

Corrigé Type



Université Med BOUDIAF M'sila
Faculté de Technologies
Département de Génie mécanique



Examen d'**Dynamique des structures avancées** : Session normale (2017/2018)

Durée : 1h-30mn

1ère Master Construction Mécanique

Correction

Exercice 1 : (8 pts)

Le système d'équations différentielles du mouvement est donnée par :

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + 2k_t \theta_1 - k_t \theta_2 = 0 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - k_t \theta_1 + 2k_t \theta_2 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (2 \text{ pts})$$

Le coefficient de rigidité en torsion : $k_t = \frac{G I}{L} = \frac{2.10^9 * 1.2.10^{-6}}{0.2} = 12000 \left[\frac{Nm}{rd} \right]$; (1 pt)

Puisque : $J_1 = J_2 = 12000 [kg.m^2]$, le système devient :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + 2\theta_1 - \theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 - \theta_1 + 2\theta_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{sous forme matricielle : } \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 & -1 \\ -1 & 2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1pt)$$

La solution recherchée est de la forme : $\theta_i(t) = \Theta_i \cos(\omega t + \phi)$; $i=1,2,\dots$

Qui nous donne après substitution, l'équation caractéristique des pulsations propres :

$$\omega^4 - 4\omega^2 + 3 = 0 ; \dots\dots\dots (2 \text{ pts})$$

La solution nous donne les pulsations propres recherchées :

$$\omega_1 = 1 \left[\frac{rd}{s} \right] , \dots\dots\dots (1 \text{ pt})$$

$$\omega_2 = \sqrt{3} = 1,73 \left[\frac{rd}{s} \right] ; \dots\dots\dots (1 \text{ pt})$$

Exercice 2 : (8pts) :

La rigidité de la poutre : $k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 * (200.10^9 \left[\frac{N}{m^2} \right]) (1.3.10^{-6} [m^4])}{(1.2[m])^3} = 4.51 * 10^5 \left[\frac{N}{m} \right] \dots\dots\dots (1 \text{ pt})$

La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{4.51 * 10^5}{40}} = 106.2 \left[\frac{rd}{s} \right] , \dots\dots\dots (1 \text{ pt})$

Le facteur d'amplification dynamique :

$$D = \frac{m\rho}{m_0 e} = \frac{(40[kg] * 0.0203[m])}{(5[kg] * 0.02[m])} = 8.12 \dots\dots\dots (1 \text{ pt})$$

- Calcul du pourcentage d'amortissement : $\omega_D = 106 \left[\frac{rd}{s} \right]$

$$\zeta = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_D}{\omega_0} \right)^2} \rightarrow \zeta = 0.06 \dots\dots\dots (1 \text{ pt})$$

Le décrément logarithmique : $\delta = 2\pi\zeta = 2\pi(0.06) = 0.38 \dots\dots\dots (1 \text{ pt})$

- Calcul de l'amplitude de la réponse stationnaire (permanente) de la structure est donnée par :

La pulsation forcée : $\bar{\omega} = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi (1000)}{60} = 104.72 \left[\frac{rd}{s} \right] ; \dots\dots\dots (1)$

Le rapport des pulsations : $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = \frac{104.72 \left[\frac{rd}{s} \right]}{106.2 \left[\frac{rd}{s} \right]} = 0.986 ; \dots\dots\dots (1)$

$$\rho = \frac{m_0 e}{m} \cdot \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2 \beta^2}} = \frac{(5[kg] \cdot 0.02[m])}{40[kg]} \cdot \frac{(0.986)^2}{\sqrt{(1-(0.986^2)^2 + 4(0.06)^2(0.986)^2}} = 19.48 [mm] \dots\dots\dots (1)$$

Exercice 3 : (4pts)

- Les conditions aux limites de la barre encastrée d'un coté et libre de l'autre sont :
 $u(0, t) = 0 \text{ et } EA \frac{\partial u}{\partial x_{x=L}} = 0 ; \dots\dots\dots (2)$
- Les pulsations propres de la barre :

L'équation différentielle aux dérivées partielles des vibrations longitudinales dans une barre est donnée par :

$$\frac{E}{\rho} \cdot \frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \omega^2 \cdot \frac{\rho}{E} u(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{équations de vibrations libres non amorties})$$

Dont les solutions sont :

$$\begin{cases} T(x) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ u(x) = C \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x + D \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x \end{cases}$$

Dans le cas d'une poutre encastrée-libre, à tout instant on aura :

$$u(0, t) = u(0) \cdot T(t) = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_{x=L}} u(x, t) = \dot{u}(L) \cdot T(t) = 0,$$

ceci nous donne : $D = 0 \text{ et } C \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L = 0 \text{ et puisque } C \neq 0 \rightarrow \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L = 0 \dots\dots\dots (1)$

alors : $\omega_n \sqrt{\frac{\rho}{E}} L = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad n=1,2,\dots \quad \omega_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2} * \frac{1}{L} * \sqrt{\frac{E}{\rho}} [\text{rd/s}] \dots\dots\dots (1)$

Enseignant Chargé du Module
Saib Cherif