$L_2$ Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Départements de 2ème Année (GP–GM–GC–Mines)

® 2018–2019

# ✠–Examen Final de Probabilités et Statistiques–✠

**Exercice 1** (15.00 points) :

**Partie I :** Les notes obtenues par un groupe de candidats au concours de recrutement sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

| Notes obtenues | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Candidats | 5 | 10 | 7 | 11 | 16 | 14 | 20 | 5 | 3 | 9 |

1. Déterminer : la population et sa taille, l'individu, le caractère et sa nature.
2. Tracer le polygône des fréquences et déterminer le mode $M_o$.
3. Tracer la courbe des effectifs cumulés décroissants.
4. Déterminer la fonction de répartition de cette distribution et tracer son graphe.
5. Calculer la Médiane $M_e$, l'écart type $\sigma(X)$ et l'intervalle interquartile.
6. Déterminer le nombre de candidats ayant des notes comprises entre $\overline{X} - \sigma(X)$ et $\overline{X} + \sigma(X)$.

**Partie II :** Regrouper les données de la "Partie I" dans des classes d'amplitudes $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 2$, respectivement. Notons par 0 la borne inférieure de la première classe et par 10 la borne supérieure de la dernière classe.

1. Dresser le tableau statistique de la distribution.
2. Représenter graphiquement cette distribution et calculer le mode.
3. Déterminer la fonction de répartition de cette distribution et tracer son graphe.
4. Comment s'appelle la valeur $\theta$ de la variable $X$ telle que $F(\theta) = 1 - F(\theta)$, $F$ étant la fonction de répartition de $X$. Calculer $\theta$.
5. Calculer l'écart type $\sigma(X)$ et l'intervalle interquartile.
6. Quelle est la proportion de candidats dont les notes obtenues sont comprises dans l'intervalle $[6\ ;\ \ 7 + \sigma(X)[$.

**Exercice 2** (05.00 points) : Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5% des boites sont abîmées. Le gérant estime que 60% des boites abîmées contiennent au moins une clé USB défectueuse. 98% des boites non abîmées ne contiennent aucune clé USB défectueuse.

Soient les événements suivants $A$ : «la boite est abîmée» et $D$ : «la boite achetée contient au moins une clé USB défectueuse». Un client achète une boite du lot.

1. Calculer les probabilités suivantes : $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P(D/A)$, $P(\overline{D}/\overline{A})$, $P(D/\overline{A})$ et $P(\overline{D}/A)$.
2. Déduire la probabilité de l'événement $D$.
3. Le client constate qu'une des clés USB achetées est défectueuse. Qu'elle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abîmée.

**Une rédaction claire et rigoureuse est exigée**

*Bonne Chance*

Corrigé de l'examen de Probabilités et statistique

Ex 1

| partie 1 |: 1/ *) Population : les candidats
*) caractère étudié : Notes
*) Nature : Quantitative discrète, taille n = 100
→ Individu : 1 candidat.

(1,25)

(0,25) (0,25)

| $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ | $N_i$ ↓ | $N_i$ ↑ | $F_i$ ↓ | $F_i$ ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 0.05 | 100 | 5 | 1 | 0.05 |
| 1 | 10 | 0.10 | 95 | 15 | 0.95 | 0.15 |
| 2 | 7 | 0.07 | 85 | 22 | 0.85 | 0.22 |
| 3 | 11 | 0.11 | 78 | 33 | 0.78 | 0.33 |
| 4 | 16 | 0.16 | 67 | 49 | 0.67 | 0.49 |
| 5 | 14 | 0.14 | 51 | 63 | 0.51 | 0.63 |
| 6 | 20 | 0.20 | 37 | 83 | 0.37 | 0.83 |
| 7 | 5 | 0.05 | 17 | 88 | 0.17 | 0.88 |
| 8 | 3 | 0.03 | 12 | 91 | 0.12 | 0.91 |
| 9 | 9 | 0.09 | 9 | 100 | 0.09 | 1 |
| | n=100 | 1 | | | | |

c/ Le mode

Mo = 6, correspond au plus grand effectif. (0,25)

