0$

Pour le circuit principal:

On a $V_{AB} = R \cdot I$ et $V_{AB} = E_1$ et $V_{AB} = E_2 + R_2 \cdot I_2$

$I = \dfrac{E_1}{R} = I'$ puisque $I'' = 0$

$$I_2 = \frac{E_1 - E_2}{R_2} = \frac{E_1}{R_2} - \frac{E_2}{R_2} = I'_2 + I''_2$$

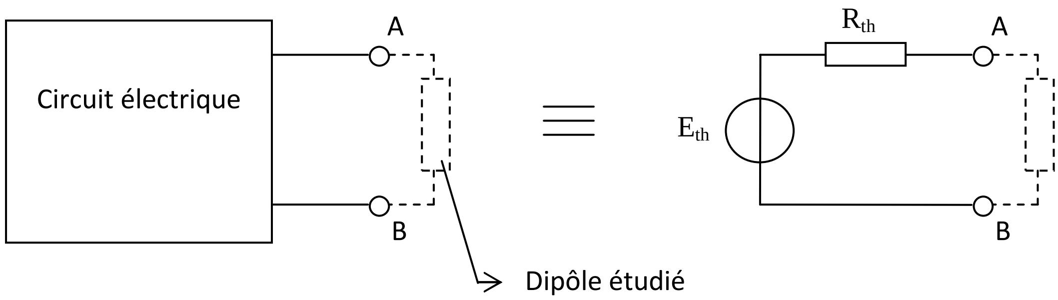
$$I_1 = I + I_2 = \frac{E_1}{R} + \frac{E_1 - E_2}{R_2} = \underbrace{E_1 \cdot \frac{R_2 + R}{R_2 \cdot R}}_{I'_1} - \underbrace{\frac{E_2}{R_2}}_{I''_1}$$

$V_{AB} = E_1 = V'_{AB}$ car $V''_{AB} = 0$

2.5 Théorème de Thevenin

Soit un portion de circuit avec des sources autonomes de tension, de courant, et des résistances vue comme un dipôle placé entre 2 points A et B. Cette portion peut être remplacé par un générateur équivalent dit de Thevenin (E_{th} , R_{th}).

- $E_{th} = U_{A-B}$ est égale à la tension à vide qui apparaît entre A et B lorsque le reste du circuit est débranché.
- $R_{th} = R_{AB}$ est la résistance équivalente entre A et B lorsque les sources autonomes de tension et de courant sont passivées.



Procédure :

a- On supprime du circuit le dipôle étudié de bornes A et B.

b- On passive toutes les sources et on calcule la résistance équivalente entre A et B $\rightarrow R_{th}$:

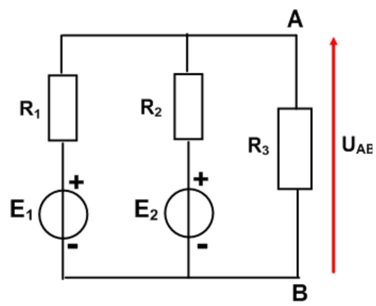
- Une source de tension est court-circuitée.
- Une source de courant est un circuit ouvert.

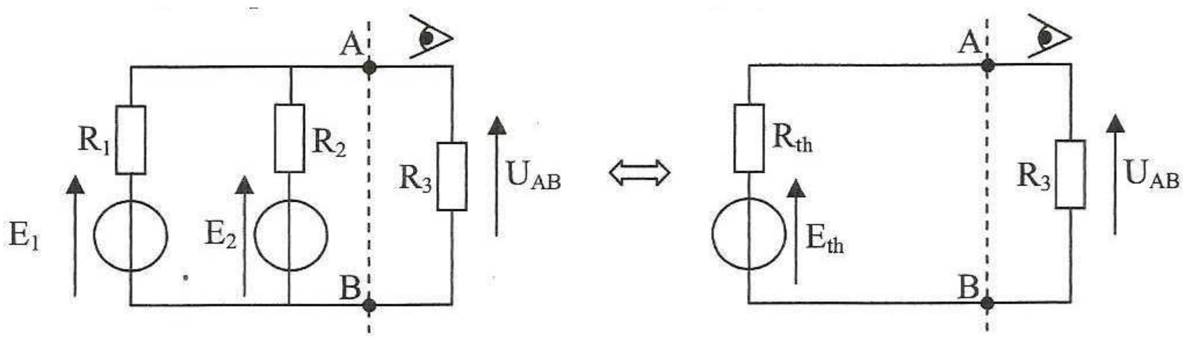
c- On rétablit les sources et on calcule la tension entre A et B du circuit ouvert (dipôle étudié supprimé).

