Chapitre 02

Architecture des Robots

Un robot manipulateur est constitué par deux sous-ensembles distincts, un (ou plusieurs) organes terminaux et une structure mécanique articulée

Les robots manipulateurs peuvent être classés en deux catégories : ceux qui ont une structure de chaîne cinématique ouverte et ceux qui ont une structure de chaîne cinématique fermée.

Le rôle de la structure mécanique articulée est d'amener l'organe terminal dans une situation (position et orientation) donnée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération données. Son architecture est une chaîne cinématique de corps généralement rigides, assemblés par des liaisons appelées articulations.

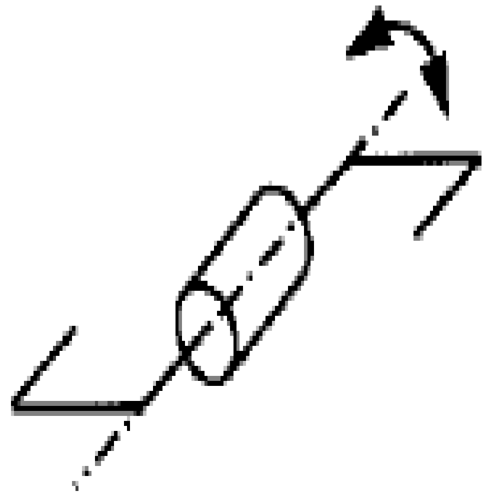
ARTICULATION

Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degrés de liberté de l'un par rapport à l'autre. Soit m le nombre de degrés de liberté résultant, encore appelé mobilité de l'articulation. La mobilité est telle que $0 \leq m \leq 6$.

Lorsque m=1, ce qui est le cas le plus fréquent en robotique, l'articulation est soit rotoïde, soit prismatique.

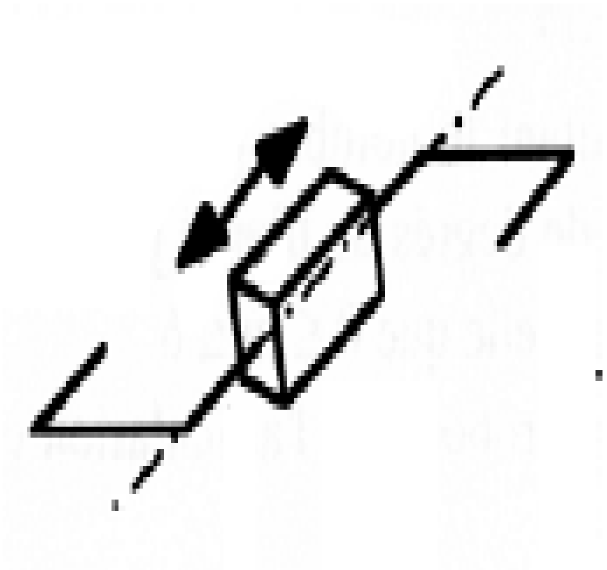
Articulation rotoïde

Il s'agit d'une articulation de type pivot réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe qui leur est commun. La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe.



Articulation prismatique

Il s’agit d’une articulation de type glissière réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d’un axe commun. La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance le long de cet axe



ESPACE ARTICULAIRE

L'espace articulaire d'un robot est celui dans lequel est représentée la situation de tous ses corps. La solution la plus simple consiste à utiliser les variables ou coordonnées articulaires. L'espace de ces variables, noté IR^q, est appelé aussi espace des configurations. Sa dimension N est égale au nombre de variables articulaires indépendantes et correspond au nombre de degrés de liberté de la structure mécanique. Dans une structure ouverte (simple ou arborescente), les variables articulaires sont généralement indépendantes, tandis qu'une structure fermée impose nécessairement des relations entre ces variables.