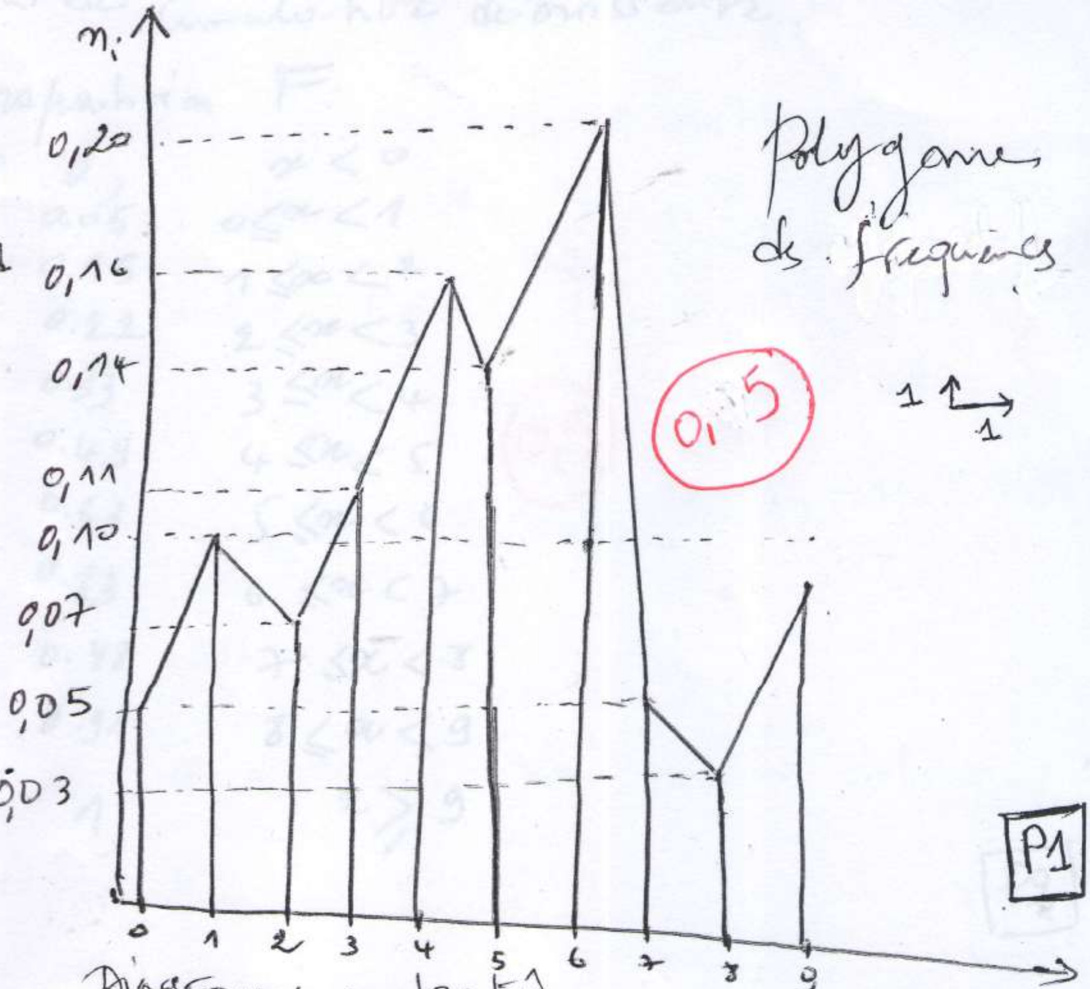
