

A close-up, high-angle shot of a waterfall cascading over dark, wet rocks. The water is in motion, creating a blurred effect as it falls. The background is a textured, brownish stone wall.

# Mécanique des Fluides

BESSEDIK Madani  
mabessedik@yahoo.fr

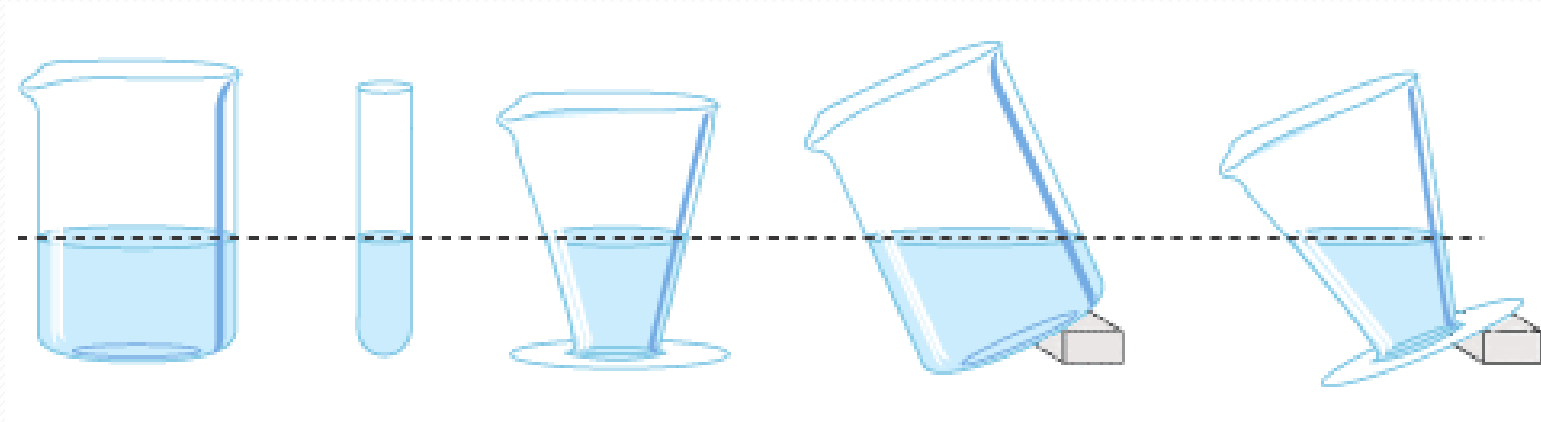
# Programme

- Chapitre I: Propriétés des fluides
- Chapitre II: Hydrostatique
- Chapitre III: Cinématique des fluides
- Chapitre IV: Dynamique des fluides parfaits
- Chapitre V: Dynamique des fluides réels

# Chapitre I : Propriétés des fluides

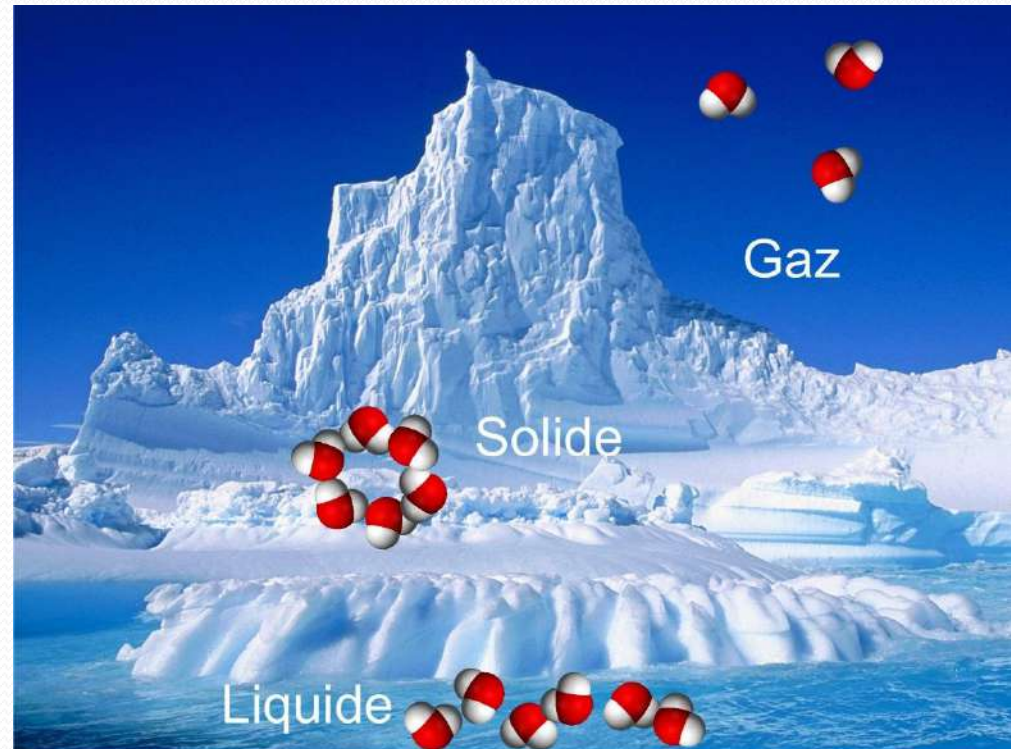
## I.1 Définition d'un fluide

Un fluide est « un corps sans forme propre qui épouse celle du vase qui le contient et qui peut s'écouler ».

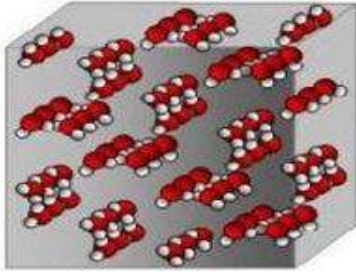


Parmi les trois principaux états de la matière, solide, liquide et gazeux, la notion de fluide recouvre les deux derniers.

Ces trois états se différencient essentiellement par l'intensité des forces de liaison qui assurent une certaine cohésion entre les molécules.

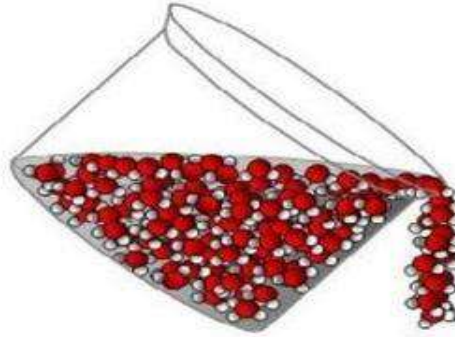


# Les états de la matière:



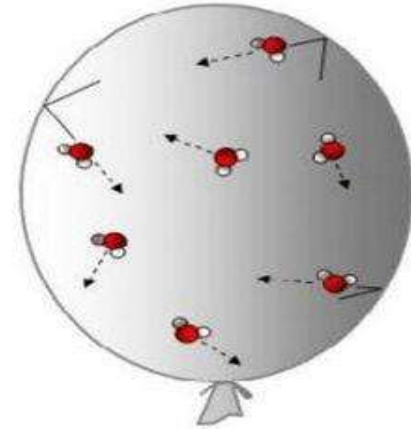
## *Solide*

- Les particules sont très entassées.
- Les particules peuvent seulement vibrer, pas se déplacer librement.



## *Liquide*

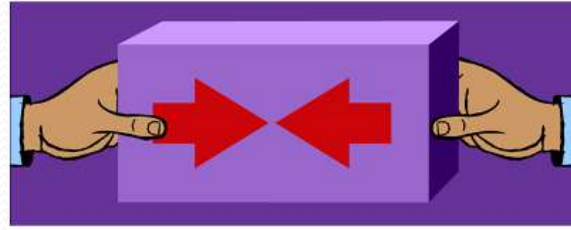
- Les particules sont juste assez éloignées pour glisser les unes contre les autres.



## *Gaz*

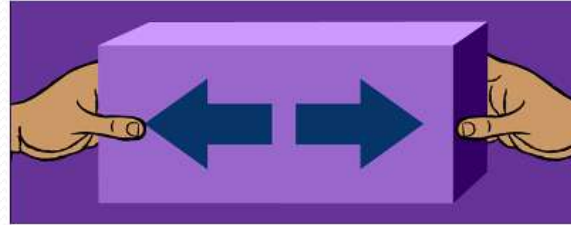
- Les particules sont tellement éloignées les unes des autres.
- Les particules circulent facilement.

Pour un corps à l'état solide, il faut exercer une force relativement grande pour provoquer sa déformation; de plus et si l'on demeure dans le cadre de la limite élastique, la suppression de cette force extérieure s'accompagne d'un retour du solide à sa forme initiale.



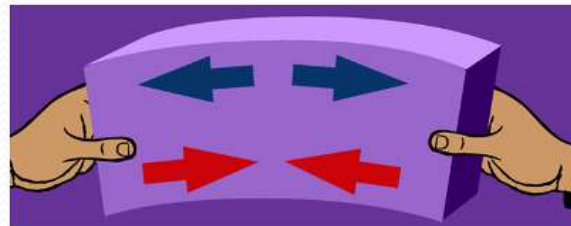
## COMPRESSION

La compression a tendance à raccourcir l'élément sur lequel elle s'exerce



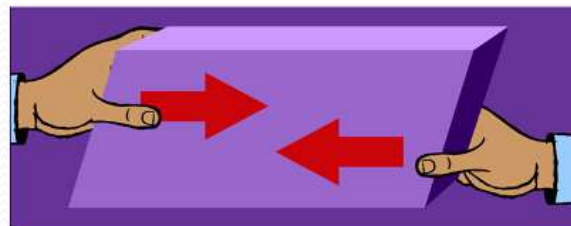
## TRACTION

La traction a tendance à allonger l'élément sur lequel elle s'exerce.



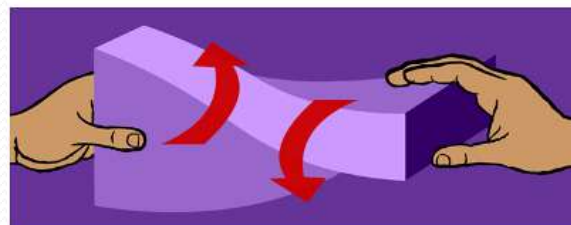
## FLEXION

La flexion a tendance à courber l'élément sur lequel elle s'exerce.



## CISAILLEMENT

Le cisaillement a tendance à couper en deux l'élément sur lequel il s'exerce.



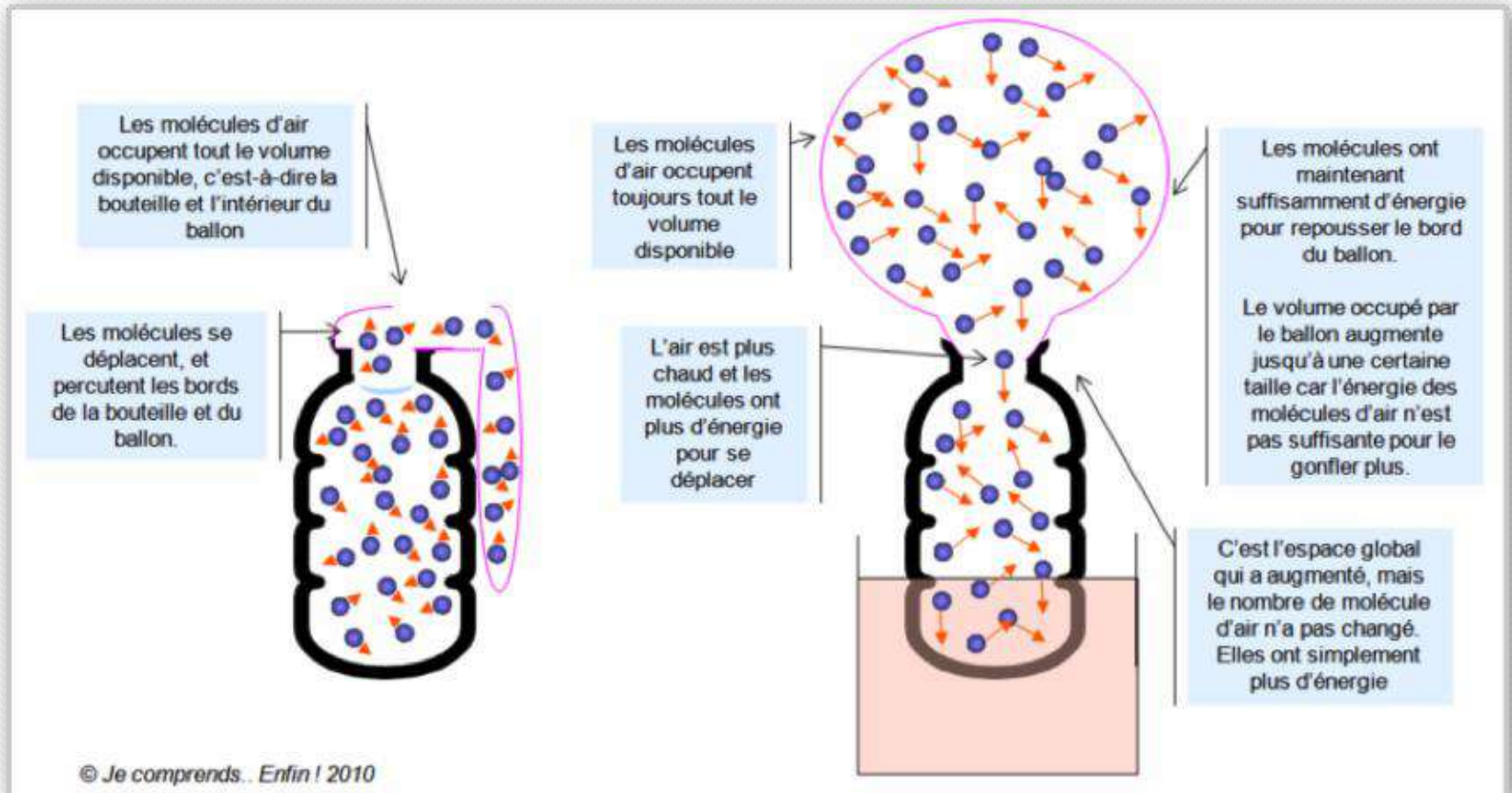
## TORSION

La torsion a tendance à vriller l'élément sur lequel elle s'exerce.

Dans un corps à l'état liquide, les forces d'attraction entre molécules sont beaucoup plus faibles. Lors de l'application d'une force extérieure, même petite, les molécules peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres, ce déplacement étant définitivement acquis.



Enfin dans le cas d'un gaz, les molécules sont pratiquement indépendantes les unes des autres mais présentent une agitation à grande vitesse qui dépend essentiellement de la température du gaz. Cette absence de cohésion interne au sein d'un fluide fait qu'il ne peut accepter aucune force de traction.



La mécanique des fluides étudie le comportement des fluides :

➤ au repos :  hydrostatique

➤ en mouvement :  hydrodynamique

On distingue deux types de fluides :

➤ les liquides  « incompressibles »

➤ les gaz  compressibles

## I.2 Principales propriétés physiques des fluides

Ces propriétés générales, définies à l'échelle de la particule, permettent d'évaluer le comportement du fluide vis-à-vis des sollicitations extérieures. Comme d'autre part elles sont une représentation de l'influence de la structure moléculaire, les paramètres de pression et de température jouent un rôle particulier dans les propriétés propres du fluide.



## I.2.1 Masse volumique du fluide

La masse volumique ou masse spécifique est la masse de l'unité de volume du corps considéré. Si  $M$  est la masse d'un volume  $V$  de fluide, la masse volumique s'écrit :

$$\rho = \frac{M}{V} [\text{Kg/m}^3]$$

Pour les liquides, le volume est pratiquement insensible aux variations de pression, dans la majorité des cas, il augmente faiblement quand la température augmente, l'eau faisant exception à cette règle en dessous de 4°C.