Sauf mention particulière, on considère dans la suite qu'un robot à N degrés de liberté dispose de N articulations motorisées

ESPACE OPERATIONNEL

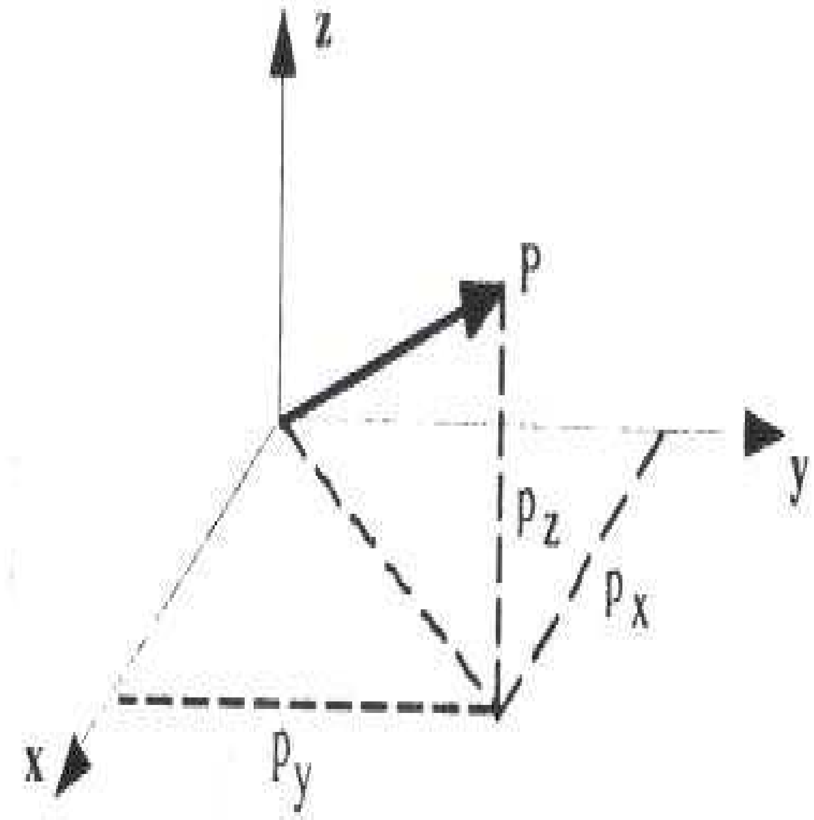
L'espace opérationnel est celui dans lequel est représentée la situation de l'organe terminal (on considère donc autant d'espaces opérationnels qu'il y a d'organes terminaux). La solution la plus simple consiste à utiliser les coordonnées cartésiennes dans IR^3 pour la position et le groupe SO(3) des rotations propres de IR^3 pour l'orientation. On note IR^X l'ensemble de ces deux espaces, égal à IR^3 x SO(3). On remarquera que l'espace opérationnel n'est pas un espace vectoriel. La dimension M de IR^X constitue le nombre de degrés de liberté maximum que peut avoir l'organe terminal et est au nombre de paramètres nécessaires pour décrire la situation de l'organe terminale dans l'espace. Dans l'espace tridimensionnel ce nombre est de six (trois pour placer un point du corps en un point quelconque de cet espace et trois pour orienter ce corps de façon quelconque) . On peut donc en conclure que $M \leq 6$ et $M \leq N$.

LES NOTATIONS ET LES OUTILS MATHEMATIQUES MIS EN ŒUVRE POUR LA MODELISATION DES ROBOTS

En robotique, on associe à tout élément du poste de travail un ou plusieurs repères. Ces repères sont généralement définis de telle sorte que leurs axes et leurs origines correspondent respectivement à des directions et à des points privilégies ayant un rôle fonctionnel lors de l'exécution de la tache.