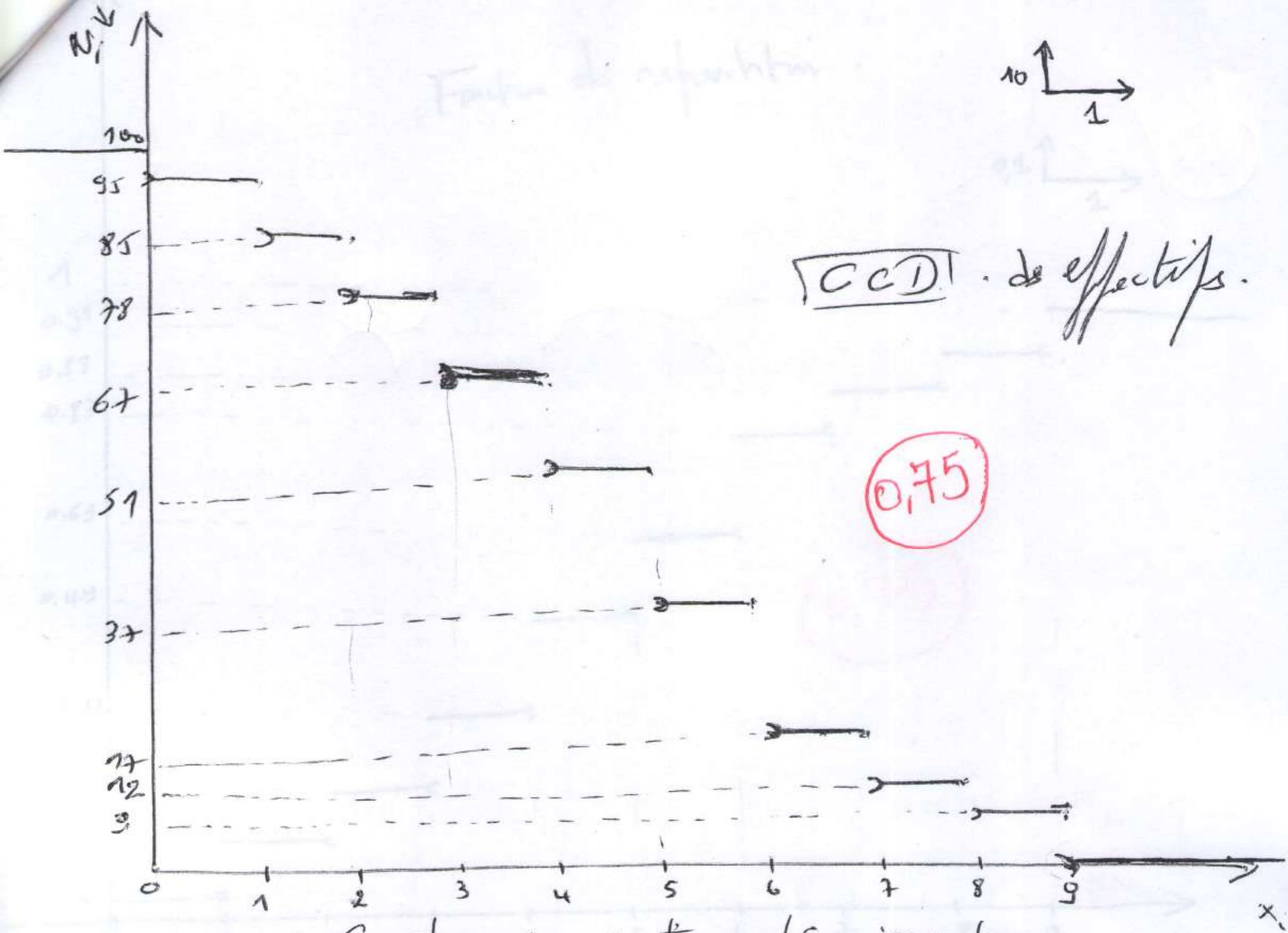