## Tableau I.1 : Masse volumique

Liquide	Masse volumique (Kg/m <sup>3</sup> )
<b>Eau</b>	1000
<b>Mercure</b>	13546
<b>Air sec</b>	1,205

Métaux et alliages	masse volumique
	kg/m <sup>3</sup>
acier	7 850
acier rapide HSS	8 400 - 9 000
fonte	6 800 - 7 400
aluminium	2 700
argent	10 500
bronze	8 400 - 9 200
carbone (diamant)	3 508
carbone (graphite)	2 250
constantan	8 910
cuivre	8 920
Duralumin	2 900
fer	7 860
iridium	22 640
laiton	7 300 - 8 400
lithium	530
magnésium	1 750
mercure	13 545,88
molybdène	10 200
nickel	8 900
or	19 300
osmium	22 610
palladium	12 000
platine	21 450
plomb	11 350
potassium	850
tantale	16 600
titane	4 500
tungstène	19 300
uranium	18 700
vanadium	6 100
zinc	7 150

## Tableau I.2 : Masse volumique de l'air sec en fonction de la température $\vartheta$ en $^{\circ}\text{C}$ , $\rho$ en $\text{kg}/\text{m}^3$

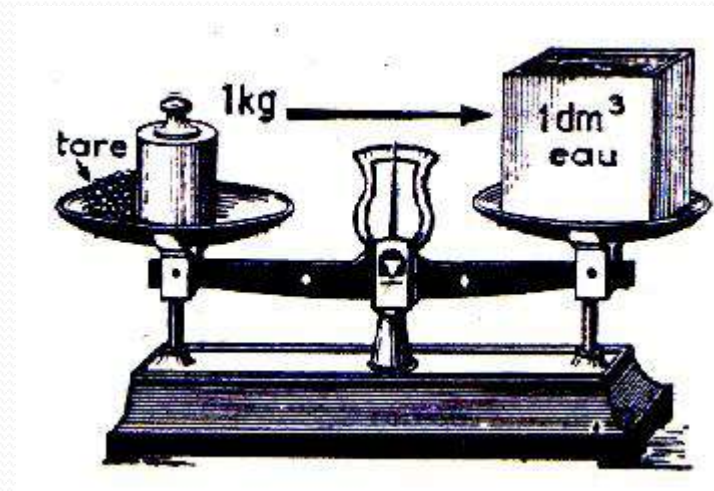
$\vartheta$ en $^{\circ}\text{C}$	$\rho$ en $\text{kg}/\text{m}^3$	$\vartheta$ en $^{\circ}\text{C}$	$\rho$ en $\text{kg}/\text{m}^3$
- 10	1,341	+ 40	1,127
- 5	1,316	+ 45	1,109
0	1,293	+ 50	1,092
+ 5	1,269	+ 55	1,076
+ 10	1,247	+ 60	1,060
+ 15	1,225	+ 65	1,044
+ 20	1,204	+ 70	1,029
+ 25	1,184	+ 75	1,014
+ 30	1,164	+ 80	1,000
+ 35	1,146	+ 85	0,986

## I.2.2- Poids spécifique

Le poids spécifique représente la force de gravité agissant sur la masse par unité de volume. Il s'écrit :

$$\gamma = g \cdot \rho \text{ [N/m}^3\text{]}$$

$$\gamma_{\text{eau}} = 10^4 \text{ N/m}^3$$



### I.2.3- Viscosité

Tout comme la masse volumique, la viscosité d'un fluide est une notion d'observation courante: chacun a, en effet, constaté que les fluides s'écoulent plus ou moins facilement et que pour certains (les huiles en particulier), la température a une grande influence.

La viscosité est liée à l'existence des forces intermoléculaires qui se traduit d'une part par l'adhérence du fluide à une paroi et d'autre part par une résistance au mouvement relatif [glissement) de deux particules voisines de fluide.

Cette résistance correspond à une perte d'énergie cinétique du fluide, cette énergie mécanique perdue étant dissipée sous forme de chaleur au sein du fluide.



La viscosité d'un fluide en mouvement est la propriété qui exprime sa résistance à une force tangentielle.

Imaginons un film fluide placé entre deux plaques planes, parallèles et horizontales. L'une fixe et l'autre en mouvement uniforme de vitesse  $V_{max}$ . Pour que la vitesse puisse avoir lieu il faut exercer une force  $F$  sur la plaque supérieure. Cette force est la résultante des forces de frottement visqueux, qui vaut :

$$F = \mu A \frac{dv}{dy}$$

$A$  : aire de la plaque [ $m^2$ ]

$\mu$  : viscosité [ $N.s/m^2$ ]

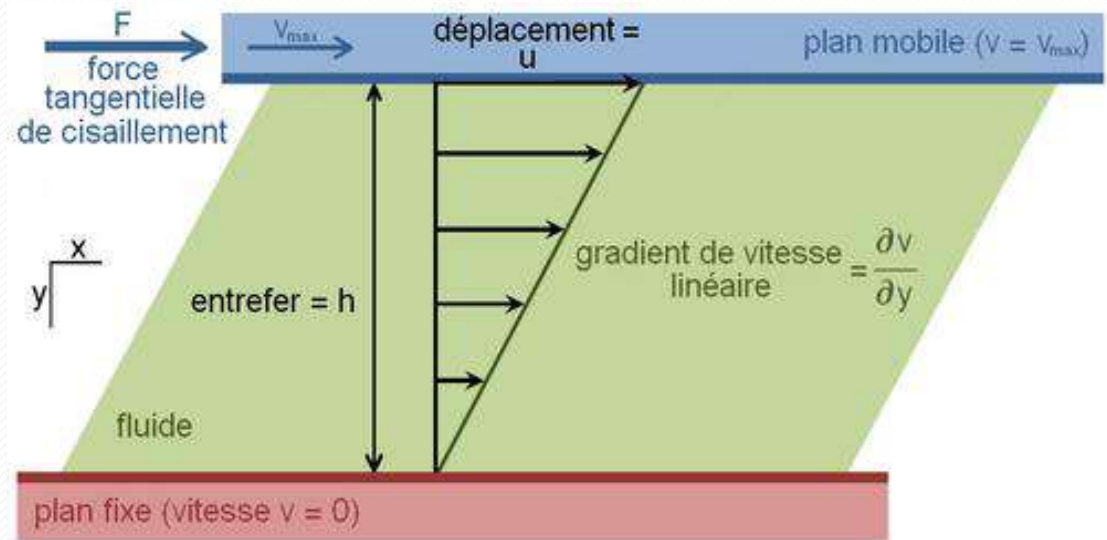


Figure I.1: Frottement visqueux

On considère deux cylindres coaxiaux séparés par un intervalle  $e$  dont l'espace entre eux est rempli par un liquide. On fait tourner le cylindre extérieur à une vitesse constante ( $\omega$ ) et on maintient fixe le cylindre intérieur. Le fluide en contact avec le cylindre extérieur va y adhérer et va donc être animé de la vitesse  $V$  ( $V = \omega \times (r+e)$ ). Le fluide en contact avec le cylindre fixe aura une vitesse nulle. Il se produit dans le fluide des efforts de cisaillement. La viscosité est due à l'interaction entre les molécules du fluide.

Cette interaction fait naître une force de frottement que l'on mesure par le couple  $M$ .

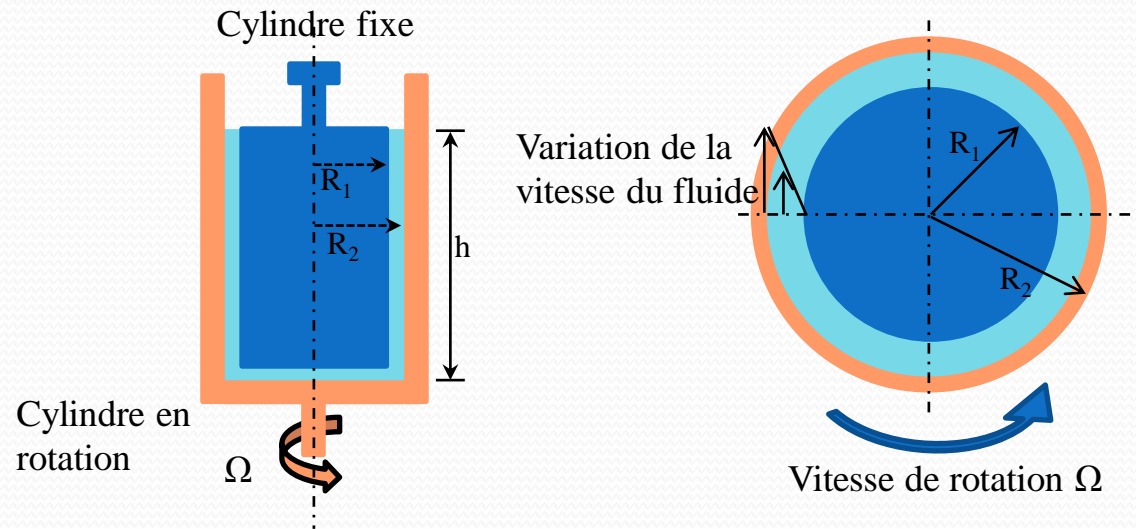


Figure I.2: Cellule de Couette

Si  $e$  est faible par rapport à  $r$ , la courbe représentative de la variation de la vitesse entre  $r$  et  $r+e$  est une droite.

Les expériences ont montré que le couple  $M$  varie proportionnellement à la vitesse et que l'on a :

$$M = \mu \cdot \frac{SR}{e} \cdot V$$

$\mu$  [N.s/m<sup>2</sup>] est appelé viscosité dynamique ou absolue. On définit un deuxième coefficient de viscosité appelé viscosité cinématique  $\nu$ .

Avec :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ [m}^2\text{/s]}$$

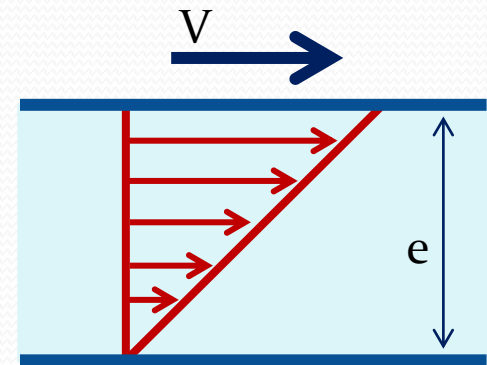


Figure I.3: Variation de la vitesse dans la cellule de Couette

$$\mu_{\text{eau à } 20^\circ\text{c}} = 10^{-3} \text{ N.s/m}^2$$

$$\nu_{\text{eau à } 20^\circ\text{c}} = 10^{-6} \text{ m}^2\text{/s}$$

$$\mu_{\text{mercure}} = 1,554 \cdot 10^{-3} \text{ N.s/m}^2$$

$$\nu_{\text{mercure}} = 0,1147 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{/s}$$

$$\mu_{\text{air}} = 18,5 \cdot 10^{-6} \text{ N.s/m}^2$$

$$\nu_{\text{air}} = 15,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{/s}$$

## Tableau I.3 : l'influence de la température sur la viscosité dynamique de quelques fluides usuels;

	température (°C)	viscosité (Pa s)
hydrogène	0	$8,4 \times 10^{-6}$
	50	$9,3 \times 10^{-6}$
	100	$10,3 \times 10^{-6}$
air	0	$17,1 \times 10^{-6}$
	50	$19,4 \times 10^{-6}$
	100	$22,0 \times 10^{-6}$
xénon	0	$21,2 \times 10^{-6}$
eau	0	$1,79 \times 10^{-3}$
	20,2	0,001
	50	$0,55 \times 10^{-3}$
	100	$0,28 \times 10^{-3}$
glace	-13	$15 \times 10^{12}$
mercure	20	$1,55 \times 10^{-3}$
acétone	20	$0,326 \times 10^{-3}$
éthanol	20	$1,20 \times 10^{-3}$
méthanol	20	$0,59 \times 10^{-3}$
benzène	20	$0,64 \times 10^{-3}$
nitrobenzène	20	$2,0 \times 10^{-3}$

	température (°C)	viscosité (Pa s)
bitume	20	$10^8$
mélasse	20	$10^2$
miel	20	10
huile de ricin	20	0.985
huile d'olive	20	$[81 \times 10^{-2} \dots 100 * 10^{-2}]$
café crème	20	$10 \times 10^{-3}$
sang	37	$[4 \times 10^{-3} \dots 25 \times 10^{-3}]$
jus de raisin	20	$[2 \times 10^{-3} \dots 5 \times 10^{-3}]$
pétrole	20	$0,65 \times 10^{-3}$
Viscosité de corps à la pression atmosphérique		

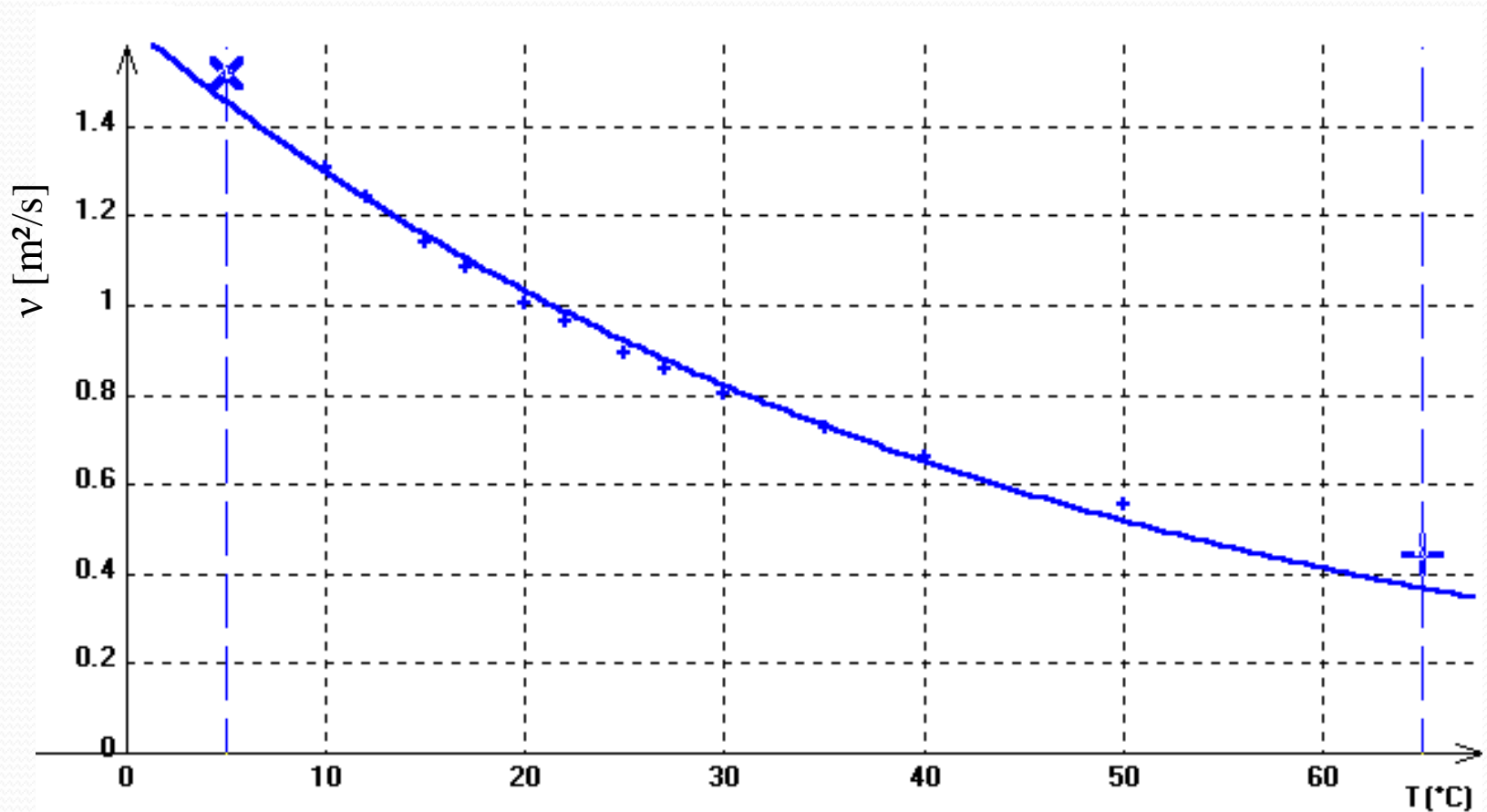
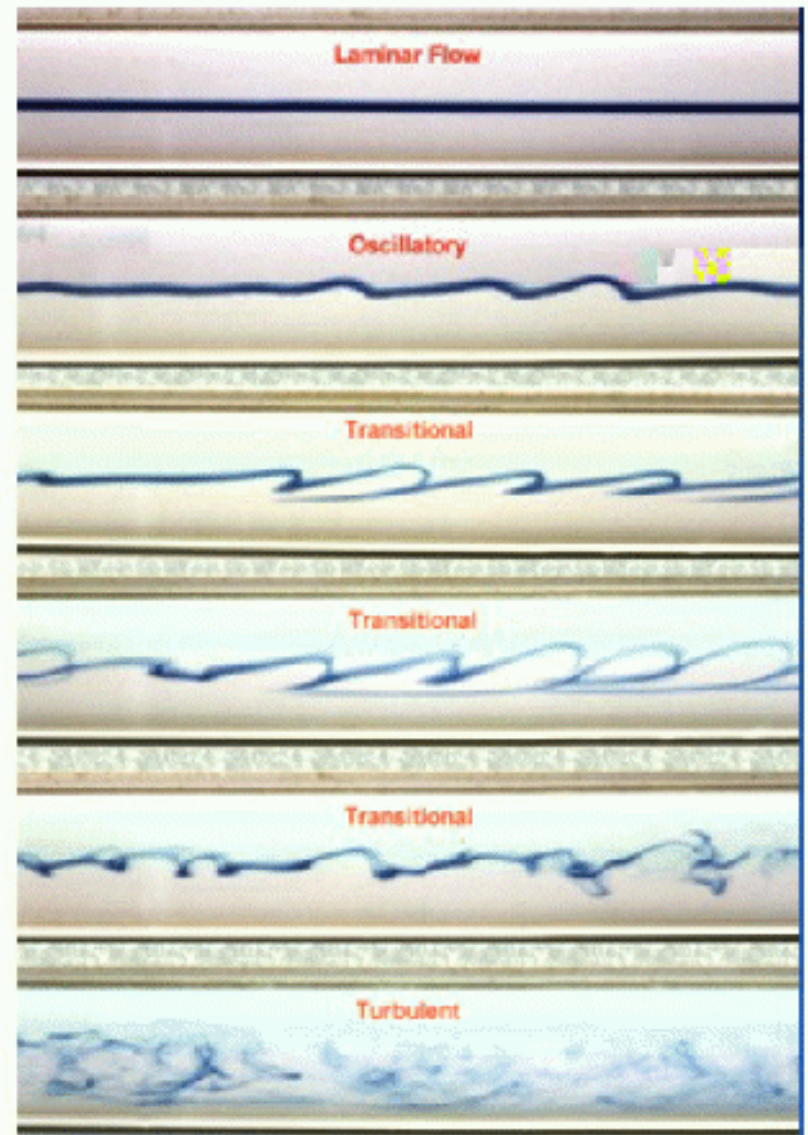


Figure I.4: viscosité de l'eau en fonction de la température.

