Université Med BOUDIAF M'sila
Faculté de Technologies
Département de Génie mécanique

Examen de **Comp. Méc. Des Matériaux Composites** Session normale (2018/2019w tyuiop¤)

Master 1 Génie des Matériaux

Correction

Ex 01 (05 pts)

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-451.5\\ 25.87\\ 119.69\end{Bmatrix}\text{MPa}$$

Ex 02 (05 pts)

alors

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=[T(\theta)]\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-3.5\\ 7\\ -1.4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3.16\\ 0.34\\ 5.24\end{Bmatrix}$$

où

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma_1}{E_1}-\nu_{21}\frac{\sigma_2}{E_2}=\frac{3.16\times10^6}{14\times10^9}-0.1\left(\frac{0.34\times10^6}{3.5\times10^9}\right)=216\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_2=\frac{\sigma_2}{E_2}-\nu_{12}\frac{\sigma_1}{E_1}=\frac{0.34\times10^6}{3.5\times10^9}-0.4\left(\frac{3.16\times10^6}{14\times10^9}\right)=6.9\times10^{-6}$$

$$\gamma_{12}=\frac{\tau_{12}}{G_{12}}=\frac{5.24\times10^6}{4.2\times10^9}=1248\times10^{-6}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\left[T^1(\theta)\right]^{-1}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}\quad \text{où}\quad \left[T^1(\theta)\right]^{-1}=\left[T^1(-\theta)\right]=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & -cs\\ s^2 & c^2 & cs\\ 2cs & -2cs & (c^2-s^2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{4}\times216\times10^{-6}+6.9\times10^{-6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times1248\times10^{-6}$$
$$=-481\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_y=\frac{3}{4}\times216\times10^{-6}+\frac{1}{4}\times6.9\times10^{-6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times1248\times10^{-6}=704\times10^{-6}$$

$$\tau_{xy}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times216\times10^{-6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times6.9\times10^{-6}-\frac{1}{2}\times1248\times10^{-6}=-442\times10^{-6}$$

Ex 02 (10 pts)

1. Détermination des contraintes σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{xy}

Il faut déterminer au préalable la matrice de rigidité réduite rapportée aux axes principaux :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \dfrac{E_T}{E_L}} = 41,051 \text{ GPa},$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} = 10,263 \text{ GPa},$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} = 3,284 \text{ GPa},$$

$$Q_{66} = G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}.$$

D'où la matrice de rigidité réduite exprimée dans les axes principaux :

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 41,051 & 3,284 & 0 \\ 3,284 & 10,263 & 0 \\ 0 & 0 & 4,5 \end{bmatrix} \text{GPa}.$$

La matrice de rigidité réduite, rapportée aux axes (x, y), est ensuite calculée :

$$Q'_{11} = 41,051 \times \frac{9}{16} + 10,263 \times \frac{1}{16} + 2(3,284 + 2 \times 4,5) \frac{3}{4} \frac{1}{4} = 28,339 \text{ GPa},$$

$$Q'_{12} = (41,051 + 10,263 - 4 \times 4,5) \frac{3}{4} \frac{1}{4} + 3,284 \times \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{16} \right) = 8,299 \text{ GPa},$$

$$Q'_{16} = (41,051 - 3,284 - 2 \times 4,5) \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{3}}{8} + (3,284 - 10,263 + 2 \times 4,5) \frac{1}{8} \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 9,561 \text{ GPa},$$

$$Q'_{22} = 41,051 \times \frac{1}{16} + 10,263 \times \frac{9}{16} + 2(3,284 + 2 \times 4,5) \frac{3}{4} \frac{1}{4} = 12,945 \text{ GPa},$$

$$Q'_{26} = (41,051 - 3,284 - 2 \times 4,5) \frac{1}{8} \frac{\sqrt{3}}{2} + (3,284 - 10,263 + 2 \times 4,5) \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{1}{2}$$
$$= 3,770 \text{ GPa},$$

$$Q'_{66} = \left[41,051 + 10,263 - 2(3,284 + 4,5) \right] \frac{1}{4} \frac{3}{4} + 4,5 \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{16} \right)$$
$$= 9,515 \text{ GPa}.$$

D'où la matrice de rigidité réduite dans les axes (x, y) :

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} 28,339 & 8,299 & 9,561 \\ 8,299 & 12,945 & 3,770 \\ 9,561 & 3,770 & 9,515 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

Les contraintes dans les axes (x, y) sont ensuite calculées à partir de (11.43) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,339 & 8,299 & 9,561 \\ 8,299 & 12,945 & 3,770 \\ 9,561 & 3,770 & 9,515 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 20 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Soit :

$$\sigma_{xx} = 433 \text{ MPa},$$
$$\sigma_{yy} = 94 \text{ MPa},$$
$$\sigma_{xy} = 267 \text{ MPa}.$$

2. Détermination des contraintes dans les axes principaux

Les contraintes dans les axes principaux s'obtiennent à partir de la relation générale (5.44). Dans le cas de contraintes planes, cette relation est limitée aux trois contraintes dans le plan et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \end{bmatrix}$$

où θ est l'angle de la direction des fibres avec la direction x de référence. Dans le cas présent, cette expression s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 433 \\ 94 \\ 267 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Soit :

$$\sigma_L = 580 \text{ MPa},$$
$$\sigma_T = -53 \text{ MPa},$$
$$\sigma_{LT} = -13,5 \text{ MPa}.$$