Université Kasdi Merbah, Ouargla
Département d'Informatique et TI

Année universitaire : 2017-2018
Module : Théorie des graphes

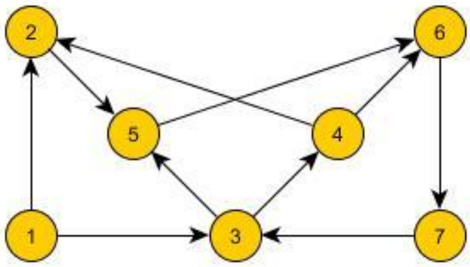
Corrigé-type de l'épreuve semestrielle

Exercice 1. (6 pts).

1. Notons que la matrice A n'est pas symétrique, par conséquent le graphe G est orienté.

- **(0.75pt)** Un graphe orienté G est simple s'il ne contient pas de boucles et que entre toute paire de sommets, il existe au plus un arc.
  De la matrice A:
  - $a_{ii} = 0, i = 1,2, \dots ,7$, donc G ne contient pas de boucles.
  - $\forall i, j = 1,2, \dots ,7\ et\ i \neq j; on\ a\ a_{ij} \leq 1.$ Donc entre toute paire de sommets i et j , il existe au plus un seul arc u tel $i = I(u)$ et $j = T(u)$.
  - $\forall i, j = 1,2, \dots ,7;\ a_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ji} = 0$. Il existe donc exactement un seul arc entre les sommets i et j.
  D'où le graphe G est simple.
- **(0.75pt)** On a : pour chaque sommet i : $d^+(i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ et $d^-(i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$
  Donc $d(i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$.
  On peut alors noter que $d(1) = \sum_{j=1}^{7} a_{1j} + \sum_{j=1}^{7} a_{j1} = 2 \neq d(2) = \sum_{j=1}^{7} a_{2j} + \sum_{j=1}^{7} a_{j2} = 3$.
  D'où G n'est pas régulier.
- **(0.75pt)** De même, G n'est pas pseudo symétrique car
  $d^+(1) = \sum_{j=1}^{7} a_{1j} = 2 \neq d^-(1) = \sum_{j=1}^{7} a_{j1} = 0$.

2. Représentation graphique de G : **(0.75pt)**

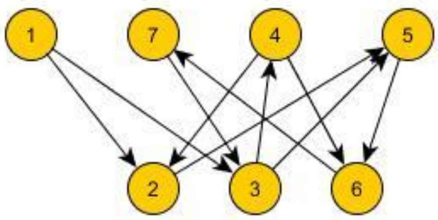


3. Table des successeurs : **(1pt)**

1	3	4	6	8	9	10

2	3	5	4	5	2	6	6	7	3

4. **(1pt)**On remarque que tous les cycles élémentaires de G sont de longueur paire, donc le graphe G est biparti.
   Ou
   il existe une partition des sommets de G en deux sous ensembles {1,5,4,7} et {2,3,6}, tel que chaque arc de G a ses deux extrémités dans les deux ensembles. On peut donc représenter G comme suit :



5. On a $\delta(G) = 2$, donc $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq 2$.
   Comme G ne contient aucun point d'articulation ni isthme, alors $\kappa(G) = \lambda(G) = 2$. **(0.5pt)**
   On a alors un ensemble d'articulation minimum {2,3} et une coupe minimum {12,13}. **(0.5pt)**

Exercice 2 (4pts) .

Comme le réseau contient des circuits et les longueurs positifs, on applique l'algorithme de Dijkstra :

Initialisation

$S \leftarrow \{2\}$; $Arc(x) \leftarrow \emptyset$; $\pi(x) \leftarrow +\infty, \forall x \neq 2$; $\pi(2) \leftarrow 0$; $t \leftarrow 5$; . $\mathbf{(0.5pt)}$

Itération 1 : $t = 2$ **(0.75pt)**

$y = 1 :\ \ \pi(2) + l(21) = 0 < \pi(1) = +\infty \Rightarrow\ \pi(1) \leftarrow \pi(2) + l(21) = 0; Arc(1) \leftarrow \{21\};$

$y = 3 :\ \ \pi(2) + l(23) = 2 < \pi(3) = +\infty \Rightarrow\ \pi(3) \leftarrow \pi(2) + l(23) = 2; Arc(3) \leftarrow \{23\};$

Choix de $z \notin S$ tel que $\pi(z) = \min_{x \notin S} \pi(x) \Rightarrow z \leftarrow 1; S \leftarrow S \cup \{1\}; t \leftarrow 1;$

Itération 2 : $t = 1$$\mathbf{(0.75pt)}$

$y = 4 :\ \ \pi(1) + l(14) = 1 < \pi(4) = +\infty \Rightarrow\ \pi(4) \leftarrow \pi(1) + l(14) = 1; Arc(4) \leftarrow \{14\};$

$y = 3 :\ \ \pi(1) + l(13) = 1 < \pi(3) = 2 \Rightarrow\ \pi(3) \leftarrow \pi(1) + l(13) = 1; Arc(3) \leftarrow \{13\};$