On appelle fluide parfait un fluide dont la viscosité serait nulle (inexistant dans la nature). La viscosité existe dès qu'il y a mouvement relatif entre particules que ce soit en régime laminaire ou turbulent





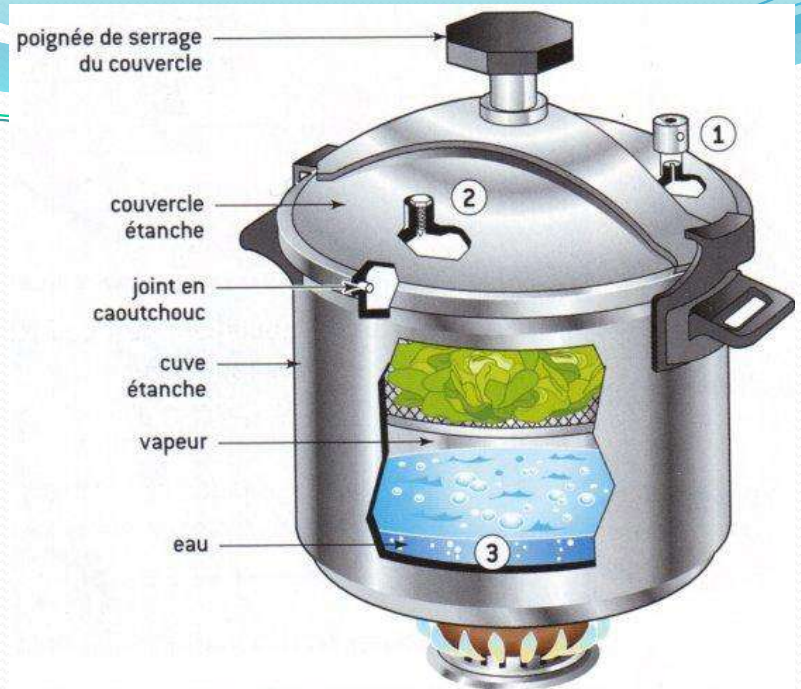
## I.2.4- Pression de vapeur

Tous les liquides ont tendance à s'évaporer, c'est-à-dire en passant de l'état liquide à l'état gazeux. Durant ce phénomène de transformation, les molécules de vapeur exercent une pression, résultante de l'éloignement des molécules entre elles, qui est appelée pression de vapeur.

Dans le cas de l'eau, la pression de vapeur croît avec une augmentation de la température.

Température C°	Pression de vapeur (Pa)
- 10	260
0	610
10	1230
20	2338
40	7376
60	19915
80	47342
100	101325 (1atm)
120	198536

La **pression de vapeur saturante** est la pression à laquelle la phase gazeuse de cette substance est en équilibre avec sa phase liquide ou solide. Elle dépend exclusivement de la température.



La soupape tournante ① laisse sortir la vapeur pour que la pression et la température n'augmentent plus.

La soupape de sécurité ② se déclenche vers 2 000 hPa et empêche la cocotte d'exploser si la soupape tournante est bouchée.

À l'intérieur d'un autocuiseur, en début de cuisson, la pression est la pression atmosphérique. L'eau ③ bout et se vaporise à 100°C environ. De la vapeur d'eau apparaît dans l'autocuiseur. La pression augmente jusqu'à 2 000 hPa. Sous cette pression, l'eau se vaporise vers 120°C. La cuisson à 120°C permet de diviser le temps de cuisson par 3.

Quand la pression partielle de la vapeur est égale à la pression de vapeur saturante d'une substance, les phases gazeuse, liquide ou solide sont en équilibre.

Si la pression partielle de la vapeur dépasse la pression de vapeur saturante, il y a donc liquéfaction ou condensation. À partir d'une situation d'équilibre, cela peut se faire en augmentant la pression partielle de vapeur (par exemple en diminuant le volume), ou bien en diminuant la pression de vapeur saturante, c'est-à-dire en diminuant la température.



## 1.2.5- Tension superficielle

Dans un liquide, les forces intermoléculaires sont des forces dont l'action s'effectue sur des distances de l'ordre de grandeur des dimensions des molécules. Si l'une de celles-ci est noyée au milieu de molécules semblables, les actions de ces dernières s'opposent et la molécule est en équilibre. Si par contre on considère une molécule située à la frontière (ou interface) du fluide et d'un autre corps, elle est soumise à l'action de molécules différentes: son équilibre énergétique amène à envisager un nouveau type de force agissant sur le fluide mais localisée sur l'interface. Ramenée à l'unité d'aire de l'interface, c'est la tension superficielle ou tension interfaciale.



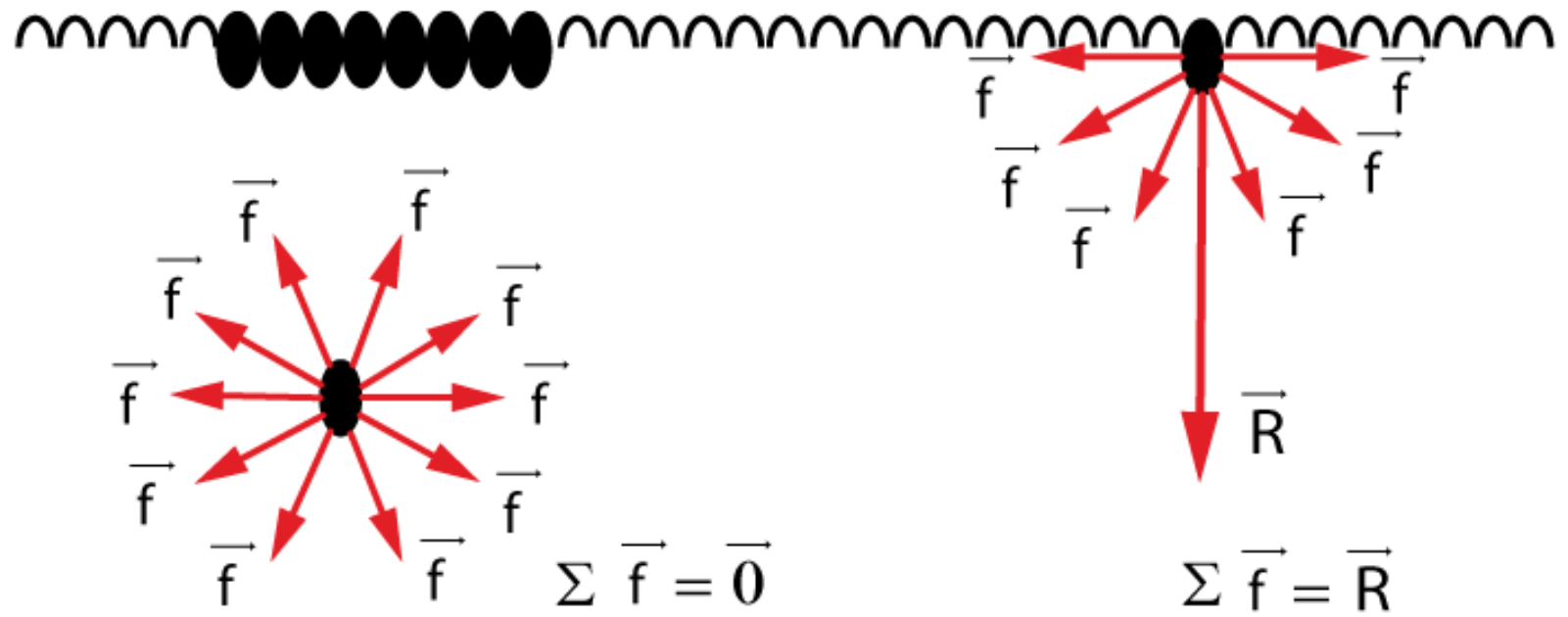


Figure I.5: Forces s'exerçant sur une molécule au sein et à la surface d'un liquide.

Cette tension tend toujours à réduire l'aire de l'interface: elle est par exemple à la base de la forme quasi-sphérique des fines gouttelettes de liquide en suspension dans un gaz.

La tension superficielle  $\sigma$  s'exprime en unités de force par unité de longueur et sa valeur est relative à l'interface entre deux fluides données. Ainsi, pour un interface:

---

**air-eau à 20°C**

$$\sigma = 0,0728 \text{ N/m}$$

**air-mercure**

$$\sigma = 0.487 \text{ N/m}$$

**eau-mercure**

$$\sigma = 0,375 \text{ N/m}$$

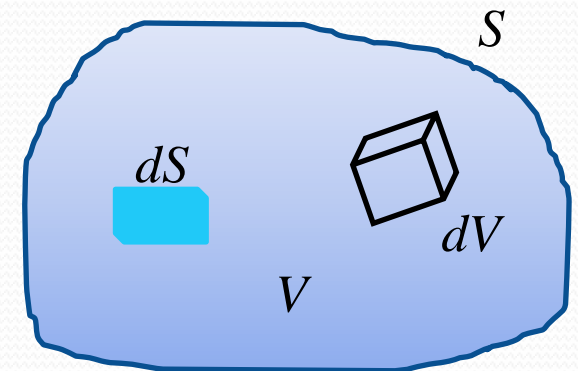
---

## I.3 Caractérisation des forces dans un écoulement

### I.3.1- Les forces

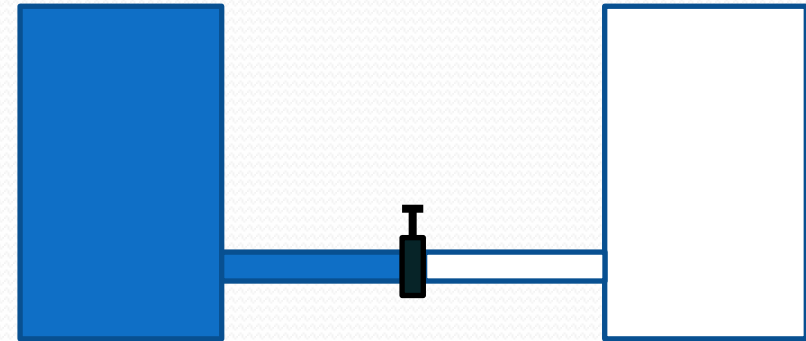
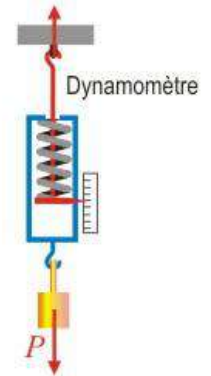
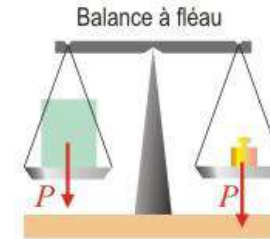
Les forces qui agissent sur un volume fini de fluide sont de deux types :

- Les forces de volumes : exercées sur chaque élément de volume  $dV$  (poids, force d'inertie, magnétique, ...)
- Les forces de surfaces : exercées sur chaque élément de surface  $dS$  (pression, frottement visqueux,...).



### I.3.1.1- Les forces de volumes :

- a) Les forces de pesanteur: provenant de la gravité.
- b) Les forces d'accélération pure : ces forces proviennent de la variation de la vitesse dans le temps. Si deux réservoirs sont à la même altitude, dont l'un plein d'eau et l'autre vide, reliés par une conduite horizontale de diamètre constant et muni d'une vanne. Une fois la vanne ouverte, l'eau s'écoulera. La variation de la vitesse crée au sien de l'écoulement une force d'accélération pure.



### c) Les forces d'accélération convective :

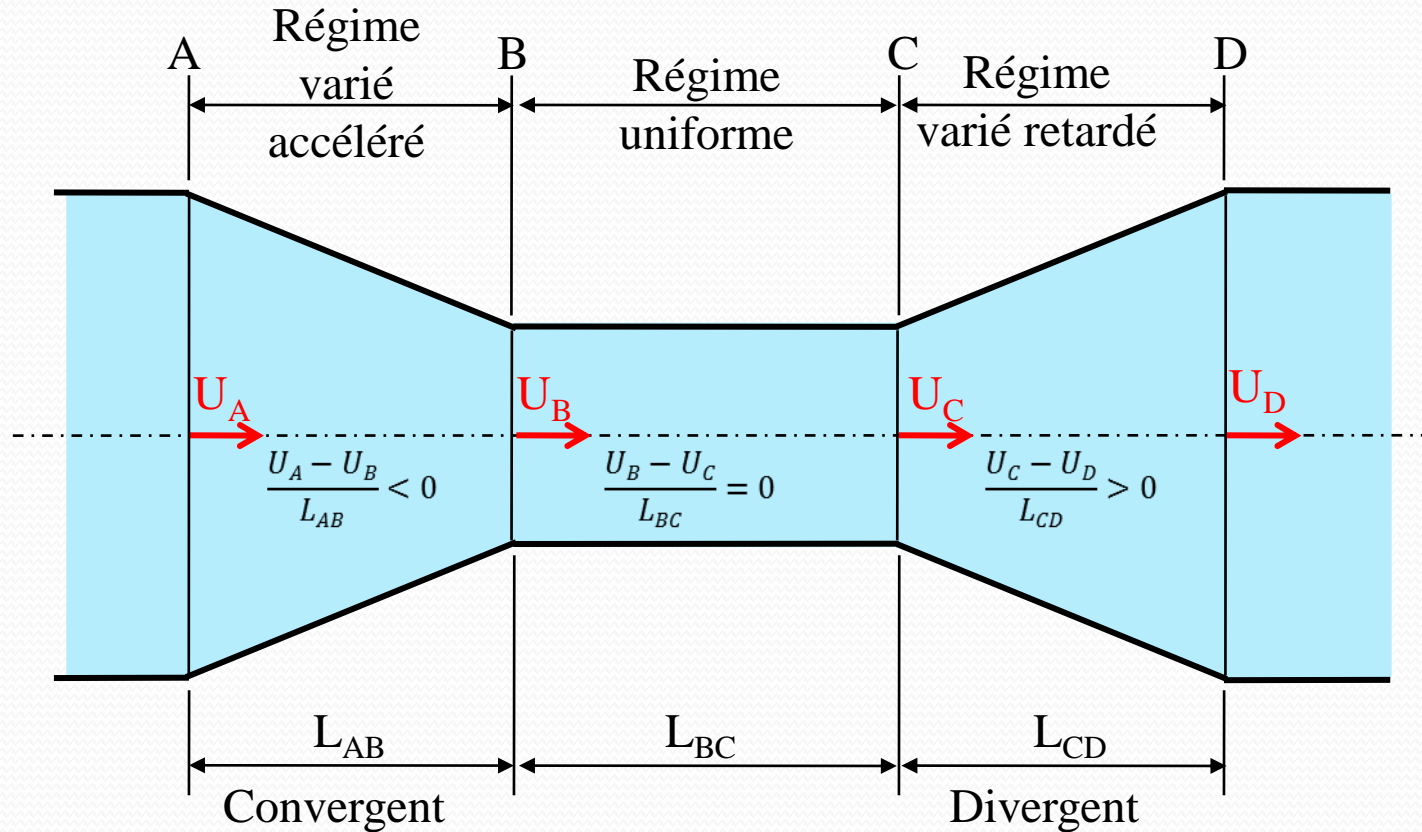


Figure I.6: Les forces d'accélération convectives

Ces forces proviennent de la variation de la vitesse dans l'espace. Dans l'entrée d'une conduite (diamètre constant avant le point **A**), l'écoulement ne varie pas dans le temps ( $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ ). Comme l'écoulement est permanent (débit d'entrée = débit de sortie), et la section  $S_A$  est plus grande que la section  $S_B$ , donc  $U_A < U_B$ . Cette variation de vitesse va provoquer une accélération, qui à son tour va générer une force qui sera appelée : **force de convection**.