Diagramme en bâtons

P1




$\boxed{CCD}$ . de effectifs.

0,75

Courbe cumulative décroissante.

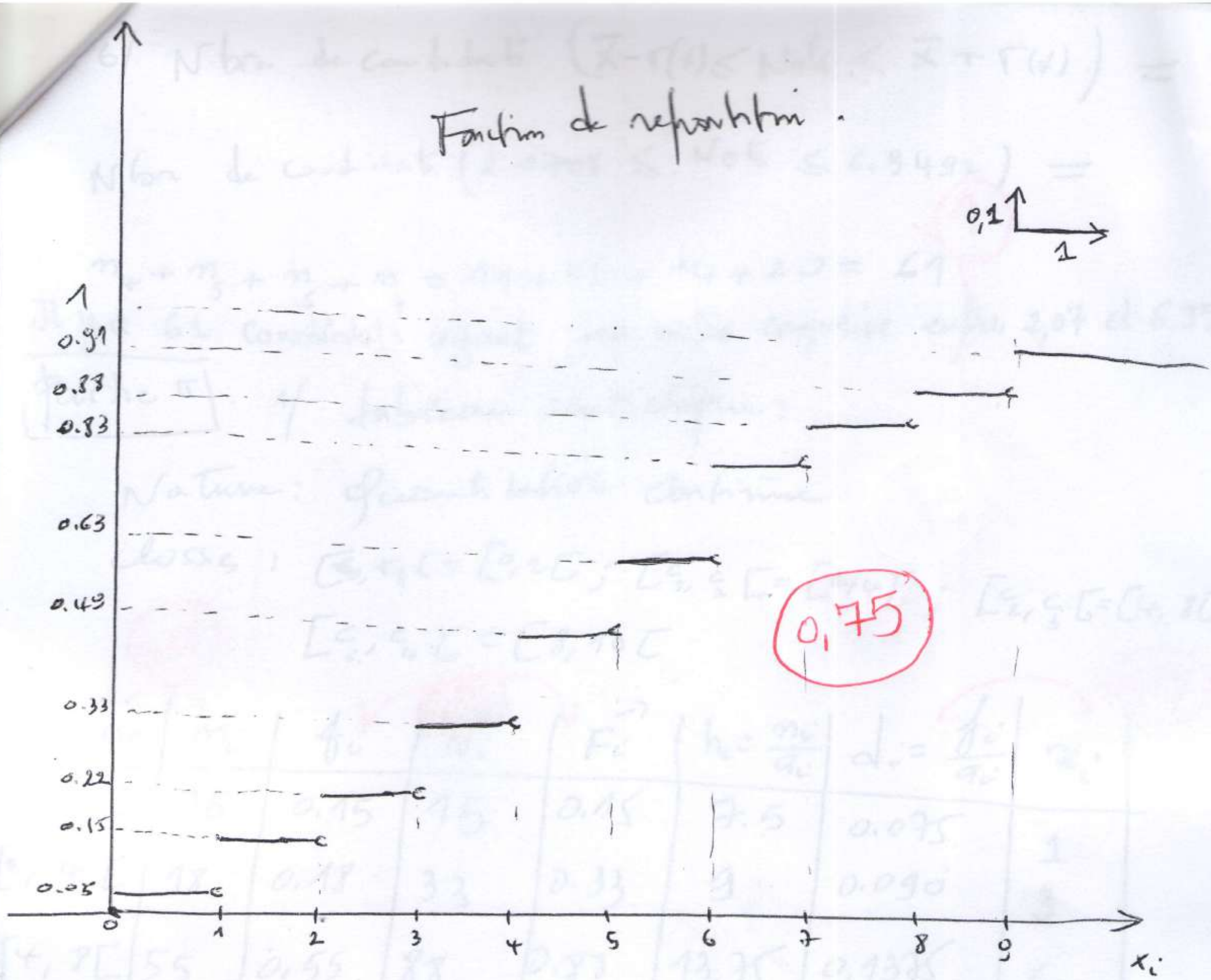
4/ Fonction de repartition F.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.05 & 0 \leq x < 1 \\ 0.15 & 1 \leq x < 2 \\ 0.22 & 2 \leq x < 3 \\ 0.33 & 3 \leq x < 4 \\ 0.49 & 4 \leq x < 5 \\ 0.63 & 5 \leq x < 6 \\ 0.83 & 6 \leq x < 7 \\ 0.88 & 7 \leq x < 8 \\ 0.91 & 8 \leq x < 9 \\ 1 & x \geq 9 \end{cases}$$

0,5

P2

Fonction de répartition.




5/ Médiane Me : on peut utiliser deux méthodes.

1ère Méthode : N = 100 pair ⇒ $M_e = \frac{x_{(N/2)} + x_{(\frac{N}{2}+1)}}{2} = \frac{5+5}{2} = 5$ 0,5

2ème Méthode : voir tableau, Me = 5.

