EMD Rattrapage ANALYSE 1

Septembre 5, 2006

Le Corrigé

Exercice 1. *Etude de la continuité, la dérivabilité et la continuité de la dérivée :*

1. *La fonction f*

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \quad \textit{est définie sur } \mathbb{R}$$

   <u>Continuité :</u> $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) \;=\; \lim\limits_{x \mapsto 0} \sin(\frac{1}{x}) \;=\; \nexists$ *à prouver en utilisant la définition*

   Donc f n'est pas continue en 0, d'ou f est continue sur $\mathbb{R}^*$

   <u>Dérivabilité de f :</u> *f n'est pas continue en $x = 0$ donc elle n'est pas dérivable en 0*

   f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $f'(x) = -(\frac{1}{x^2})\cos(\frac{1}{x})$

   <u>Continuité de f' :</u> *La fonction f'*

   $f' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

   $x \mapsto f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})$ *est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.*

2. *La fonction f*

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \quad \textit{est définie sur } \mathbb{R}$$

   <u>Continuité :</u> $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) \;=\; \lim\limits_{x \mapsto 0} x\sin(\frac{1}{x}) \;=\; 0 \;=\; f(0)$

   f est continue en 0, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$

   <u>Dérivabilité de f :</u> *f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $f'(x) = \sin(\frac{1}{x}) - (\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x})$*

   Dérivabilité en $x = 0$: $\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \;=\; \lim\limits_{x \mapsto 0} \sin(\frac{1}{x}) \;=\; \nexists$

   f n'est pas dérivable en $x = 0$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

   <u>Continuité de f' :</u> *La fonction f'*

   $f' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

   $x \mapsto f'(x) = \sin(\frac{1}{x}) - (\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x})$ *est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.*

3. *La fonction f*

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \quad \textit{est définie sur } \mathbb{R}$$

<u>Continuité :</u> $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x) \;=\; \lim\limits_{x\mapsto 0} x^2\sin(\frac{1}{x}) \;=\; 0 \;=\; f(0)$
f est continue en 0, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$
<u>Dérivabilité de f :</u> *f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$*
Dérivabilité en $x=0$, $\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \;=\; \lim\limits_{x\mapsto 0} x\sin(\frac{1}{x}) \;=\; 0$
Donc f est dérivable en $x=0$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$
<u>Continuité de f' :</u> *La fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \qquad 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en $x=0$, du moment que : $\lim\limits_{x\mapsto 0} f'(x) \;=\; \lim\limits_{x\mapsto 0} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \;=\; \nexists$.
Donc f' est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2. *1. Prolongement par continuité de $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ en $x=0$.*

$$\lim_{x\mapsto 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\mapsto 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x}} = 1$$

D'ou f est prolongeable par continuité en o en une fonction g définie par :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

2. Le DL de f en 0 à l'ordre 2 s'écrit :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$$

Avec :
$a_0 = \lim\limits_{x\mapsto 0} f(x) = g(0) = 1$, $a_1 = \lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = -\frac{1}{2}$ *et* $a_2 = \lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x} = \frac{1}{4}$
D'où :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

3. La dérivée de la fonction g est définie comme suit :

$$g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g'(x) = \begin{cases} f'(x) = \left(-\frac{\ln(\cos x)}{x^2} - \frac{\sin x}{x\cos x}\right)(\cos x)^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Exercice 3. $\alpha \geq 0$ *et* $S_n(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$.

1. $|S_{2n}(1) - S_n(1)| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n\underbrace{\left[\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}\right]}_{n \text{ fois}} = 1/2$

D'ou $\exists\varepsilon = 1/2$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p = 2n, \exists q = n : p \leq n \text{ et } q \leq n \text{ et } |S_p - S_q| \leq 1/2$
La suite $S_n(1)$ ne vérifie pas le critère de Cauchy donc elle est divergente.

2. *On a :* $\forall\alpha \in [0,1] : 1 \leq 1, \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^\alpha}, \cdots, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$
En sommant, on obtient : $S_n(1) \leq S_n(\alpha)$
$S_n(1)$ *est une suite croissante et divergente donc elle n'est pas bornée (majorée), elle admet comme limite :*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} S_n(1) = +\infty$$

D'où

$$\lim_{n\mapsto+\infty} S_n(1) \leq \lim_{n\mapsto+\infty} S_n(\alpha) = +\infty$$

Donc la suite $S_n(\alpha)$ *est divergente.*

3. *On applique le TAF à la fonction :* $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ *sur l'intervalle* $[x, x+1]$
$f(t)$ *verifie les critères du TAF (continuité et dérivabilité), donc :*

$$\forall t \in [x, x+1], \exists c_x \in]x, x+1[: \ \frac{1}{(x+1)^\alpha} - \frac{1}{x^\alpha} = -\frac{\alpha}{c_x^{\alpha+1}}$$

C'est à dire $\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(x+1)^\alpha} = \frac{\alpha}{c_x^{\alpha+1}}$
D'autre part :

$$x < c_x < x+1 \Rightarrow x^{(\alpha+1)} < c_x^{\alpha+1} < (x+1)^{\alpha+1} \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^{\alpha+1}} < \frac{1}{c_x^{\alpha+1}} < \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

En multipliant par $\alpha > 0$*, on obtient :*

$$\frac{\alpha}{(x+1)^{\alpha+1}} < \frac{\alpha}{c_x^{\alpha+1}} < \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

D'ou :

$$\frac{\alpha}{(x+1)^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(x+1)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

4. *En remplaçant* x *par* $1, 2, \cdots, n$ *et en sommant les inégalités, on aura :*

$$\alpha \left[\frac{1}{2^{\alpha+1}} + \frac{1}{3^{\alpha+1}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\right] \leq 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \alpha S_n^{\alpha+1}$$

$$-\alpha + \alpha S_n(\alpha+1) \leq 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \alpha S_n^{\alpha+1}$$

De la première inégalité on tire :

$$S_n(\alpha+1) \leq \frac{1}{\alpha}\left[\alpha + (1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha})\right] \leq 1 + \frac{1}{\alpha}$$

D'ou $S_n(\alpha+1)$ *est une suite croissante et majorée par* $(1+\frac{1}{\alpha})$ *donc elle est convergente* $\forall\alpha > 0$*, on déduit que* $S_n(\alpha)$ *est une suite convergente* $\forall\alpha > 1$