1° année MI Examen d'Analyse 1 Le 07 février 2013

Durée: 2^{h} **Calculatrice non autorisée**

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements influent sur la notation

Exercice I
On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 & = & 0, \\ U_{n+1} & = & \sqrt{2U_n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant U_n \leqslant 3$.

2) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

3) En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice II
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{e^x+1} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \alpha x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction f est - elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice III

1) Écrire la formule de MacLaurin avec le reste de Lagrange pour la fonction $f(x) = e^x$ à l'ordre n.

2) Montrer que

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e}{(n+1)!}$$

3) En déduire la limite de la suite

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Exercice IV
On considère la fonction définie sue $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{e^x\sqrt{1+x} - \cos^2 x}{x}$$

1) Écrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f.

2) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0, noté g.

3) Montrer que g est dérivable en 0.

4) Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - \frac{3}{2}}{\ln(1+x)}$$

Correction de l'exercice I
Soit

$$\begin{cases} U_0 &= 0, \\ U_{n+1} &= \sqrt{2U_n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Raisonnement par récurrence
Pour $n = 0, \quad 0 \leqslant U_0 = 0 \leqslant 3$, la propriété est vraie.
Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant U_n \leqslant 3$, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant 3$.
On a :

$$0 \leqslant U_n \leqslant 3 \Rightarrow 3 \leqslant 2U_n+3 \leqslant 9 \Rightarrow \sqrt{3} \leqslant \sqrt{2U_n+3} \leqslant 3 \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{3} \leqslant U_{n+1} \leqslant 3$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N} : \quad 0 \leqslant U_n \leqslant 3$.

2) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente, c'est à dire

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ avec } f([0,3]) = [0,3]$$

On peut donc définir la fonction f comme suit

$$\begin{aligned} f : \ [0,3] &\longrightarrow \ [0,3] \\ x &\longmapsto \ f(x) = \sqrt{2x+3} \end{aligned}$$

L'étude de la monotonie de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ revient à l'étude de la monotonie de f.
On a f est une fonction strictement croissante sur $[0,3]$ car $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0, \forall x \in [0,3]$
De plus, $U_1 - U_0 = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3} > 0$, alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
D'où la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,3]$.

3) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3, donc elle est convergente.
Posons $l = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$, le calcul de cette limite revient à la résolution de l'équation $f(l) = l$

$$f(l) = l \Longleftrightarrow \sqrt{2l+3} = l \Longleftrightarrow 2l+3 = l^2 \Longleftrightarrow l^2 - 2l - 3 = 0$$

L'équation du second degré obtenue admet deux racines $l_1 = -1$ et $l_2 = 3$, la première racine $l_1 = -1 \notin [0,3]$, par contre $l_2 = 3 \in [0,3]$, donc

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 3$$

Correction de l'exercice II
Soit la fonction f

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{e^x+1} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \alpha x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Où $\alpha \in \mathbb{R}$, est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1) Continuité de f sur $\mathbb{R}$:

- Si $x \leqslant 0, f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ est continue sur $]-\infty, 0]$ (rapport de deux fonctions continues).
- Si $x > 0, f(x) = \alpha x$ est continue sur $]0, +\infty[, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (fonction polynômiale).
- Si $x = 0$, on a

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x-1}{e^x+1} = 0 = f(0) \text{ et } \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \alpha x = 0 = f(0), \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0), \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Alors f est continue en 0.

D'où la continuité de f sur $\mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2) Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

- Si $x \leqslant 0, f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est dérivable sur $]-\infty, 0]$ (rapport de deux fonctions dérivables).
- Si $x > 0, f(x) = \alpha x$ est dérivable sur $]0, +\infty[, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (fonction polynômiale).
- Si $x = 0$, on a

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x - 1}{x} \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha$$

Donc $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, donc f est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

On déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

3) La fonction dérivée f' est définie par

$$\begin{aligned} f' : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $x \leqslant 0, f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ est continue sur $]-\infty, 0]$ (rapport de deux fonctions continues).
- Si $x > 0, f'(x) = \dfrac{1}{2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (fonction constante).
- Si $x = 0$, on a

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{1}{2} = f'(0) \text{ et } \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0)$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$. Alors f' est continue en 0.

D'où la continuité de f' sur $\mathbb{R}$. Donc f est - elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice III

1) La formule de MacLaurin avec le reste de Lagrange à l'ordre n pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ et de dérivée énième dérivable est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \forall x \in \mathbb{R}, 0 < \theta < 1,$$

Appliquée à la fonction $f(x) = e^x$, on obtient

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < \theta < 1 \qquad (1)$$

2) Montrer que

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e}{(n+1)!}$$

On a pour $x = 1$ dans la formule (1) précédente

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \Longrightarrow e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, 0 < \theta < 1$$

D'autre part, on a

$$0 < \theta < 1 \Longrightarrow 1 < e^{\theta} < e \Longrightarrow 0 < \frac{1}{(n+1)!} < \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$$

Donc

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}$$

C'est à dire

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e}{(n+1)!}$$

3) D'après la question précédente, on a

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!}$$

Passage à la limite

$$0 < \lim_{n \to +\infty} \left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) < \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{e}{(n+1)!} \right) = 0$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) = 0$$

On déduit la limite de la suite

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

Correction de l'exercice IV

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{e^x \sqrt{1+x} - \cos^2 x}{x}$$

1) Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f.
On cherche tout d'abord le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $e^x \sqrt{1+x} - \cos^2 x$.

$$\left\| \begin{array}{lcl} e^x & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \sqrt{1+x} & = & 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3) \end{array} \right.$$

Donc

$$e^x \sqrt{1+x} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7x^2}{8} + \frac{17x^3}{48} + o(x^3)$$

Et

$$\left\| \begin{array}{lcl} \cos x & = & 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3) \\ \cos^2 x & = & 1 - x^2 + o(x^3) \end{array} \right.$$

Donc
$$e^x\sqrt{1+x}-\cos^2 x = \frac{3}{2}x+\frac{15}{8}x^2+\frac{17}{48}x^3+o(x^3)$$
D'où, en divisant par x suivant les puissances croissantes
$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{15}{8}x+\frac{17}{48}x^2+o(x^2)$$

2) On a
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}+\frac{15}{8}x+\frac{17}{48}x^2+o(x^2)\right)=\frac{3}{2}$$
Donc f admet un prolongement par continuité en 0, le prolongement noté g, est défini par
$$\begin{array}{rll} g: & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto g(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x\sqrt{1+x}-\cos^2 x}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ \dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x=0 \end{cases}\end{array}$$

3) Dérivabilité de g en 0 :
$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{3}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{15}{8}x+\frac{17}{48}x^2+o(x^2)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{15}{8}+\frac{17}{48}x+o(x)\right) \\ &= \frac{15}{8}\end{aligned}$$
D'où la dérivabilité de g en 0

4) On a les développements limités à l'ordre 1 suivants
$$\left\| \begin{array}{lcl} g(x)-\dfrac{3}{2} &=& f(x)-\dfrac{3}{2}=\dfrac{15}{8}x+o(x) \\ \ln(1+x) &=& x+o(x)\end{array}\right.$$
Donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\frac{3}{2}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{15}{8}x+o(x)}{x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{15}{8}+o(1)}{1+o(1)}=\frac{15}{8}\ \textbf{où}\ \lim_{x\to 0}o(1)=0$$