Moyenne : $\bar{x} = \sum_{i=1}^{10} f_i x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} n_i x_i = \frac{451}{100} = 4.51$ 0,25

Variance : $V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{2629}{100} - 20.3401 = 5.9499$ 0,25

$\sigma(x) = 2.4392$ 0,25

IQ :

on a $Q_1 = 3$ 0,25 et $Q_3 = 6$ 0,25 (voir tableau statistique)

donc $Q_3 - Q_1 = 6 - 3 = 3$. 0,25

P3

6/ Nbre de candidats $(\bar{X}-\sigma(x) \leq \text{Note} \leq \bar{X}+\sigma(x))$ =

Nbre de candidats $(2.0708 \leq \text{Note} \leq 6.9492)$ =

$n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = 11 + 16 + 14 + 20 = 61$ 1

Il y a 61 candidats ayant des notes comprise entre 2,07 et 6,95.

Partie II. 1/ tableau statistique :

Nature : quantitative continue

classes : $[c_0, c_1[ = [0,2[$ ; $[c_1, c_2[ = [2,4[$ ; $[c_2, c_3[ = [4,8[$ ; $[c_3, c_4[ = [8,10[$

0,25 0,25 0,25

| classes | $n_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ | $h_i = \frac{n_i}{a_i}$ | $d_i = \frac{f_i}{a_i}$ | $x_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [0, 2[ | 15 | 0.15 | 15 | 0.15 | 7.5 | 0.075 | 1 |
| [2, 4[ | 18 | 0.18 | 33 | 0.33 | 9 | 0.090 | 3 |
| [4, 8[ | 55 | 0.55 | 88 | 0.88 | 13.75 | 0.1375 | 6 |
| [8, 10[ | 12 | 0.12 | 100 | 1 | 6 | 0.060 | 9 |
| | $n=100$ | 1 | | | | | |