d- On remet le dipôle étudié et on calcule le courant avec le générateur équivalent obtenu.

Exemple :

Déterminer la tension aux bornes de la résistance R_3 en utilisant le modèle de Thevenin entre A et B.



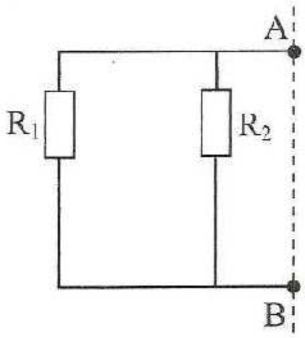


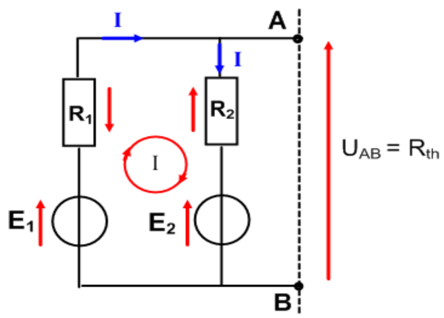
On passive les sources E_1 et E_2 pour obtenir la résistance équivalente R_{th}.

L'association des 2 résistances en parallèle donne :

$$R_{Th} = R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

On calcule U_{AB} a vide (en ouvrant le circuit) pour obtenir la fem équivalente Eth.





Calculons E_{th}

On a directement $E_{th} = U_{AB} = E_2 + R_2 I$

Pour exprimer le courant *I* on utilise la loi des mailles

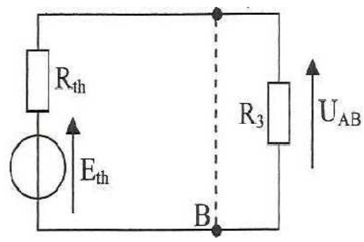
$E_1 - R_1 I - R_2 I - E_2 = 0$ soit $I = \frac{E_1 - E_1}{R_1 + R_2}$. En remplaçant l'expression de *I* on obtient

$$E_{th} = U_{AB} = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 + R_2}$$

<u>N.B :</u> L'utilisation du théorème de millman (paragraphe à suivre) nous permet d'obtenir directement E_{th}.

Connaissant maintenant E_{th} et R_{th}, le calcul de U_{AB} en circuit ferme est obtenu en appliquant simplement le principe du pont diviseur de tension sur le circuit ci-dessous.

$$U_{AB} = \frac{R_3}{R_3 + R_{th}} E_{th}$$



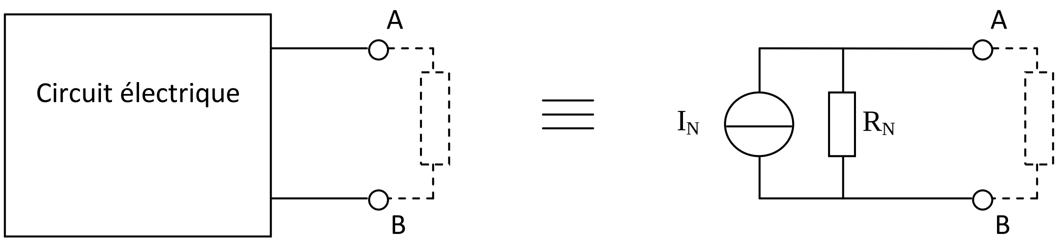
Soit

$$U_{AB} = U_{R_3} = \frac{R_3}{R_3 + R_{th}} \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 + R_2}$$