Représentation d'un point

Soit P un point de coordonnées cartésiennesP_x, P_y et P_z. On appelle coordonnées homogènes du point P les termes$w.P_x$, $w.P_y$ et $w.P_z$, et w où w est un facteur d'échelle, égal à 1 en robotique. On représente alors les coordonnées homogènes d'un point par le vecteur:



$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Représentation d'une direction

La représentation d'une direction (vecteur libre) se fait aussi par quatre composantes, mais laquatrième est nulle, indiquant un point à l'infini. Si l'on note u_x, u_y et u_z les coordonnées cartésiennes d'un vecteur unitaire u, en coordonnées homogènes on écrit :

$$u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Représentation d'un plan

Le plan $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ est représenté par un vecteur ligne Q :

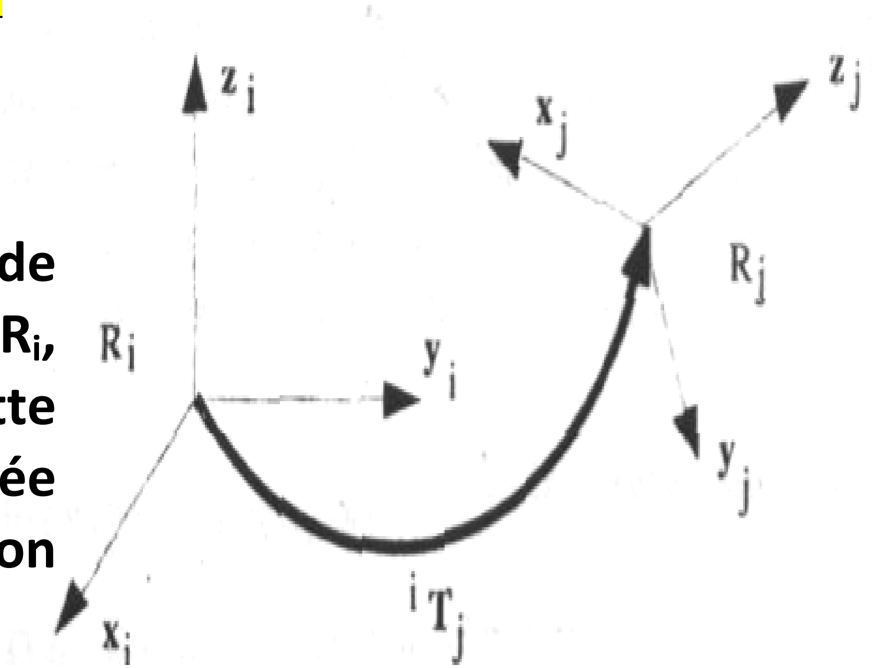
$$Q=[\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta]$$

Pour tout point p appartenant au plan Q, le produit matriciel QP est nul :

$$QP=[\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta]\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}=0$$

Transformation des repères

Faisons subir une transformation quelconque, de translation et/ou de rotation au repère R_i, transformation qui l'amène sur le repère R_j. Cette transformation est définie par la matrice ${}^iT_j$ appelée matrice de transformation homogène de dimension (4x4).



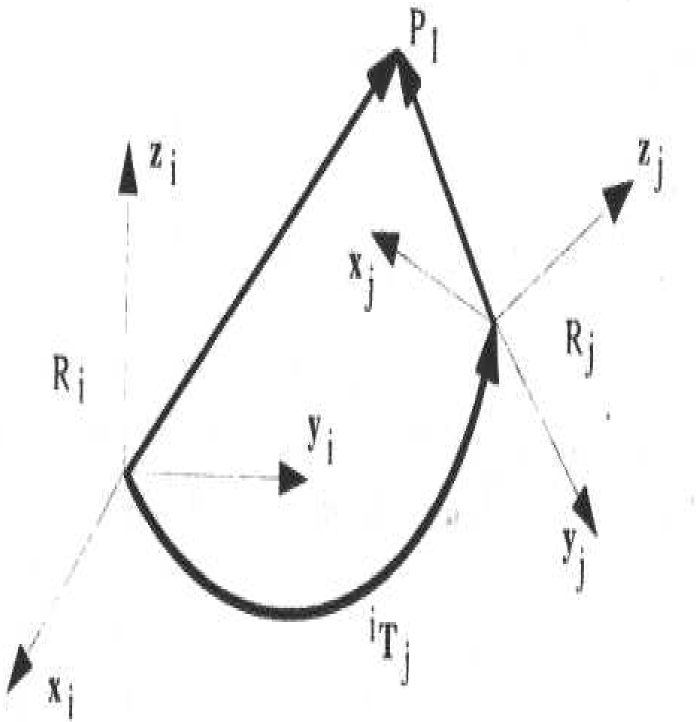
Où ${}^i s_j$, ${}^i n_j$ et ${}^i a_j$ désignent respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes X_j,$Y_j$et $Z_j$du repère R_j exprimés dans le repère R_i et où ${}^iP_j$ est le vecteur exprimant l'origine de repère R_j dans le repère le repère R_i.