Choix de $z \notin S$ tel que $\pi(z) = \min_{x \notin S} \pi(x) \Rightarrow z \leftarrow 4; S \leftarrow S \cup \{4\}; t \leftarrow 4;$

Itération 3 : $t = 4$$\mathbf{(0.75pt)}$

$y = 5 :\ \ \pi(4) + l(45) = 1 < \pi(5) = +\infty \Rightarrow\ \pi(5) \leftarrow \pi(4) + l(45) = 1; Arc(5) \leftarrow \{45\};$

$y = 6 :\ \ \pi(4) + l(46) = 2 < \pi(6) = +\infty \Rightarrow\ \pi(6) \leftarrow \pi(4) + l(46) = 2; Arc(6) \leftarrow \{46\};$

Choix de $z \notin S$ tel que $\pi(z) = \min_{x \notin S} \pi(x) \Rightarrow z \leftarrow 3; S \leftarrow S \cup \{3\}; t \leftarrow 3;$

Itération 4 : $t = 3$$\mathbf{(0.75pt)}$

$y = 5 :\ \ \pi(3) + l(35) = 3 \nless \pi(5) = 1$

Choix de $z \notin S$ tel que $\pi(z) = \min_{x \notin S} \pi(x) \Rightarrow z \leftarrow 5; S \leftarrow S \cup \{5\}; t \leftarrow 5;$

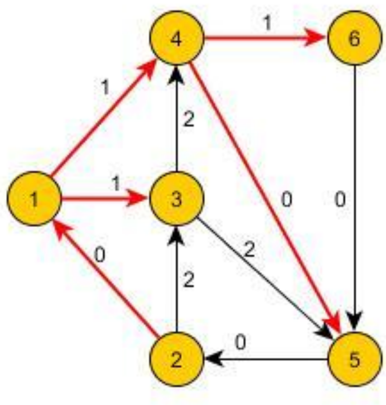
Itération 5 : $t = 5$$\mathbf{(0.5pt)}$

$\nexists$ *de successeurs de* $5\ \notin S$

Choix de $z \notin S$ tel que $\pi(z) = \min_{x \notin S} \pi(x) \Rightarrow z \leftarrow 6; S \leftarrow S \cup \{6\}; t \leftarrow 6;$

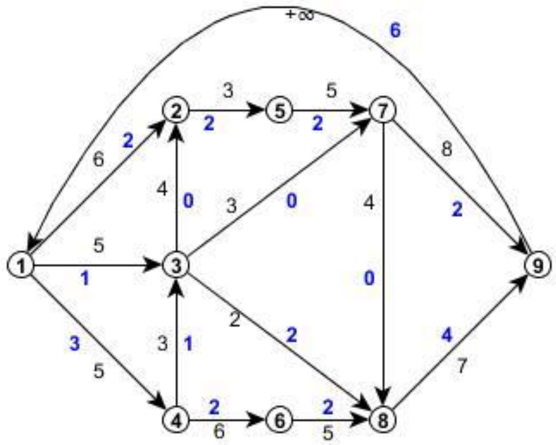
$S = X \rightarrow Fin\ de\ l'algorithme$

D'où le plus court chemin de 2 à 5 est 2145 qui est de longueur 1.



Exercice 3 (5pts).

a) f est un flot si et seulement si on a $\forall x \in X, F^+(x) = F^-(x)$



Avec
$F^+(x) = \sum_{a|x=I(a)} f(a)$ et $F^-(x) = \sum_{a|x=T(a)} f(a)$ **(0.5pt)**
D'où les valeurs de flot sur les arcs sont comme suit :

$f(12) = 2, f(13) = 1, f(43) = 1, f(46) = 2, f(38) = 2,$
$f(79) = 2,$ $f(14) = 3, f(68) = 2, f(91) = 6$
$f(32) = f(37) = 0, f(25) = f(57) = 2, f(78) = 0,$
$f(89) = 4$. **(1pt)**

b) On applique l'algorithme de Ford-Fulkerson :

Itération 1 (0.75pt)
$Y = \{1\}; Y = \{1,4,6,8,9\};\ C = 14689$
$C^+ = \{14,46,68,89\}$
$C^- = \emptyset$ $\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_1 = \min\{5-3; 6-2; 5-2; 7-4\} = 2.$

$f(14) = 5; f(46) = 4; f(68) = 4; f(89) = 6; f(91) = 8$

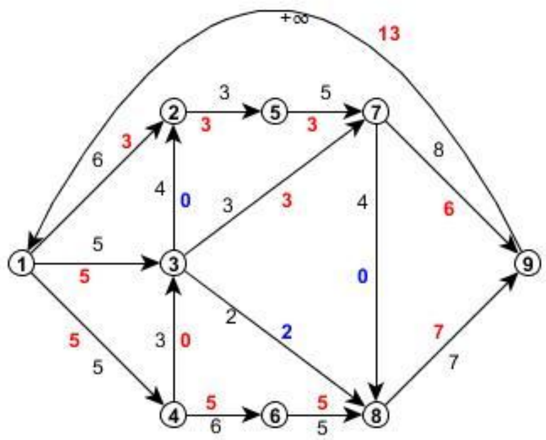
Itération 2 (0.75pt)
$Y = \{1\}; Y = \{1,3,7,9\};\ C = 1379$
$C^+ = \{13,37,79\}$
$C^- = \emptyset$ $\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_1 = \min\{5-1; 3-0; 8-2\} = 3.$