<u>2.6 Théorème de Northon</u>

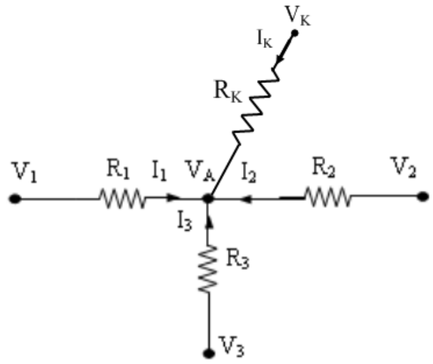
Soit un portion de circuit avec des sources autonomes de tension, de courant, et des résistances vue comme un dipôle placé entre 2 points A et B. Cette portion peut être remplacé par un générateur équivalent dit de Norton (I_{Nort} , R_{Nort}).

- La résistance est celle équivalente entre A et B lorsque les sources sont éteintes : comme dans le cas de Thévenin.
- La source de courant débite un courant égal au courant de court- circuit lorsque A et B sont liés.



2.7 Théorème de Millman

Soit un nœud A de potentiel V_A auquel sont liés des dipôles (résistances) R_1, R_2 et R_3 comme le montre la figure suivante.



Montrons que :

$$V_A = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \cdots . \frac{V_K}{R_K}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \frac{1}{R_K}}$$

Démonstration : On a

$$I_1 = \frac{V_A - V_1}{R_1}\ , \qquad I_2 = \frac{V_A - V_2}{R_2}\ , \qquad I_3 = \frac{V_A - V_3}{R_3}\ , \qquad I_K = \frac{V_A - V_K}{R_K}$$

Lois des nœuds :

$$I_1 + I_2 + I_3 + \cdots . I_k = 0 \rightarrow \frac{V_A - V_1}{R_1} + \frac{V_A - V_2}{R_2} + \frac{V_A - V_3}{R_3} + \cdots .. \frac{V_A - V_K}{R_K} = 0$$

$$\rightarrow V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \frac{1}{R_k} \right) = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \cdots . \frac{V_K}{R_K}$$

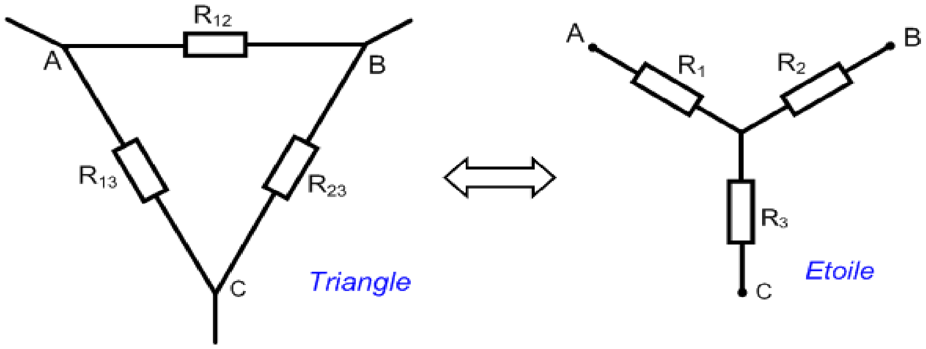
Soit finalement :

$$V_A = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \cdots . \frac{V_K}{R_K}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \frac{1}{R_k}}$$

Ou bien $$V_A = \frac{\sum \frac{V_i}{R_i}}{\sum \frac{1}{R_i}}$$

2.8 Théorème de Kennelly : ou transformation triangle $\longleftrightarrow$ étoile

C'est une transformation qui peut être utilisée pour simplifier des circuits qui comportent des dérivations complexes.



Une maille en étoile peut se transformer en maille triangle équivalente :

$$\boxed{R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}} \quad \boxed{R_{13} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}} \quad \boxed{R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}}$$

Une maille triangulaire peut se transformer en étoile équivalente :

$$\boxed{R_1 = \frac{R_{12} + R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}} \quad \boxed{R_2 = \frac{R_{12} + R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}} \quad \boxed{R_3 = \frac{R_{23} + R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}}$$