$$
{}^iT_j = \left[{}^is_j \quad {}^in_j \quad {}^ia_j \quad {}^ip_j \right] = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Transformation des vecteurs

Soit un vecteur ${}^jT_1$ définissant le point P_1 dans le repère R_j. Compte tenu de la définition des coordonnées homogènes, on calcule les coordonnées du point P_1 dans le repère R_i; grâce à l'équation suivante :

$$ {}^i p_1 = {}^i(o_i p_1) = {}^i s_j \, {}^j p_{1x} + {}^i n_j \, {}^j p_{1y} + {}^i a_j \, {}^j p_{1z} + {}^i p_j = {}^i T_j \, {}^j p_1 $$



La matrice ${}^iT_j$ permet donc d'exprimer dans le repère R_i les coordonnées d'un point donné dans le repère R_j.

Transformation des plans

La position relative d'un point par rapport à un plan est indépendante des transformations appliquée à l’ensemble (point, plan).Ainsi :

$$ {}^{j}Q\ {}^{j}P = {}^{i}Q\ {}^{i}P = {}^{i}Q\ {}^{i}T_{j}\ {}^{j}P $$

Matrice de Transformation de translation pure

Soit $Trans\,(a,b,c)$cette transformation, où a, bet c désignent les composantes de la translation le long des axes x, y et z respectivement. L'orientation étant conservée dans cette transformation.

$$^{i}T_{j} = Trans\,(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans\,(a,b,c) = Trans\,(x,a)Trans\,(y,b)Trans\,(z,c)$$

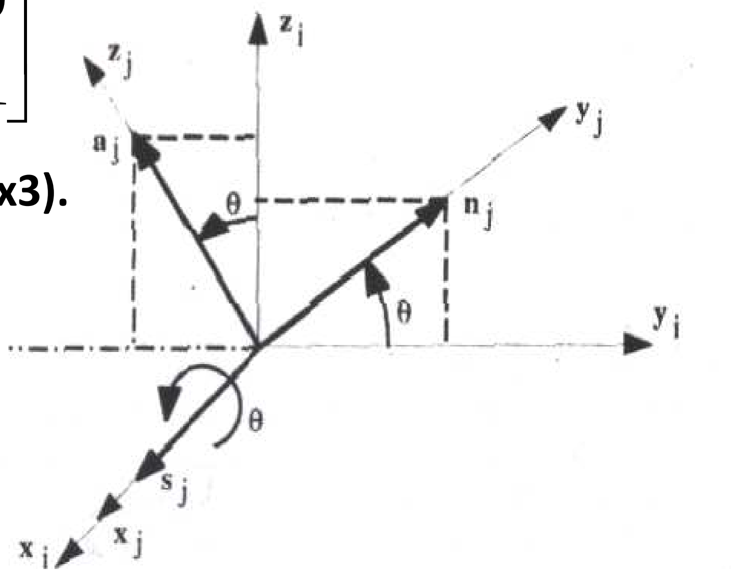
Matrice de transformation de rotation autour des axes principaux