2/

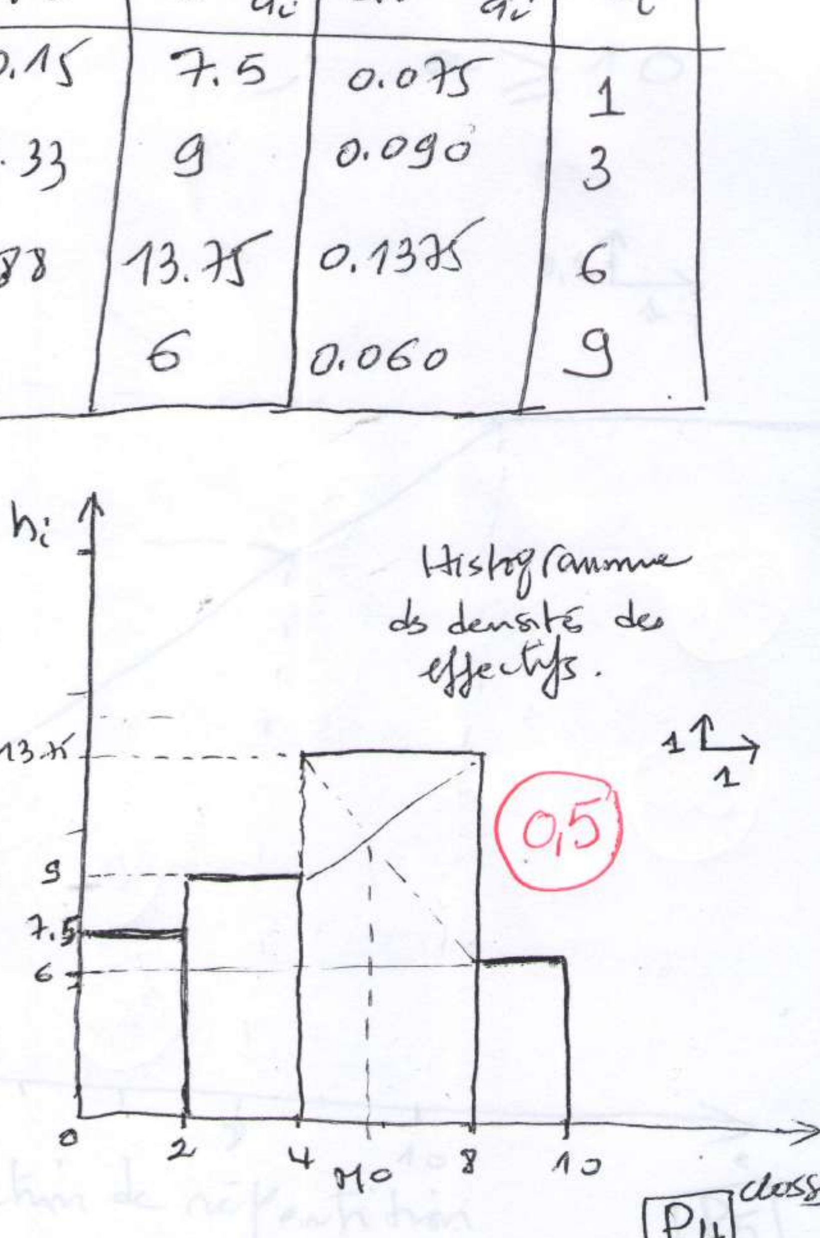
la classe modale est

la classe [4, 8[ 0,25

$$Mo = 4 + (8-4) \times \frac{(13.75-9)}{(13.75-9)+(13.75-6)}$$

$= 5.52$

0,5

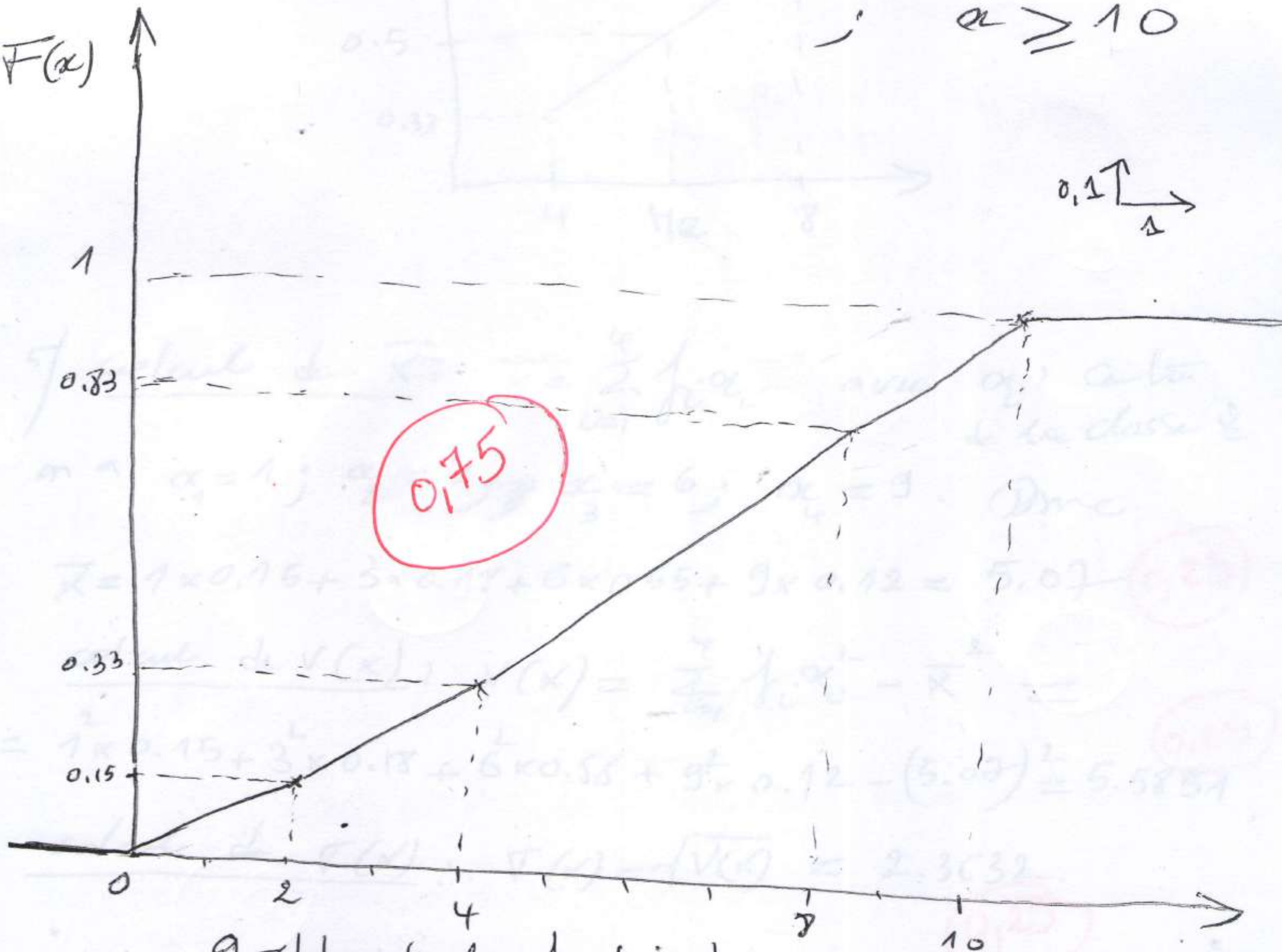


Fonction de répartition F et son graphe

calcul de F(x) :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0 + 0.15 \times \left(\frac{x-0}{2}\right), & 0 \leq x < 2 \\ 0.15 + 0.18 \times \left(\frac{x-2}{2}\right), & 2 \leq x < 4 \\ 0.33 + 0.55 \times \left(\frac{x-4}{4}\right); & 4 \leq x < 8 \\ 0.88 + 0.12 \times \left(\frac{x-8}{2}\right); & 8 \leq x < 10 \\ 1 ; & x \geq 10 \end{cases}$$

1



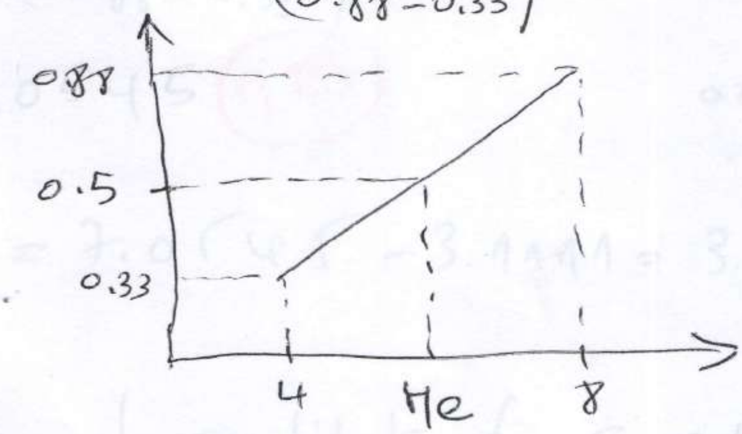

graphe de la fonction de répartition

on a $F(\theta) = 1 - F(\theta) \Rightarrow 2F(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$F(\theta) = \frac{1}{2}$. Donc $\theta$ est la mediane 0,25

calcul de $\theta = Me$ : on a la mediane en $[4, 8[$, donc $Me \in [4, 8[$. En 0,25

appliquant la formule de calcul de $Me$, on obtient $Me = 4 \times \left(\frac{0.5 - 0.33}{0.88 - 0.33}\right) + 4 = 5.23$ 0,25




5/ calcul de $\bar{X}$ : $\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} f_i x_i$ avec $x_i$ : centre de la classe $i$

on a $x_1 = 1$ ; $x_2 = 3$ ; $x_3 = 6$ ; $x_4 = 9$. Donc

$\bar{x} = 1 \times 0.15 + 3 \times 0.18 + 6 \times 0.55 + 9 \times 0.12 = 5.07$ 0,25

calcul de $V(x)$ : $V(x) = \sum_{i=1}^{4} f_i x_i^2 - \bar{x}^2 =$

$= 1^2 \times 0.15 + 3^2 \times 0.18 + 6^2 \times 0.55 + 9^2 \times 0.12 - (5.07)^2 = 5.5851$ 0,25

calcul de $\sigma(x)$ : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 2.3632$ 0,25