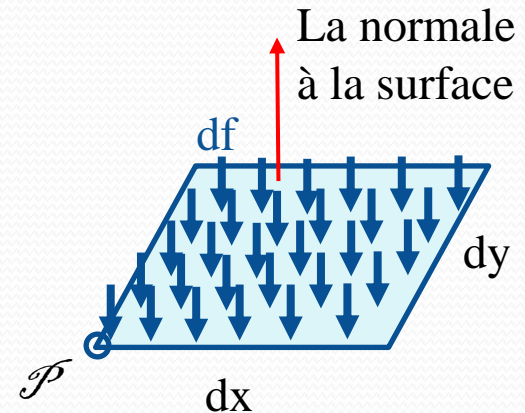
### I.3.1.2- Les forces de surfaces

#### a) Les forces de pression

La pression  $P$  est le rapport entre une force  $F$  agissant perpendiculairement à la surface  $A$  d'un fluide.

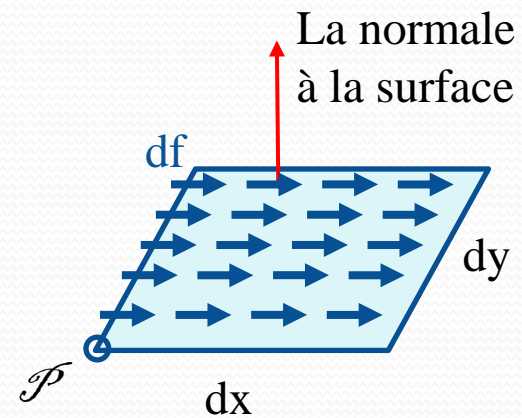
$$P = \frac{df}{dx.dy} = \frac{df}{dS} = \frac{F}{A}$$

En un point  $\mathcal{P}$  du fluide, la pression est identique quelque soit l'orientation de la normale à la surface.



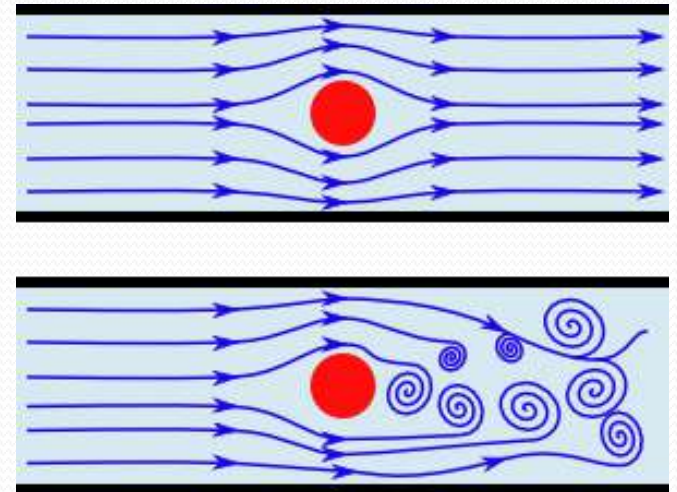
## b) Les forces de viscosité

Dans un fluide les molécules sont en mouvement relatif, qui génère des forces de frottement dues à la viscosité.



### c) Les forces de frottement dues à la turbulence

La turbulence joue un rôle important dans l'écoulement des fluides réels. En mouvement turbulent, l'intensité et la direction de la vitesse ponctuelle varient sans aucune régularité. La turbulence a tendance à freiner l'écoulement.



### **I.3.2- Importance des différentes forces**

L'importance relative des différentes forces agissant sur un liquide est paramétrée par des nombres adimensionnels représentant les rapports entre ces forces. L'analyse dimensionnelle permet de simplifier ces rapports. Les différentes dimensions utilisées sont:

L : longueur,

T : temps,

$\rho$  : masse volumique.

### I.3.2.1- Le nombre d'Euler

Ce nombre représente le rapport entre la force d'inertie (**Ma**) et les forces de pression (**pA**).

$$\frac{Ma}{pA} = \frac{(\rho L^3)(L/T^2)}{p L^2} = \rho \frac{V^2}{p}$$

Avec:

M : la masse,

a : accélération du fluide,

p : pression,

A : surface d'application de la pression,

V : vitesse caractéristique de l'écoulement.

Ce nombre est utilisé dans les calculs des forces (statiques et dynamiques) de l'eau sur une paroi ou un ouvrage.

### I.3.2.2- Le nombre de Reynolds

Ce nombre représente le rapport entre la force d'inertie (**Ma**) et les forces de la viscosité ( **$\tau A$** ).

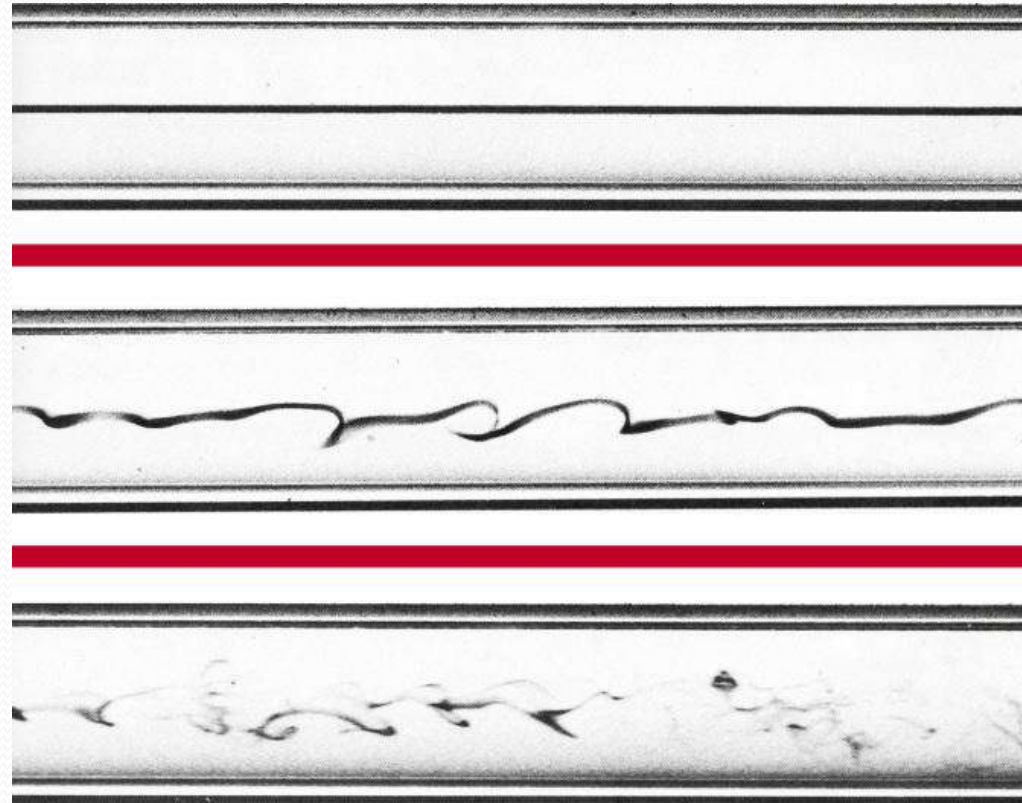
$$\frac{Ma}{\tau A} = \frac{(\rho L^3)(L/T^2)}{\mu \left(\frac{L}{T}\right) L^2} = \rho \frac{VL}{\mu}$$

Avec:

$\tau$ : la force de frottement par unité de surface,

A : surface d'application de la force de frottement,

L : longueur caractéristique de l'écoulement.



Régime laminaire  $Re < 2000$

Régime transitoire  
 $2000 < Re < 2500$

Régime turbulent  $Re > 2500$

### I.3.2.3- Le nombre de Froude

Ce nombre représente le rapport entre la force d'inertie (**Ma**) et les forces de pesanteur (**Mg**).

$$\frac{Ma}{Mg} = \frac{(\rho L^3)(L/T^2)}{(\rho L^3)g} = \frac{\rho L^2 V^2}{(\rho L^3)g} = \frac{V^2}{Lg}$$

Avec:

$g$  : l'accélération de la gravité,

$L$  : longueur caractéristique de l'écoulement,

$V$  : vitesse caractéristique de l'écoulement.

Le nombre de Froude permet de distinguer le régime fluvial ou torrentiel des écoulements à surface libre.



### I.3.2.3- Le nombre de Cauchy

C'est le rapport entre la force d'inertie (**Ma**) et les forces d'élasticité (**EA**).

$$\frac{Ma}{EA} = \frac{(\rho L^3)(L/T^2)}{EL^2} = \frac{\rho V^2}{E}$$

Avec:

E : module d'élasticité,

L : longueur caractéristique de l'écoulement,

V : vitesse caractéristique de l'écoulement.

### I.3.2.5- Le nombre de Weber

C'est le rapport entre la force d'inertie (**Ma**) et les forces de tension superficielle ( **$\sigma L$** ).

$$\frac{Ma}{\sigma L} = \frac{(\rho L^3)(L/T^2)}{\sigma L} = \frac{\rho L V^2}{\sigma}$$

Avec:

$\sigma$ : tension de surface,

$V$  : vitesse caractéristique de l'écoulement.

## I.4- Les équations de base

La détermination des caractéristiques d'un mouvement d'un fluide consiste à rechercher la pression et la vitesse en tout point. Pour y arriver, il faut établir les équations d'équilibre (ou de conservation) entre les différentes forces agissant sur un volume quelconque du fluide.

Ces équations sont :

- l'équation de continuité ou équation de conservation de la masse (**m**) du fluide, qui s'écrit comme suit :

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

- l'équation de la quantité de mouvement qui traduit l'équilibre entre la somme des forces extérieures (**F**) qui exercent une influence sur le fluide et le taux de la variation de la quantité de mouvement du fluide de masse (**m**), et qui s'écrit comme suit :

$$\frac{d(m.V)}{dt} = \sum F$$

## I.5- Outils mathématiques

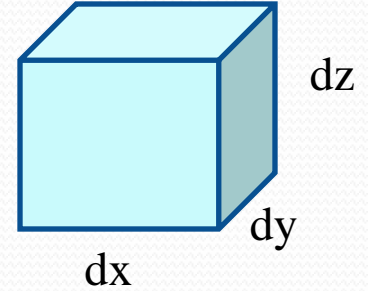
Élément de volume :  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

Dérivée partielle :  $\frac{\partial}{\partial x}$

Dérivée totale :  $dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

Gradient d'un scalaire :  $\overrightarrow{grad}(f) = \underline{grad}(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$



Gradient d'un vecteur :  $\underline{\underline{grad}} (\underline{V}) = \underline{\underline{grad}} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}$

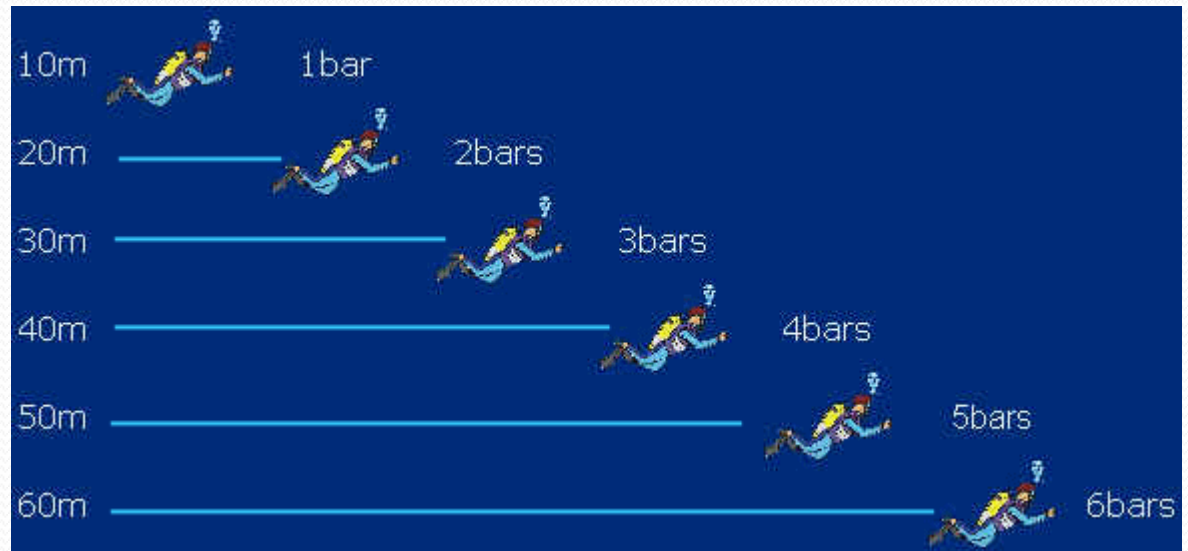
Divergence d'un vecteur :  $\text{div}(\underline{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

Rotationnel :  $\underline{\underline{Rot}} (\underline{V}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{bmatrix}$

# Chapitre II : HYDROSTATIQUE

## II.1 Définition

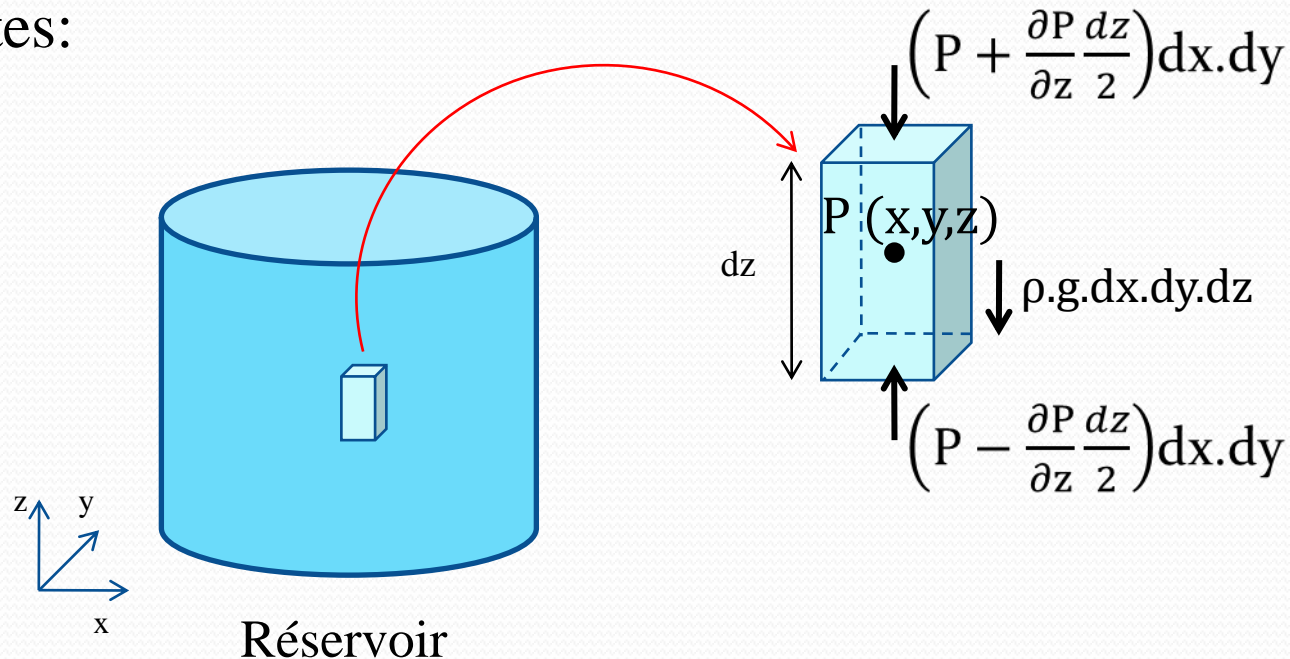
L'hydrostatique est une branche de la physique qui étudie les conditions d'équilibre des liquides et la répartition des pressions qu'ils transmettent au repos.



