Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE M'Hamed BOUGARA –BOUMERDES
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT D'INFORMATIQUE

Nature de l'examen : ETLD	**Matière** : Logique Mathématique
Durée : 1h30	**Filière** : L2 (LI/TechWeb)
Année Universitaire : 2015/2016	**Date** : 01/03/2016

Question de cours : (3 pts)

Soient les connecteurs| et ↓ définis par la table ci-contre :

p	q	$p \downarrow q$	$p \mid q$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Démontrez que les seuls connecteurs qui forment à eux seuls un ensemble complet de connecteurs sont | et ↓.

Exercice 1 : (4 pts)

Trois amis, Ahmed, Bilal et Chahine déjeunent ensemble chaque jour. Les affirmations suivantes sont vraies :

a) Si Ahmed commande un dessert, Bilal en commande un aussi.

b) Chaque jour, soit Bilal, soit Chahine, mais pas les deux, commandent un dessert.

c) Ahmed ou Chahine, ou les deux, commandent chaque jour un dessert.

d) Si Chahine commande un dessert, Ahmed fait de même.

1. Traduisez les énoncés précédents en formules de la logique des propositions. (Donnez aussi l'interprétation des propositions utilisées. Exemple :Nadia mange un gâteau : N).
2. Que peut on en déduire sur qui commande un dessert ?
3. Pouvait-on arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre affirmations ?

Exercice 2 : (4 pts)

Soit les deux séquents :

1) $p, \neg q \vdash \neg(p \Rightarrow q), \neg q \Rightarrow r$

2) $\vdash(((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg p \vee q)) \Rightarrow p$

- **a)** Construire une preuve de chaque séquent.
- **b)** Les séquents sont-ils valides ? justifier votre réponse.

Exercice 3 : (6 pts)

Dites si les formule suivantes sont des tautologies, des contradictions ou simplement des formules satisfaisables en utilisant deux méthodes différentes vues en cours :

- **a)** $(p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (r \vee \neg p)$.
- **b)** $\neg p \vee q \Leftrightarrow p \Rightarrow \neg q$
- **c)** $((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \Rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$

Exercice 4 : (3 pts)

Démontrer que les propositions suivantes sont des théorèmes en utilisant le théorème de déduction :

- $\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$
- $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C))$
- $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$

Rappel : Axiome et règles d'inférence du calcul des séquents :

(Axiome) $X \vdash X$.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, X}{\Gamma, \neg X \vdash \Delta} \ (\neg - gauche) \qquad \frac{\Gamma, X \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg X} \ (\neg - droit)$$

$$\frac{\Gamma, X, Y \vdash \Delta}{\Gamma, X \wedge Y \vdash \Delta} \ (\wedge - gauche) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, X \quad \Gamma \vdash \Delta, Y}{\Gamma, \vdash \Delta, X \wedge Y} \ (\wedge - droit)$$

$$\frac{\Gamma, X \vdash \Delta \quad \Gamma, Y \vdash \Delta}{\Gamma, X \vee Y \vdash \Delta} \ (\vee - gauche) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, X, Y}{\Gamma \vdash \Delta, X \vee Y} \ (\vee - droit)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, X \qquad \Gamma, Y \vdash \Delta}{\Gamma, X \rightarrow Y \vdash \Delta} \ (\rightarrow -gauche) \qquad \frac{\Gamma, X \vdash \Delta, Y}{\Gamma \vdash \Delta, X \rightarrow Y} \ (\rightarrow -droit)$$