$f(13) = 4; f(37) = 3; f(79) = 5; f(91) = 11$

Itération 3 (0.75pt)
$Y = \{1\}; Y = \{1,2,5,7,9\};\ C = 12579$
$C^+ = \{12,25,57,79\}$
$C^- = \emptyset$ $\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_1 = \min\{6-2; 3-2; 5-2; 8-5\} = 1.$

$f(12) = 3; f(25) = 3; f(57) = 3; f(79) = 6; f(91) = 12$

Itération 4 (0.75pt)
$Y = \{1\}; Y = \{1,3,4,6,8,9\};\ C = 14689$
$C^+ = \{13,46,68,89\}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_1 = \min\{5-4; 6-4; 5-4; 7-6\} = 1$
$C^- = \{43\}$ $\varepsilon_2 = 1$
$\Rightarrow \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = 1$



$f(13) = 5; f(46) = 5; f(68) = 5; f(89) = 7; f(43) = 0;$
$f(91) = 13.$

Itération 5 (0.5pt)
$Y = \{1\}; Y = \{1,2\};\ 9 \notin Y \rightarrow Fin\ de\ l'algorithme.$
Flot maximum de 1 à 9 égal à 13.

Exercice 4 (5pts).

1. **(2 pts)** On raisonne par l'absurde :
   On suppose qu'il existe un arbre T tel qu'il existe au plus un sommet pendant.
   On distingue deux cas :
   - **cas 1 :** T ne contient aucun sommet pendant , donc
   $$\forall u \in V, d(u) \geq 2 \;\Rightarrow\; 2m = \sum_{u \in V} d(u) \geq 2n.$$
   Or T est un arbre, donc $m = n - 1$.
   Par conséquent, on a $2m = 2(n-1) \geq 2n \Rightarrow n \geq n - 1$. Ce qui est absurde

   - **cas 2 :** T contient un seul sommet pendant v , donc $\forall u \neq v, d(u) \geq 2 \; et \; d(v) = 1$.
   On a alors
   $$2m = \sum_{u \in V} d(u) \geq 2(n-1) + 1 = 2n - 1.$$
   D'autre part T contient $n - 1$ arêtes, donc $2(n-1) \geq 2n - 1 \Rightarrow 2n - 2 \geq 2n - 1$. Ce qui est aussi absurde.

   D'où T doit contenir au moins deux sommets pendants.

2. **(3pts)**À l'aide de l'algorithme de PRIM, trouver un arbre de poids minimum dans le graphe G ci-contre

$t \leftarrow 1;\; S \leftarrow \{1\};\; T_{min} \leftarrow \emptyset; P(T_{min}) \leftarrow 0;$

- $S = \{1\}:\; uv \;\leftarrow 13;\; S \leftarrow S \cup \{3\}; T_{min} \leftarrow T_{min} \cup \{13\}; P(T_{min}) \leftarrow P(T_{min}) + 0 = 0;$

- $S = \{1{,}3\} : uv \leftarrow 34;\; S \leftarrow S \cup \{4\}; T_{min} \leftarrow T_{min} \cup \{34\}; P(T_{min}) \leftarrow P(T_{min}) - 1 = -1;$

- $S = \{1{,}3{,}4\} : uv \leftarrow 24;\; S \leftarrow S \cup \{2\}; T_{min} \leftarrow T_{min} \cup \{24\}; P(T_{min}) \leftarrow P(T_{min}) + 0 = -1;$

- $S = \{1{,}2{,}3{,}4\} : uv \leftarrow 25;\; S \leftarrow S \cup \{5\}; T_{min} \leftarrow T_{min} \cup \{25\}; P(T_{min}) \leftarrow P(T_{min}) - 1 = -2;$

- $S = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5\} : uv \leftarrow 47;\; S \leftarrow S \cup \{7\}; T_{min} \leftarrow T_{min} \cup \{47\}; P(T_{min}) \leftarrow P(T_{min}) + 0 = -2;$

- $S = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}7\} : uv \leftarrow 67;\; S \leftarrow S \cup \{6\}; T_{min} \leftarrow T_{min} \cup \{67\}; P(T_{min}) \leftarrow P(T_{min}) + 1 = -1;$

- $S = V \Rightarrow Fin\ de\ l'algorithme.$

$T_{min} = \{13{,}34{,}24{,}25{,}47{,}76\}$ est l'arbre de poids -1 minimum.