## II.2- Relations fondamentales de l'hydrostatique

L'ensemble des forces qui agissent sur élément fluide sont de deux types : **les forces de volume et les forces de surface.**

Considérant dans un réservoir un fluide au repos, dont on extrait un petit volume de forme parallélépipédique d'axe vertical  $z$ . soit  $P$  la pression en son centre. Ce volume est soumis aux forces verticales suivantes:



## a) Les forces de volume :

➤ **Forces de pesanteur** : il n'existe qu'une seule, et elle s'écrit comme suit:

$$F = \rho \cdot g \cdot (dx \cdot dy \cdot dz)$$

➤ **Forces d'accélération pure** : elles sont nulles car le fluide est au repos ( $v = 0$ ).

➤ **Forces d'accélération convective** : elles sont nulles car le fluide est au repos ( $v = 0$ ).

## b) Les forces de surface :

➤ **Forces de pression** : dans ce cas de figure, il existe deux forces de pression; une agit sur la surface supérieur et l'autre sur la surface inférieur, et elles s'écrivent comme suit:

✓ Force de pression sur la surface inférieur:

$$F_{pi} = \left( P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy$$

✓ Force de pression sur la surface supérieur:

$$F_{ps} = - \left( P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy$$

Comme le fluide est au repos, les forces de viscosité et les forces de turbulence sont nulles, car il n'y a pas de vitesse relative entre les particules du fluide

En équilibre de l'ensemble des forces, l'équation de l'hydrostatique s'écrit comme suit:

$$\sum F = \text{Forces d'inertie}$$

$$-\rho \cdot g \cdot (dx \cdot dy \cdot dz) + \left( P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy - \left( P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy = 0$$

Et nous aurons:

$$-\rho \cdot g - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

En ce qui concerne les deux autres directions, les équations de l'équilibre, donnent :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

En écrivant ces trois équations, on constate que la pression ne varie pas dans les directions x et y, ce qui veut dire que les pressions sont égales en tous points d'un plan horizontal. Cela est vérifié tant que l'on reste dans le même fluide ( $\rho$  est constante).

Donc la pression est dépendante de z, et on peut écrire que :

$$dP = - \rho . g . dz$$

## H.3- Variation de la pression

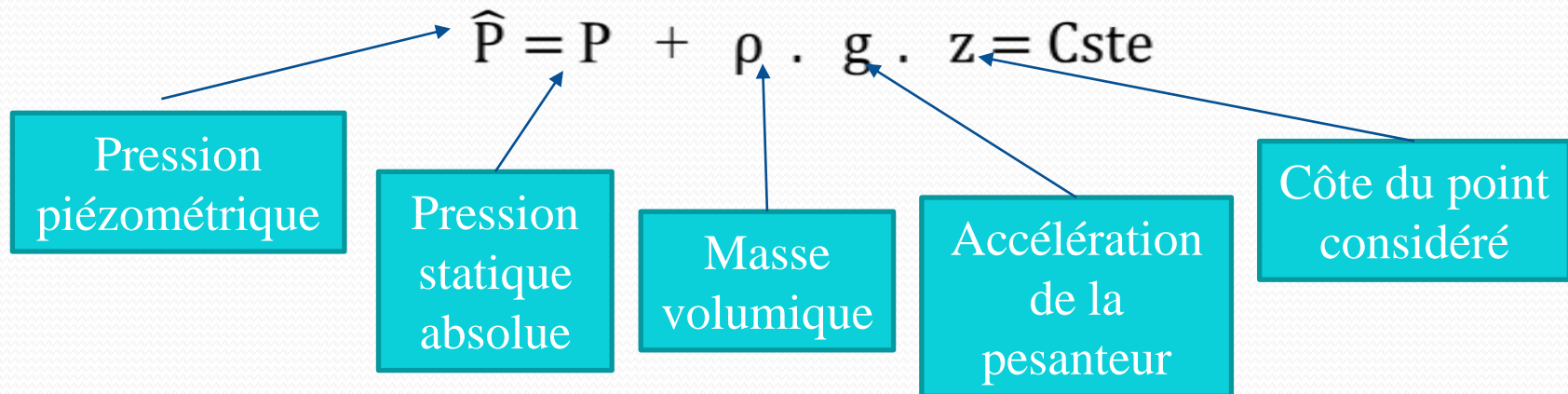
Dans un fluide incompressible ( $\rho = \text{constante}$ ), de l'équation :

$$dP + \rho \cdot g \cdot dz = 0$$

Donne :

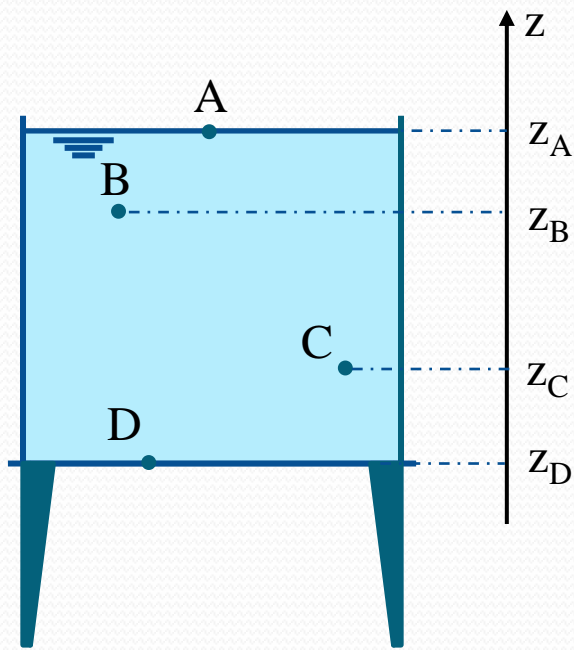
$$P + \rho \cdot g \cdot z = \text{Cste.}$$

Pour tous fluides au repos, nous arrivons à écrire que :



Ce qui nous amène à dire qu'en tous points d'un fluide au repos, la pression piézométrique est constante, et nous aurons:

$$\hat{P}_A = \hat{P}_B = \hat{P}_C = \hat{P}_D$$

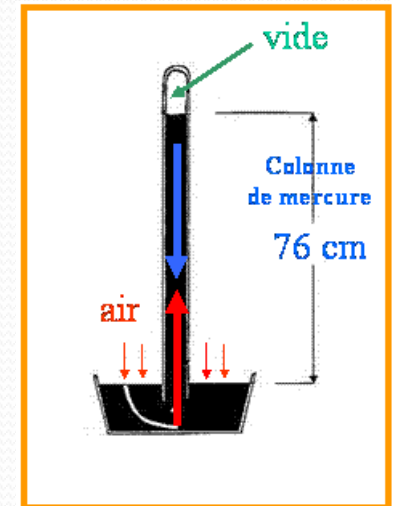


### Unités de mesure

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 101396 \text{ Pa} = 1,013 \text{ bar} \quad 10,33 \text{ mce} = 760 \text{ mm Hg}$$



## **Pression absolue et pression relative**

**La pression absolue** est la pression mesurée par rapport au vide absolu (c'est-à-dire l'absence totale de matière). Elle est toujours positive.

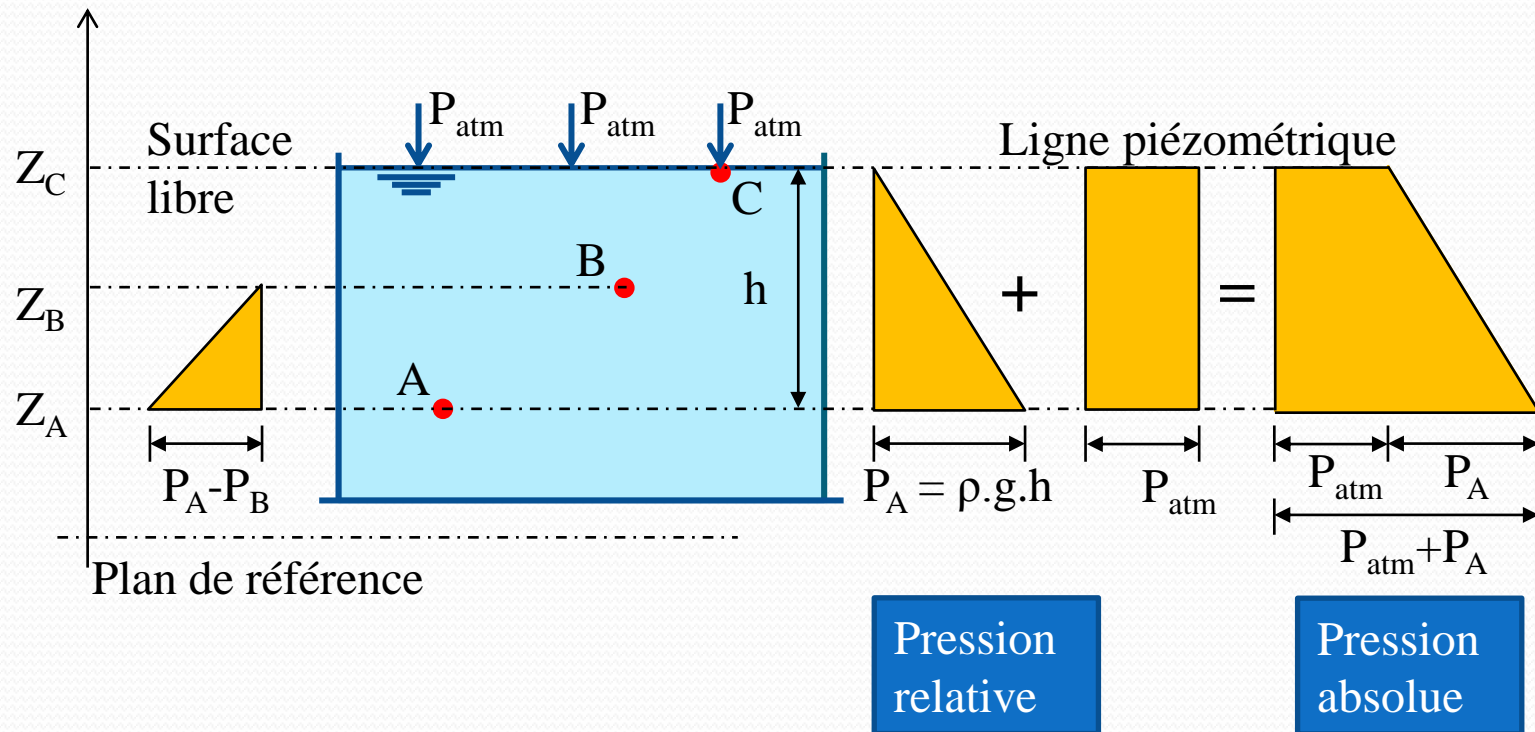
**La pression relative** se définit par rapport à la pression atmosphérique existant au moment de la mesure: cette pression peut donc prendre une valeur positive si la pression est supérieure à la pression atmosphérique ou une valeur négative si la pression est inférieure à la pression atmosphérique.

Les deux types de pressions correspondent physiquement à la même pression, elles sont simplement exprimées sur des échelles ayant des "zéros" différents.

La relation suivante permet de passer de l'une à l'autre:

$$P_{\text{absolue}} = P_{\text{relative}} + P_{\text{atmosphérique}}$$

Pour illustrer ceci, nous allons prendre un réservoir rempli d'eau, dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique ( $P_{\text{atm}}$ ).



Si nous appliquons l'équation de l'hydrostatique entre les points A et C, nous obtenons :

$$P_A + \rho.g.z_A = P_C + \rho.g.z_C = \text{Cste}$$

donc

$$P_A = P_C + \rho.g.(z_C - z_A)$$

Si nous considérons que :  $z_C - z_A = h$

Et sachant que

$$P_C = P_{\text{atm}}$$

Nous aurons :

$$P_A = P_{\text{atm}} + \rho.g.h$$

ce ci est la pression  
absolue mesurée en  
point A

Les instruments de mesure de pression, donnent des valeurs de ***pression relative*** (appelée aussi manométrique). Dans notre cas, la pression relative en point A est :

$$P'_A = P_A - P_{\text{atm}} = \rho.g.h$$

## II.4. Le principe de Pascal et ses applications

### Enoncé



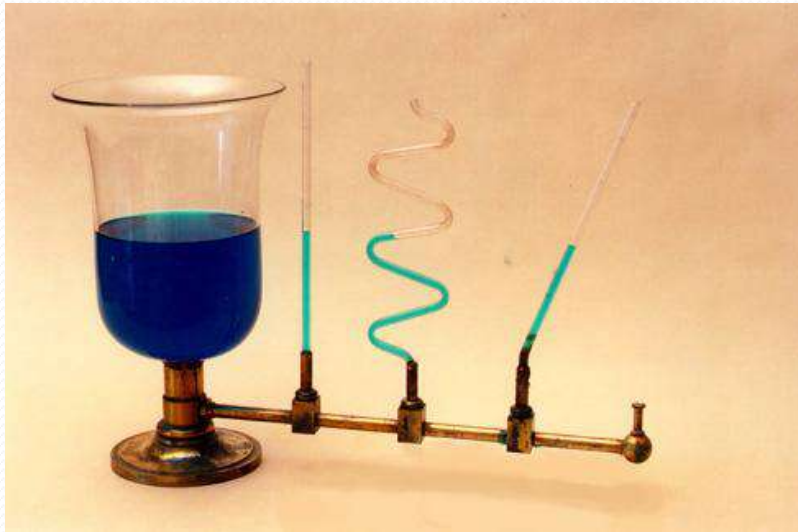
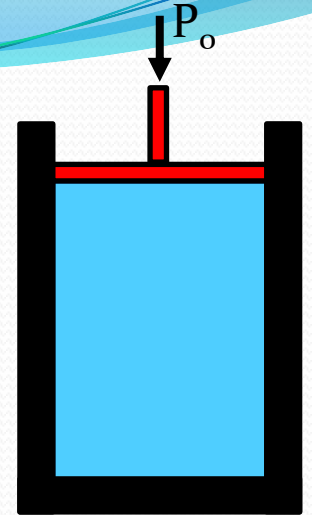
*Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.*

C'est-à-dire qu'une pression appliquée est transmise à toute la masse du liquide et dans toutes les directions.

Blaise PASCAL

19 juin 1623 - 19 août 1662

Si on applique une pression  $P_0$  en surface d'un liquide, elle sera ressentie, en tout point de ce liquide, même au fond du récipient, comme le montre la figure ci-après:



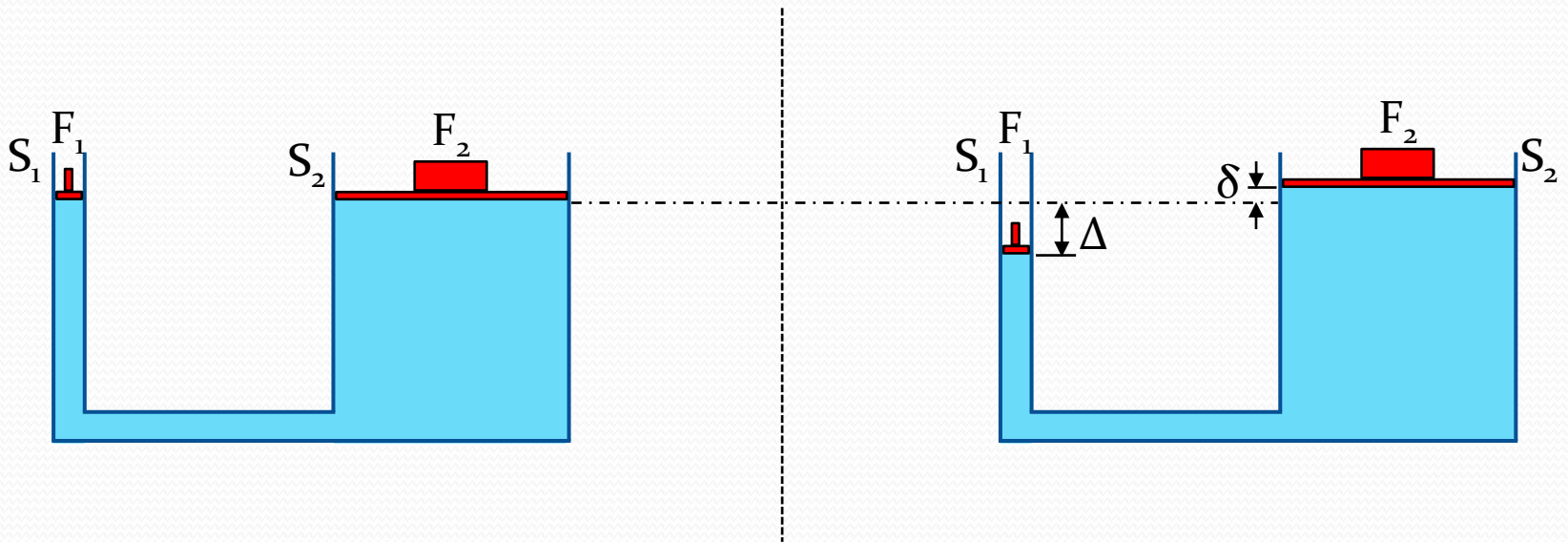
Le principe des vases communicants dit que la pression à une hauteur donnée dans un récipient qui contient un liquide est indépendante de la forme du récipient.