Matrice de transformation correspondant à une rotation θ autour l'axe x

$$^{i}T_{j} = Rot(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & rot(x,\theta) & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rot(x, θ***)*** **désignant la matrice d'orientation de dimension (3x3).**

$$C\theta = \cos\theta \quad ; \qquad S\theta = \sin\theta$$



Matrice de transformation correspondant à une rotation θ autour l'axe y

$$
{}^{i}T_{j} = Rot(y,\theta) = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & rot(y,\theta) & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

rot(y, θ***)*** **désignant la matrice d'orientation de dimension (3x3).**

Matrice de transformation correspondant à une rotation θ autour l'axe z

$$
{}^{i}T_{j} = Rot(z,\theta) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & rot(z,\theta) & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

rot(z, θ***)*** **désignant la matrice d'orientation de dimension (3x3).**

Proprietés des matrices de transformation homogène

On vérifie aisément que :

$$Rot^{-1}(u,\theta) = Rot(u,-\theta) = Rot(-u,\theta)$$

$$Trans^{-1}(u,d) = Trans(-u,d) = Trans(u,-d)$$

Proprietés des matrices de transformation homogène

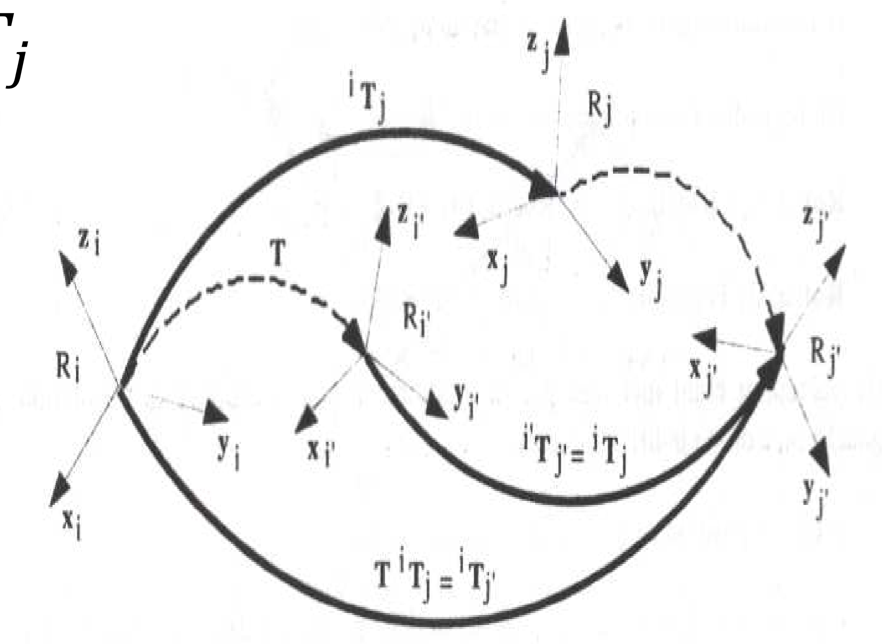
Si un repère R_o a subi k transformations consécutives et si chaque transformation i, (i=1, ..., k), est définie par rapport au repère courant R_{i-1} ; alors la transformation ${}^{0}T_{k}$ peut être déduite de la composition des multiplications à droite de ces transformations :

$$ {}^{0}T_{k} = {}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3}\ldots\ldots{}^{k-1}T_{k} $$

Proprietés des matrices de transformation homogène

Si un repère R_j défini dans le repère R_i par la transformation ${}^{i}T_{j}$ subit une transformation T exprimée dans le repère R_i, le repère R_j se transforme en $R_{j'}$ avec :

$$ {}^{i}T_{j'} = T \ {}^{i}T_{j} $$



A partir des deux derniers propriétés, on déduit que :

- **Une multiplication à droite de la transformation ${}^{i}T_{j}$ signifie que la transformation est faite par rapport au repère courant Rj ;**
- **une multiplication à gauche signifie que la transformation est faite par rapport au repère Ri.**