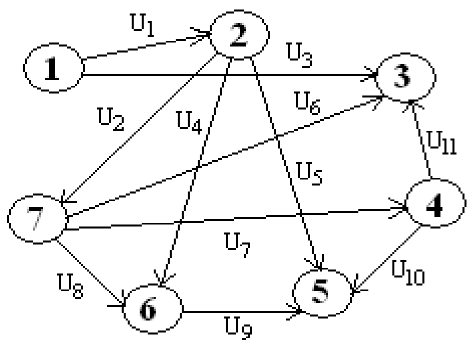
Université A/Mira de Béjaia Date : 21/02/2012
Département d'Informatique
3^e année Licence Académique (2011/2012).

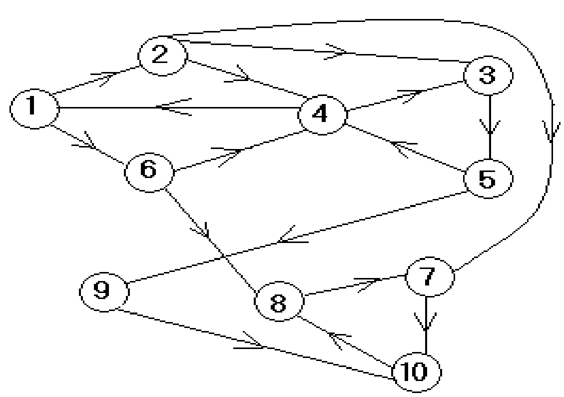
Examen de Théorie des Graphes
Durée 2h00

Exercice 1. (7,5 pts) Considérons le graphe $G = (X, U)$ de la figure suivante :



1. Déterminer la matrice d'adjacence associée au graphe G.
2. Dresser un tableau désignant les successeurs, les prédécesseurs, les voisins, le degré extérieur, le degré intérieur et le degré de chaque sommet.
3. Le graphe est-il réflexif, antisymétrique, transitif, complet ? Justifier.
4. Le graphe G possède t-il des circuits ? Justifier
5. Déterminer les niveaux du graphe G.
6. Le graphe G admet il un noyau ? Justifier. Déterminer le s'il existe.
7. Déterminer un arbre maximal de G, la base de cycles et la base de cocycles associées.

Exercice 2. (4,5 pts) Soit G le graphe suivant :



1. Vérifier si les ensembles suivants sont des cocycles
   - $\Omega_1 = \{(1, 2), (6, 4), (7, 10), (5, 4), (2, 7)\}$
   - $\Omega_2 = \{(1, 2), (6, 4), (5, 9), (6, 8), (7, 10), (10, 8)\}$

Si Ω_2 n'est pas un cocycle, quel est l'arc qu'il lui faut ajouter pour qu'il soit un cocycle ? Justifier.

2. Déterminer le cocycle $\omega(A)$ engendré par la partie $A = \{4, 5, 7, 8, 10\}$. Est-il élémentaire ? Justifier.

3. Ce graphe est-il fortement connexe ? Si non déterminer ses différentes composantes fortement connexes et donner son graphe réduit.

Exercice 3. (08 pts) Soit $R = (X, U, d)$ un réseau. Considérons l'algorithme suivant :

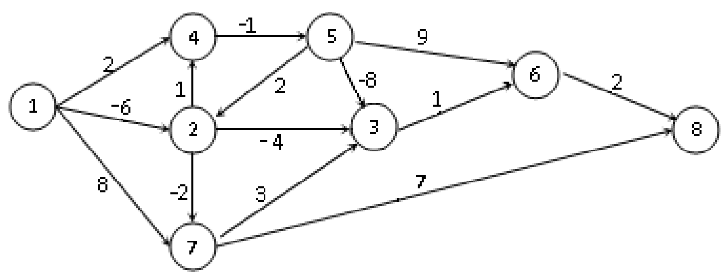
(0) Déterminer un graphe partiel $A = (X, V)$ du réseau donné R qui soit une arborescence de racine s (on peut utiliser l'algorithme de Dijkstra pour l'obtenir) ;

(1) Tester s'il existe un arc $u = (x, y) \in U \backslash V$ qui vérifie $\delta_u = \Pi(y) - \Pi(x) - d(x, y) > 0$; (On rappelle que Π est l'application définie : $X \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à chaque sommet $x \in X$ son potentiel $\Pi(x)$ qui représente la plus courte distance de s à x.)
- Si oui, aller en (2)
- Si non, terminer A est optimale.

(2) Tester si $A \cup \{u\}$ contient un circuit ;
- Si oui, terminer ce circuit est absorbant.
- Si non, aller en (3) ;

(3) Chercher un arc $v \in V$ tel que $T(v) = y$.
Soit $D(z) = \{z \in X : z = y$ ou z est un descendant de y dans A$\}$.
Poser $A = A \cup \{u\} \backslash \{v\}$ et $\Pi(z) = \Pi(z) - \delta_u,\ \forall\ z \in D(z)$, aller en (1) ;

1. Que fait cet algorithme ? Comparer son principe à celui de Bellman et de Dijkstra. Considérons le réseau suivant :



2. Vérifier si les problèmes de cheminement possèdent des solutions.

3. Peut-on utiliser l'algorithme de Bellman ?

4. Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour obtenir une solution réalisable.

5. Cette solution est-elle optimale ? sinon utiliser l'algorithme ci-dessus pour déterminer une solution optimale.

$*$ *Afud igerrzen* $*$ *Bon courage* $*$