## La presse hydraulique

$$F_1 = P_1 \cdot S_1 \quad \text{et} \quad F_2 = P_2 \cdot S_2$$

En appliquant le principe de Pascal, c'est-à-dire  $P_1 = P_2$ , on aura:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \text{et donc:} \quad F_2 = S_2 \frac{F_1}{S_1} = F_1 \left( \frac{S_2}{S_1} \right) \gggg F_1$$



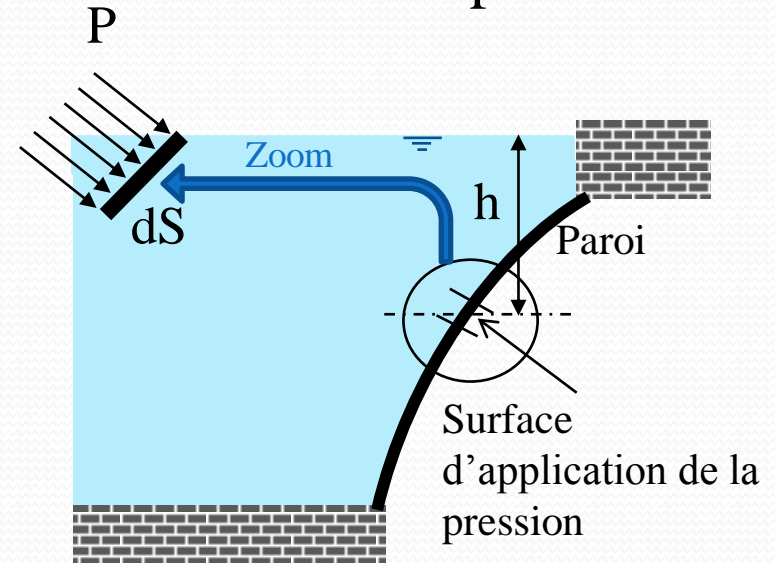
## II.5. Poussée hydrostatique sur des parois

### II.5.1. Principe

La poussée hydrostatique sur une paroi provient des forces de pressions du fluide agissant sur cette surface.

La caractérisation de la pression du fluide sur la surface dépend de :

- ✓ **l'intensité** : la pression dépend de la profondeur d'eau  $h$ . ( $P = \rho \cdot g \cdot h$ ),
- ✓ **la zone d'application** : la pression s'applique sur un élément de surface ( $ds$ ),
- ✓ **la direction** : la pression est toujours perpendiculaire à la surface d'application.

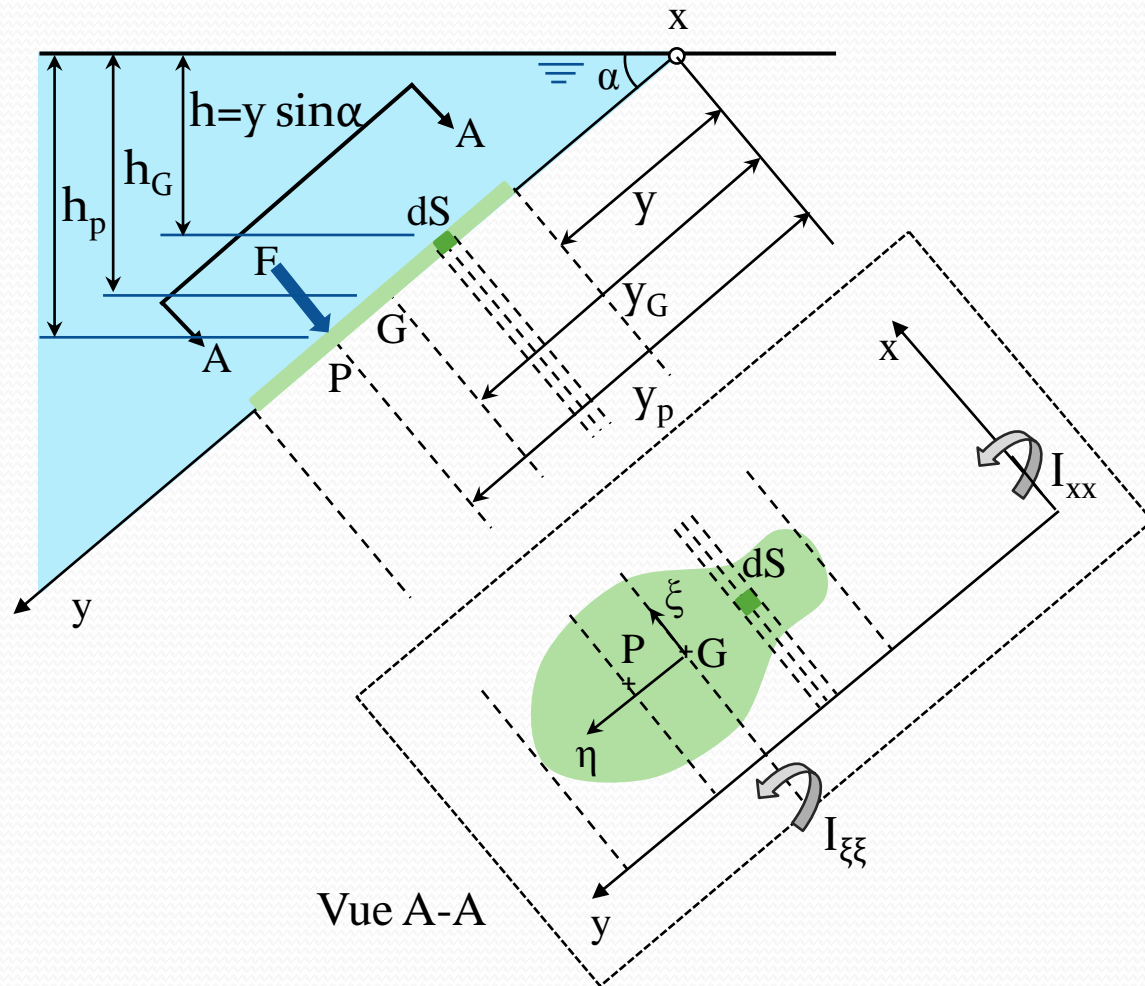


$$\text{La force agissant sur l'élément } dS : dF = P \cdot dS = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS$$

## II.5.2. L'action d'un fluide sur une paroi plane inclinée :

La figure ci-après représente une paroi plane de section quelconque immergée dans l'eau. On définit un repère  $(x,y)$  où l'axe  $(x)$  est sur la surface libre et  $(y)$  dirigé vers le bas.

Le point  $G(x_G, y_G)$  est le centre de gravité de la section. Le repère  $(\xi, \eta)$  est défini comme étant une translation du repère  $(x,y)$  centré en  $G$ .



L'intensité de la force résultante agissant sur la surface S est définie par la relation :

$$F = \iint_S dF = \rho \cdot g \iint_S h dS$$

L'intégration de cette équation donne :

$$F = \rho \cdot g \cdot h_G \cdot S$$

$h_G$  : hauteur d'eau du centre de gravité de la paroi immergée à la surface libre.

S : surface de la paroi immergée.

L'action de l'eau sur la paroi plane est la résultante des forces pressantes, et qui est égale à la pression au niveau du centre de gravité multipliée par la surface de la paroi immergée.

Le point d'application de la force résultante  $P(x_p, y_p)$  est appelé centre de pression ou centre de poussée.

La position de ce point est définie par la position du centre d'inertie des surfaces élémentaires ( $dS$ ) pondérées par la pression sur chaque surface, ce qui revient à déterminer le moment équivalent des forces de pression, c'est-à-dire :

$$x_p \cdot F = \iint x dF \quad \& \quad y_p \cdot F = \iint y dF$$

Dans la grande majorité des cas, les surfaces sont symétriques par rapport à l'axe  $\eta$ , ce qui revient à dire que  $x_p = x_G$ . Ne reste alors que la seconde coordonnée à déterminer.

Et donc :

$$y_p = \frac{\iint y dF}{F}$$

En utilisant :  $dF = \rho g h dS$  et  $F = \rho g h_G S$

puis en remarquant que :  $h = y \sin \alpha$

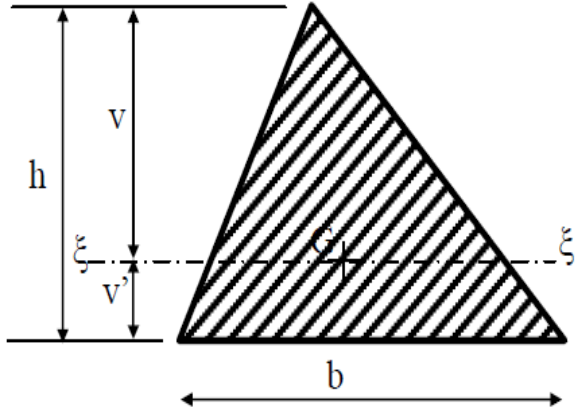
il vient l'expression suivante :

$$y_p = \frac{\iint y^2 dS}{\iint y dS} = y_G + \frac{I_{\xi\xi}}{y_G \cdot S}$$

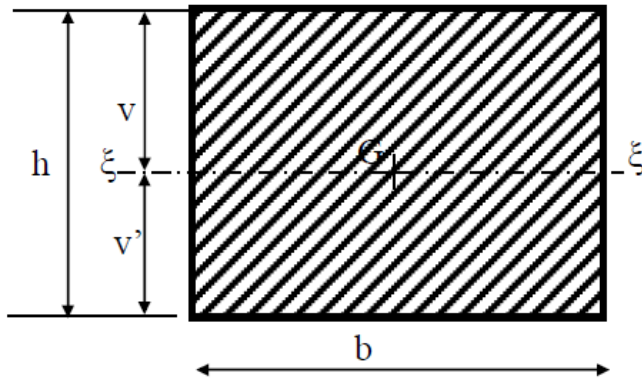
# Le centre de gravité, la surface et l'inertie pour quelques formes de surfaces planes.

surfaces

Position du centre de gravité, surface et inertie



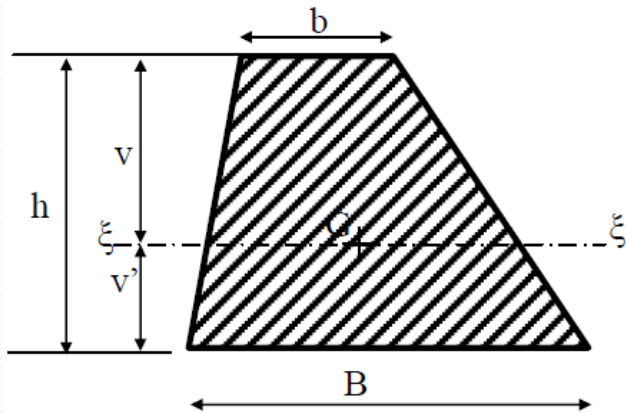
$$v = \frac{2h}{3} ; v' = \frac{h}{3}$$
$$S = \frac{bh}{2} ; I_{\xi\xi} = \frac{bh^3}{36}$$



$$v = \frac{h}{2} ; v' = \frac{h}{2}$$
$$S = bh ; I_{\xi\xi} = \frac{bh^3}{12}$$

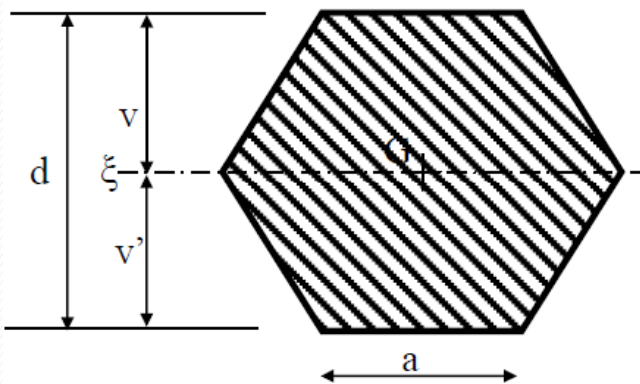
surfaces

Position du centre de gravité, surface et inertie



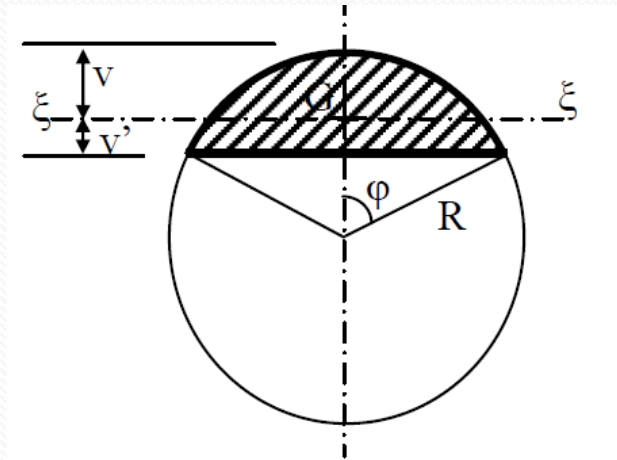
$$v = \frac{h}{3} \left( \frac{2B + b}{B + b} \right) ; v' = \frac{h}{3} \left( \frac{B + 2b}{B + b} \right)$$

$$S = \frac{h}{2} (B + b) ; I_{\xi\xi} = \frac{h^3 (B^2 + 4Bb + b^2)}{36(B + b)}$$



$$v = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} ; v' = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{d^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} ; I_{\xi\xi} = \frac{5d^4}{48\sqrt{3}} = \frac{5a^4 \sqrt{3}}{16}$$

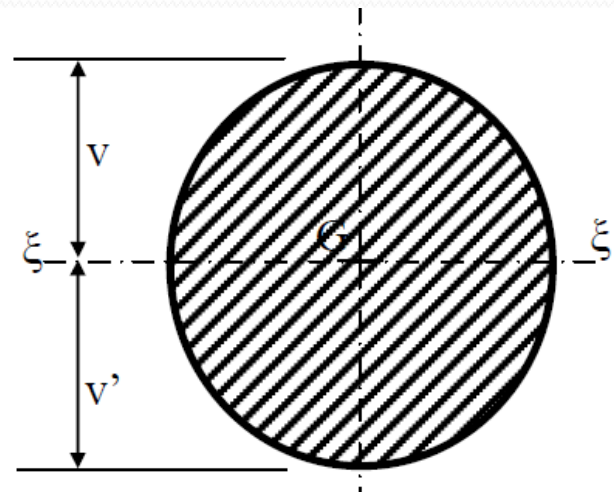


$$v = R \left( 1 - \frac{4 \sin^3(\varphi)}{3(2\varphi - \sin(2\varphi))} \right)$$

$$v' = R(1 - \cos(\varphi)) - v$$

$$S = \frac{R^2}{2} (2\varphi - \sin(2\varphi))$$

$$I_{\xi\xi} = \frac{R^4}{16} (4\varphi - \sin(4\varphi)) - \frac{R^4}{9} \frac{(1 - \cos(2\varphi))^3}{(2\varphi - \sin(2\varphi))}$$



$$v = R ; v' = R$$

$$S = \pi R^2 ; I_{\xi\xi} = \frac{\pi R^4}{4}$$

## II.5.2. L'action d'un fluide sur une paroi à surface gauche :

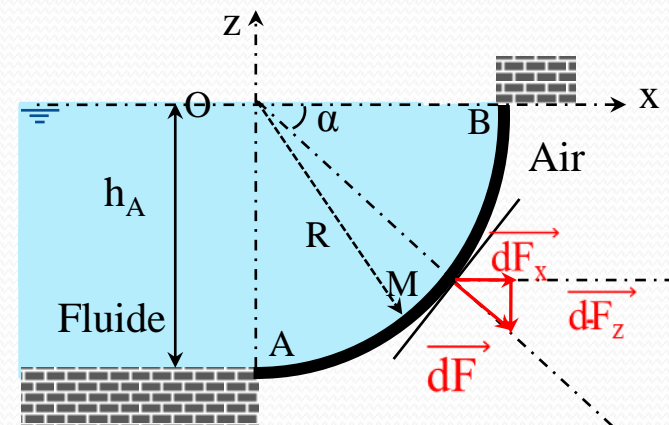
Prenons le cas particulier d'une paroi à surface gauche en forme d'un quart de cercle (rayon  $R$ , longueur  $l$ ). Afin de pouvoir intégrer, il faut passer en coordonnées cylindriques, d'où l'origine des axes se confond avec le centre du cercle.

