UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI – OUM EL BOUAGHI

Département M.I 2018-2019

3ème Année Licence Maths(S5)

Module : Analyse Hilbertienne

Contrôle Semestriel

Exercice1 (6 pts):

Soit $H = C([-1,1],\mathbb{R})$

1- *montrer que l'application :*

$$\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$$
$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}f(t)g(t)dt.$$

est un produit scalaire sur H.

2- *Soit* $(T_n)_{n\geq 0}$ *la suite d'éléments de H (polynômes de Tchebyschev) définie par :*

$$T_n(x) = \cos\big(nArcos(x)\big),\ n \geq 0\ ,\ \ x \in [-1\ ,\ 1]\ .$$

− *Montrer que* $(T_n)_{n\geq 0}$ *est orthonormée.*

Exercice2 (8 pts):

Muni du produit scalaire donné par $< f,g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ *, l'espace :*

$$H = L^2([-1,1],\mathbb{R}) = \left\{f:[-1,1] \to \mathbb{R}\ ;\ \int_{-1}^{1} f^2(x)dx < +\infty\right\}$$ *est un espace de Hilbert.*

On désigne par v *la fonction valeur absolue et par* φ *la forme linéaire continue définie pour* $f \in H$ *par :* $\varphi(f) = \int_{-1}^{1}|x|f(x)dx = 0$.

On considère le sous-espace vectoriel G de H défini par : $G = \{f \in H\ ; < v,f >= 0\}$.

1. *Montrer que G est fermé. En déduire qu'il est complet.*
2. *Déterminer la projection de la fonction* $h: x \mapsto x+1$ *sur* G *et en déduire la distance de* h *à* G.

Exercice3 (6 pts):

Soit f *la fonction* 2π*-périodique donnée par* $\pi - x$ *sur* $[0,2\pi[$.

Calculer les coefficients de Fourier de f. *En déduire que :* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Bon courage