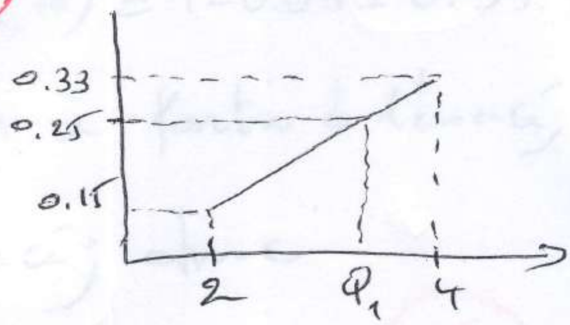
P6

Calcul de $Q_3 - Q_1$ :

calcul de $Q_1$ : on a $Q_1 \in [2, 4[$ ; donc 0,25

$$Q_1 = 2 \times \left(\frac{0.25 - 0.15}{0.33 - 0.15}\right) + 2$$

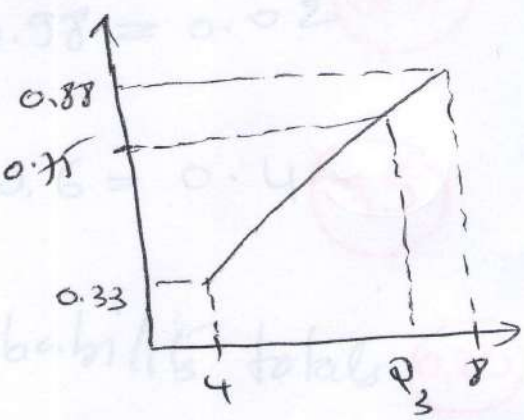
$= 3.1111$ 0,25




calcul de $Q_3$ : on a $Q_3 \in [4, 8[$ 0,25

$$Q_3 = 4 \times \left(\frac{0.75 - 0.33}{0.88 - 0.33}\right) + 4$$

$= 7.0545$ 0,25




Donc $Q_3 - Q_1 = 7.0545 - 3.1111 = 3.9434$ 0,25

6/ Proportion des candidats $(6 \leq \text{Note} < 7 + 2.3632)$

$= F(7 + 2.3632) - F(6) = F(9.3632) - F(6)$

$$= \left[0.88 + 0.12 \times \left(\frac{9.3632 - 8}{2}\right)\right] - \left[0.33 + 0.55 \times \left(\frac{6-4}{4}\right)\right]$$

$= 0.9616 - 0.605 = 0.3546$ 1

Donc, il y'a 35,46 % de candidats ayant obtenus une note comprise dans l'intervalle $[6 ; 9{,}36[$

Ex 2

1/ A partir de l'énoncé, on obtient directement

| $P(A) = 0.05$ 0,25 ; donc $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.05 = 0.95$. 0,5

| $P(D/A) = 0.6$ 0,25 s'obtient aussi à partir de l'énoncé,

| $P(\bar{D}/\bar{A}) = 0.98$ 0,25 d'après l'énoncé ; donc

$P(D/\bar{A}) = 1 - P(\bar{D}/\bar{A}) = 1 - 0.98 = 0.02$ 0,5

*) $P(\bar{D}/A) = 1 - P(D/A) = 1 - 0.6 = 0.4$ 0,5

2/ on utilise la formule des probabilités totales 0,25

car $(A, \bar{A})$ forment un système complet et D peut être causé par A ou $\bar{A}$, on a alors : 0,5

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap \bar{A}) = P(D/A) \times P(A) + P(D/\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

$$= 0.6 \times 0.05 + 0.02 \times 0.95 = 0.049$$ 0,75

3/ on utilise la règle de Bayes : 0,25

$$P(A/D) = \frac{P(D/A) \times P(A)}{P(D)} = \frac{0.03}{0.049} = \frac{3}{4.9} = 0.61.$$ 1