Comme les forces  $\vec{dF}$  n'ont pas toutes la même direction, donc il faut projeter sur les axes  $(\vec{Ox}, \vec{Oz})$ , et ensuite faire la somme de ces projections.

$$\hat{P}_B = \hat{P}_M$$
$$\hat{P}_B = P_B + \rho \cdot g \cdot z_B$$

avec  $P_B = P_{\text{atm}}$  et  $z_B = 0$

$$\hat{P}_M = P + \rho \cdot g \cdot z$$



Donc :

$$P_{\text{atm}} = P + \rho \cdot g \cdot z \quad \Rightarrow \quad P - P_{\text{atm}} = - \rho \cdot g \cdot z \quad (\text{avec } z < 0)$$

$$dF = (P - P_{\text{atm}}) dS = - \rho \cdot g \cdot z \cdot dS$$

Si  $\alpha$  est l'angle que fait l'axe (OM) avec l'axe des abscisses, nous aurons :

$$dF_x = dF \cos \alpha \quad \& \quad dF_z = dF \sin \alpha$$

$$z = R \sin \alpha \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0$$

Si nous intégrons de 0 à  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha$  est décroissant donc  $d\alpha < 0$  et comme  $dS > 0$ , nous pourrions écrire :

$$dS = -R \cdot d\alpha \cdot l$$

Ce qui donne

$$dF_x = (-\rho \cdot g) \cdot (R \sin \alpha) \cdot (-R \cdot d\alpha \cdot l) \cos \alpha = \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot l \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha$$

$$dF_z = (-\rho \cdot g) \cdot (R \sin \alpha) \cdot (-R \cdot d\alpha \cdot l) \sin \alpha = \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot l \sin^2 \alpha \, d\alpha$$

$$\bar{F}_x = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot l \sin \alpha \underbrace{\cos \alpha \, d\alpha}_{d(\sin \alpha)} = \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot l \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \, d(\sin \alpha) = \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot l \left[ \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right]_0^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\bar{F}_x = \rho \cdot g \frac{R^2 \cdot l}{2}$$

$$\bar{F}_z = \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot l \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha$$

Admettons que :

$$X = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \, d(-\cos \alpha) = [-\sin \alpha \cdot \cos \alpha]_0^{-\frac{\pi}{2}} - \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \, d\alpha$$

Avec :

$$[-\sin \alpha \cdot \cos \alpha]_0^{-\frac{\pi}{2}} = 0 \quad \& \quad -\cos^2 \alpha \, d\alpha = (1 - \sin^2 \alpha) \, d\alpha$$

$$\text{Soit : } X = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \alpha) \, d\alpha = -\frac{\pi}{2} - X \quad \Rightarrow \quad X = -\frac{\pi}{4}$$

$$\bar{F}_z = \rho \cdot g \frac{R^2 \cdot l \cdot \pi}{4}$$

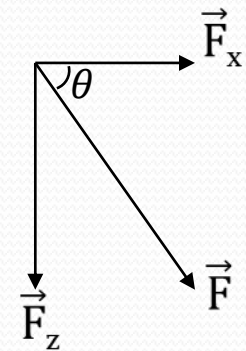
Comme :  $\frac{R^2 \cdot l \cdot \pi}{4} = V$

où  $V$  : volume du fluide se trouvant sur la paroi immergée.

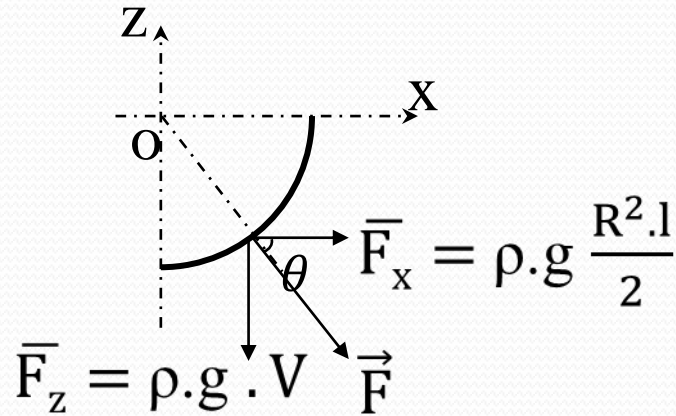
$$\bar{F}_z = \rho \cdot g \cdot V = \bar{W}$$

Les forces suivant l'horizontale représente la force hydrostatique. Les forces suivant la verticale représente le poids de l'eau  $W$ . En faisant la composition vectorielle des forces  $F_x$  et  $F_z$ , on en déduit  $F$ .

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$$
$$\|\vec{F}\| = \rho \cdot g \frac{R^2 \cdot l}{2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}$$
$$\text{Direction } \text{tg } \theta = \frac{F_z}{F_x}$$



## Récapitulatif



Poids du fluide contenu dans le quart du cercle.

Poussée hydrostatique sur la surface projetée verticalement qui contiendrait une hauteur  $R$  de fluide.

## II.6. La poussée d'Archimède

Soit un corps en équilibre immergé dans un fluide, et est soumis à des forces sur ses six faces.

Sur les faces verticales, les forces s'annulent deux par deux alors que sur les faces horizontales, nous avons :

- Surface supérieure

$$F_1 = - \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot S_1$$

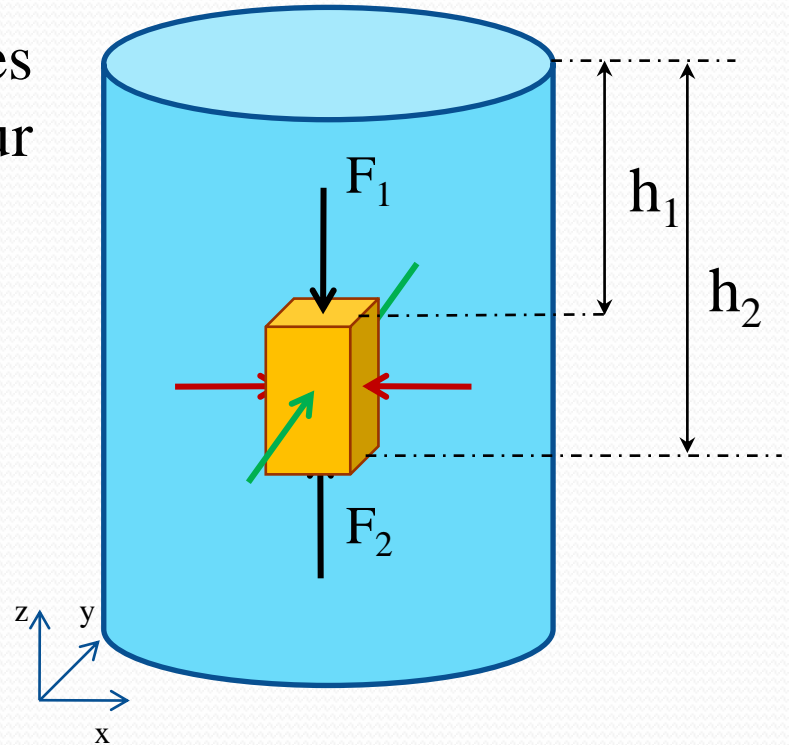
- Surface inférieure

$$F_2 = \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot S_2$$

Avec  $S_1 = S_2 = S$

La résultante de deux forces est égale :

$$F = F_1 + F_2 = \rho \cdot g \cdot S(h_2 - h_1)$$



Donc

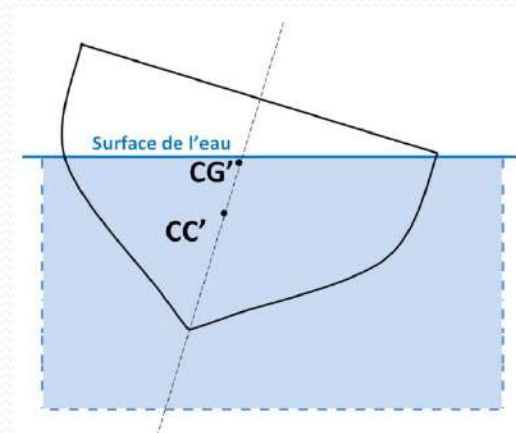
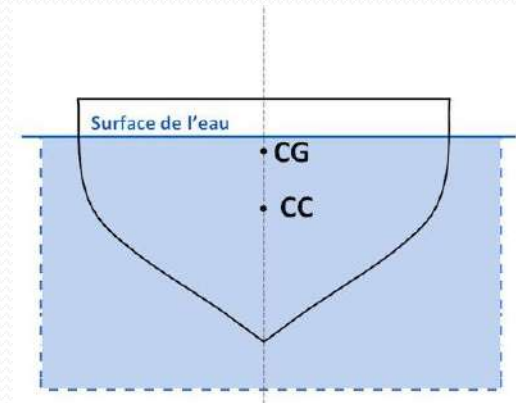
$$F = \rho_{\text{fluide}} \cdot g \cdot V_{\text{solide}}$$

Cette force est appelée poussée d'Archimède.



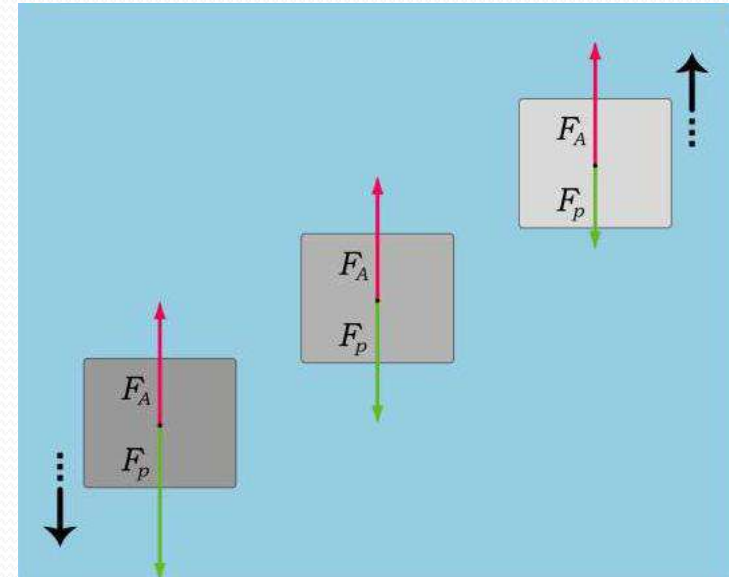
Le principe d'Archimède (287{212 avant Jésus-Christ) :

Tout corps plongé dans un fluide en équilibre est soumis de la part de celui-ci à une poussée verticale dirigée de bas en haut, égale au poids du volume de fluide déplacé, et appliqué au centre de masse de ce volume (centre de carène). »



## Conséquences :

- si  $F = P$ , le corps est en équilibre dans le fluide – leurs densités respectives sont identiques ;
- si  $F > P$ , le corps remonte jusqu'à la surface jusqu'à ce qu'il y ait équilibre des forces – la densité du corps est inférieure à celle du liquide ;
- si  $F < P$ , le corps coule au fond du réservoir et exerce une force  $P - F$  sur le fond de celui-ci – la densité du corps est supérieure à celle du liquide

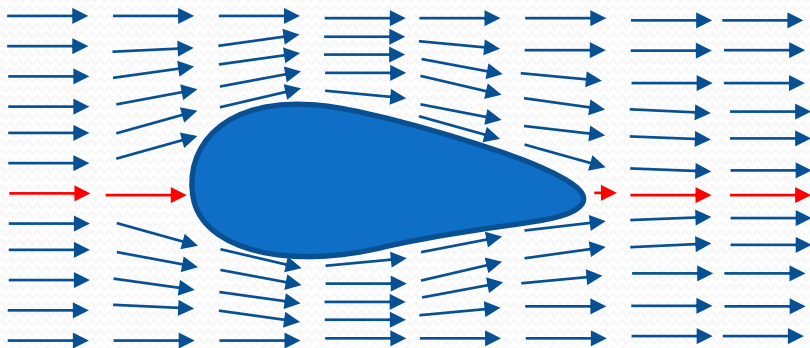


CHAPITRE III :

# CINEMATIQUE DES FLUIDES

## III.1. Introduction

La *cinématique des fluides* décrit le mouvement du fluide (en utilisant les notions de lignes de courant et champ de vitesse) et ses conséquences sans considération de la nature des forces provoquant le mouvement. On prend en compte seulement les relations entre les positions des particules fluides et le temps.



Champ des vitesses de l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle.

La description du fluide en mouvement peut se faire par deux méthodes.



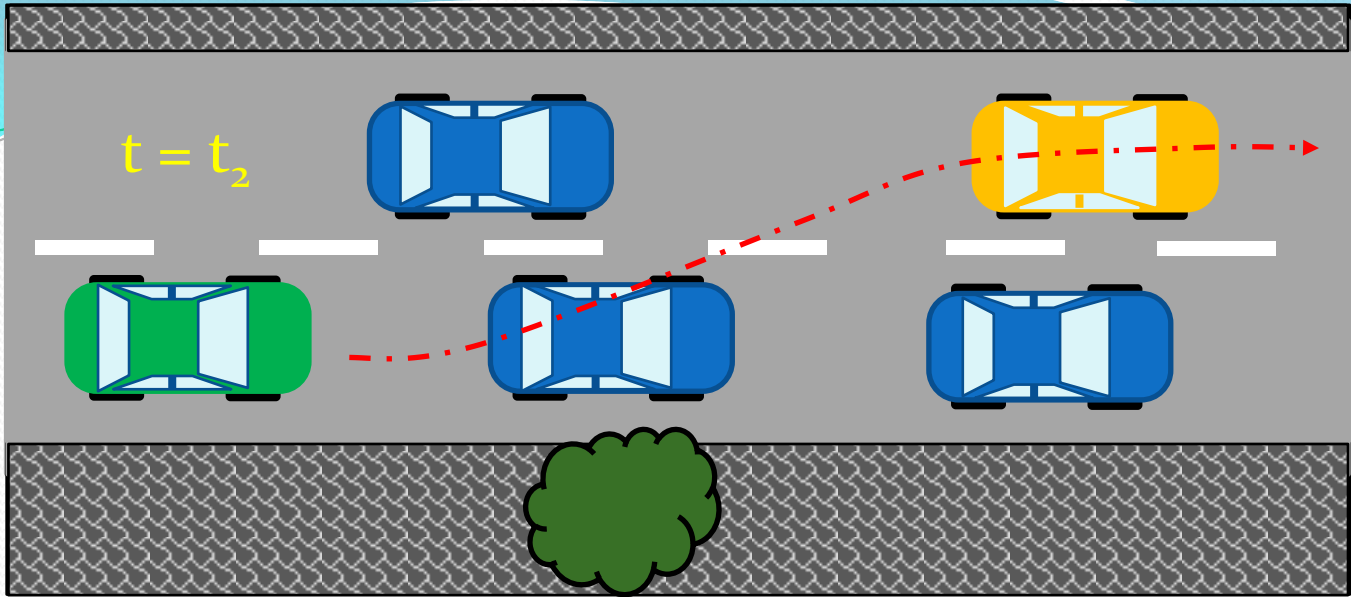
Joseph-Louis Lagrange  
25 janvier 1736/10 avril 1813

On peut choisir de suivre les particules fluides dans leur mouvement.  $\Rightarrow$  Description lagrangienne



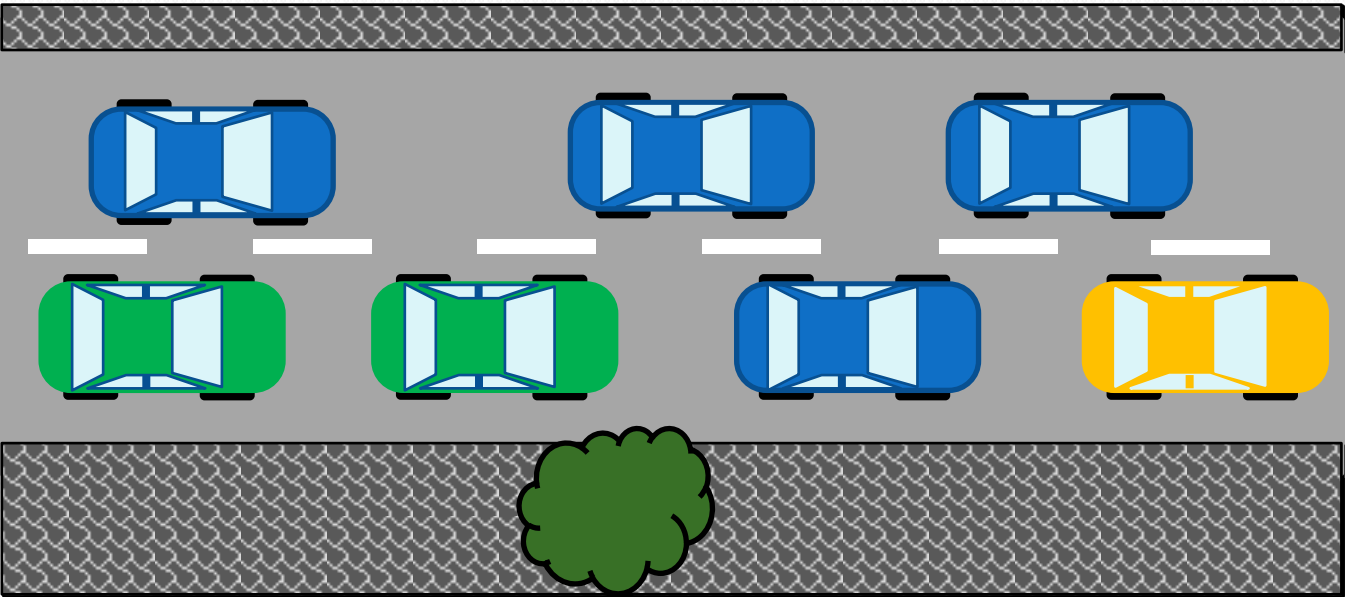
Leonhard Euler  
15 avril 1707 /le 18 septembre 1783

On peut faire un cliché à un instant donné du champ de vitesse de toutes les particules fluides.  $\Rightarrow$  Description eulérienne



En suivant des yeux uniquement la voiture jaune, on se place en formalisme lagrangien.

En observant comment circulent les voitures autour de l'arbre; on se place en formalisme eulérien.



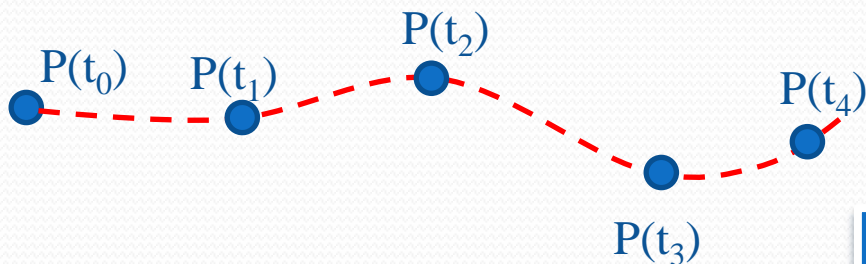
## III.2. Description lagrangienne

La méthode de Lagrange considère que la particule fluide est individualisée et est suivie dans ses mouvements. Et ainsi, on peut exprimer les coordonnées d'un point  $M$  de la masse fluide en fonction du temps et de la position initiale du point considéré.

$$M \begin{cases} x = f(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = \varphi(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = \psi(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

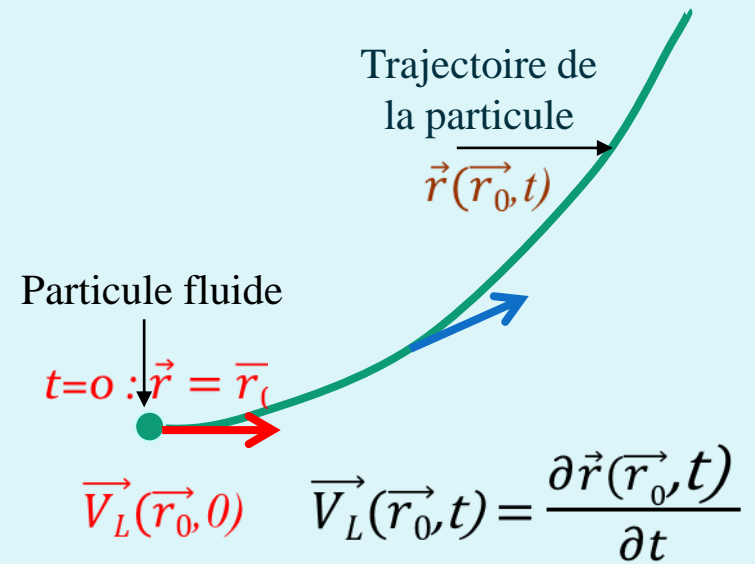
$x, y, z$  sont les variables de Lagrange

La trajectoire d'une particule fluide est définie comme le chemin suivi par cette particule au cours du temps, c'est-à-dire l'ensemble des positions successives de cette particule au cours de son mouvement.



Trajectoire d'une particule fluide P.

Dans la description lagrangienne, la position de la particule fluide  $M$  est repérée par le vecteur  $\vec{r}_M(t)$ . Les variables de Lagrange sont le temps  $t$  et la position de  $M$  à un instant de référence  $t_0 : \vec{r}_M(t_0)$ .



On photographie avec un temps de pose de longue durée après marquage d'un point de fluide

La trajectoire de la particule fluide est obtenue mathématiquement par intégration temporelle du champ de vitesse lagrangien  $\vec{V}_L(\vec{r}_0, t)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{V}(\vec{r}_0, t') dt'$$

Trajectoire de la particule fluide

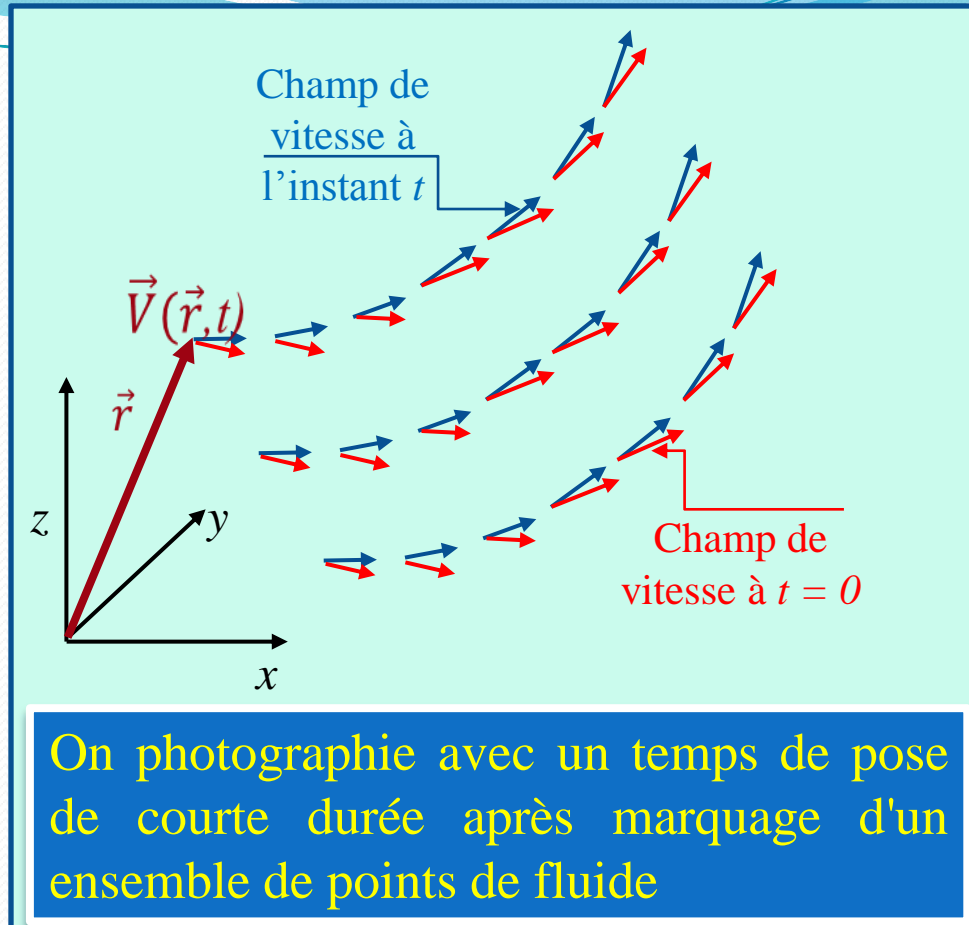
### III.3. Description eulérienne

La méthode d'Euler considère un point fixe de l'espace et l'étudie, en fonction du temps, ce qui se produit en ce point. Il sera, donc, question de déterminer la vitesse des particules fluides qui passent successivement par ce point, en fonction du temps. La vitesse  $\vec{V}$  étant déterminée par ses trois composantes  $(u, v, w)$  sur trois axes  $OX, OY$  et  $OZ$ , avec :

$$\vec{V} \begin{cases} u = f(x, y, z, t) \\ v = \varphi(x, y, z, t) \\ w = \psi(x, y, z, t) \end{cases}$$

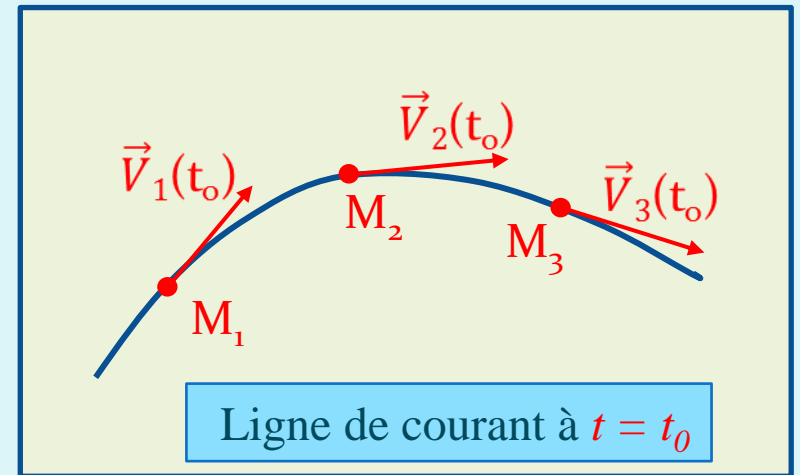
$u, v$  et  $w$  sont les variables d'Euler

Dans la description eulérienne, on se place en un point fixe  $M$  du référentiel d'étude.  $M$  est repéré par le vecteur  $\vec{r}$  et la vitesse de la particule fluide qui se trouve en  $M$  à l'instant  $t$  est  $\vec{V}(\vec{r}, t)$ . Les variables d'Euler sont  $\vec{r}$ , position du point d'observation et le temps  $t$ . Ces variables sont indépendantes.

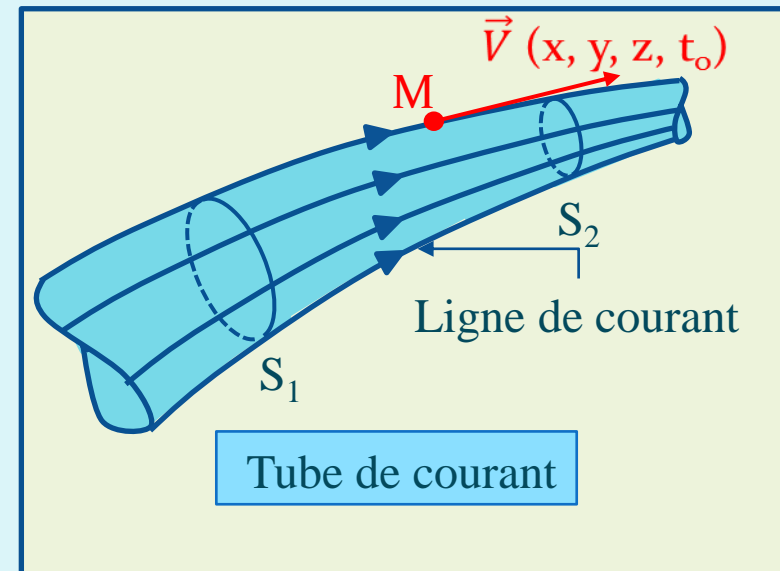


Le système eulérien définit, à chaque instant  $t$ , un vecteur vitesse  $V(x, y, z, t_0)$  en un point  $M$  et un champ de vitesse dans la masse fluide ; le faisceau des enveloppes de ce champ de vitesse constitue les lignes de courant.

- Les lignes de courants sont des courbes dont la direction tangente en chacun de ses points est la direction du vecteur vitesse à l'instant  $t_0$ .



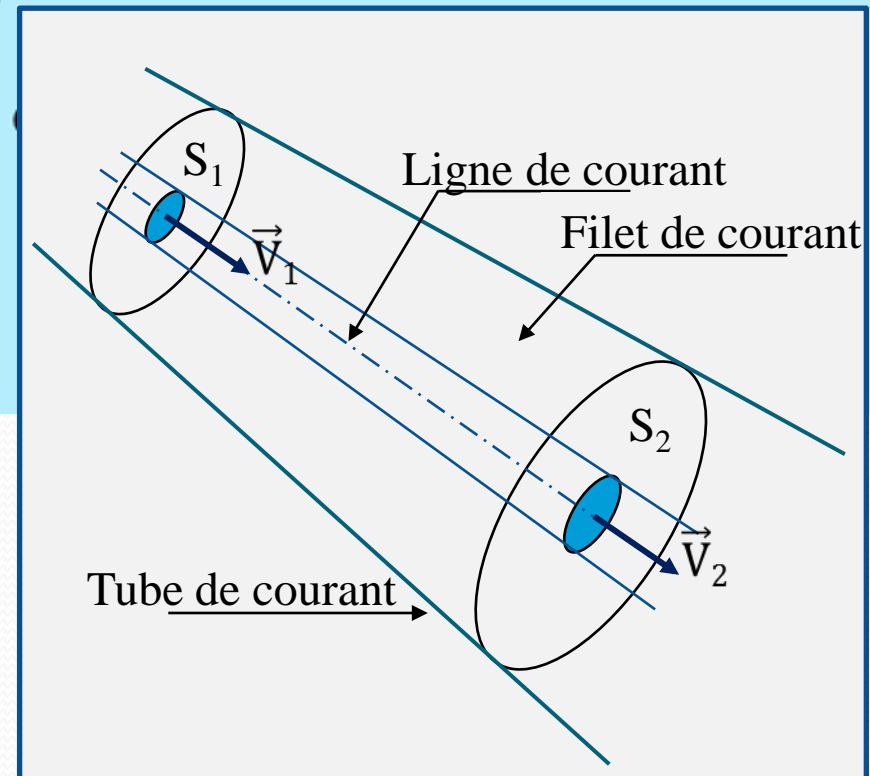
- Un tube de courant est l'ensemble des lignes de courants s'appuyant sur un contour fermé.
- Le volume fluide situé à l'intérieur du tube de courant constitue le filet de courant.



Du moment que le vecteur vitesse  $\vec{V}$  est tangent à la ligne de courant, les équations différentielles qui relient les composantes de la vitesse sont :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

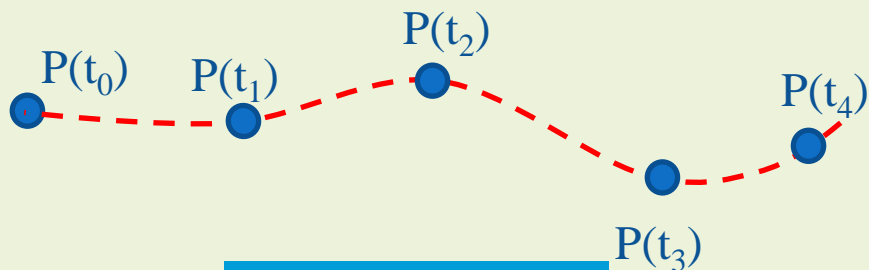
Le long d'une ligne de courant



## Remarque importante

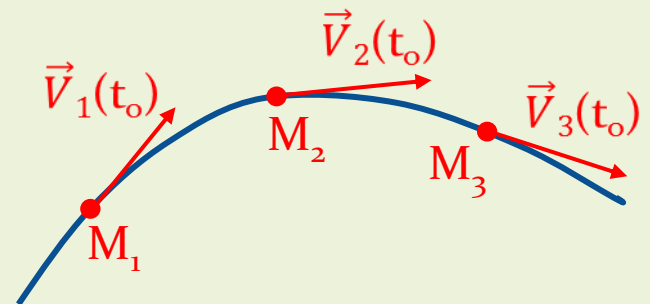
- Il est impératif de savoir que la trajectoire et la ligne de courant sont deux notions fondamentalement différentes.
- Il apparaît que la ligne de courant est relative à un même instant mais regroupe des particules différentes alors que la trajectoire, qui réfère à une même particule, est une courbe paramétrée en temps.

Même particule, instants différents

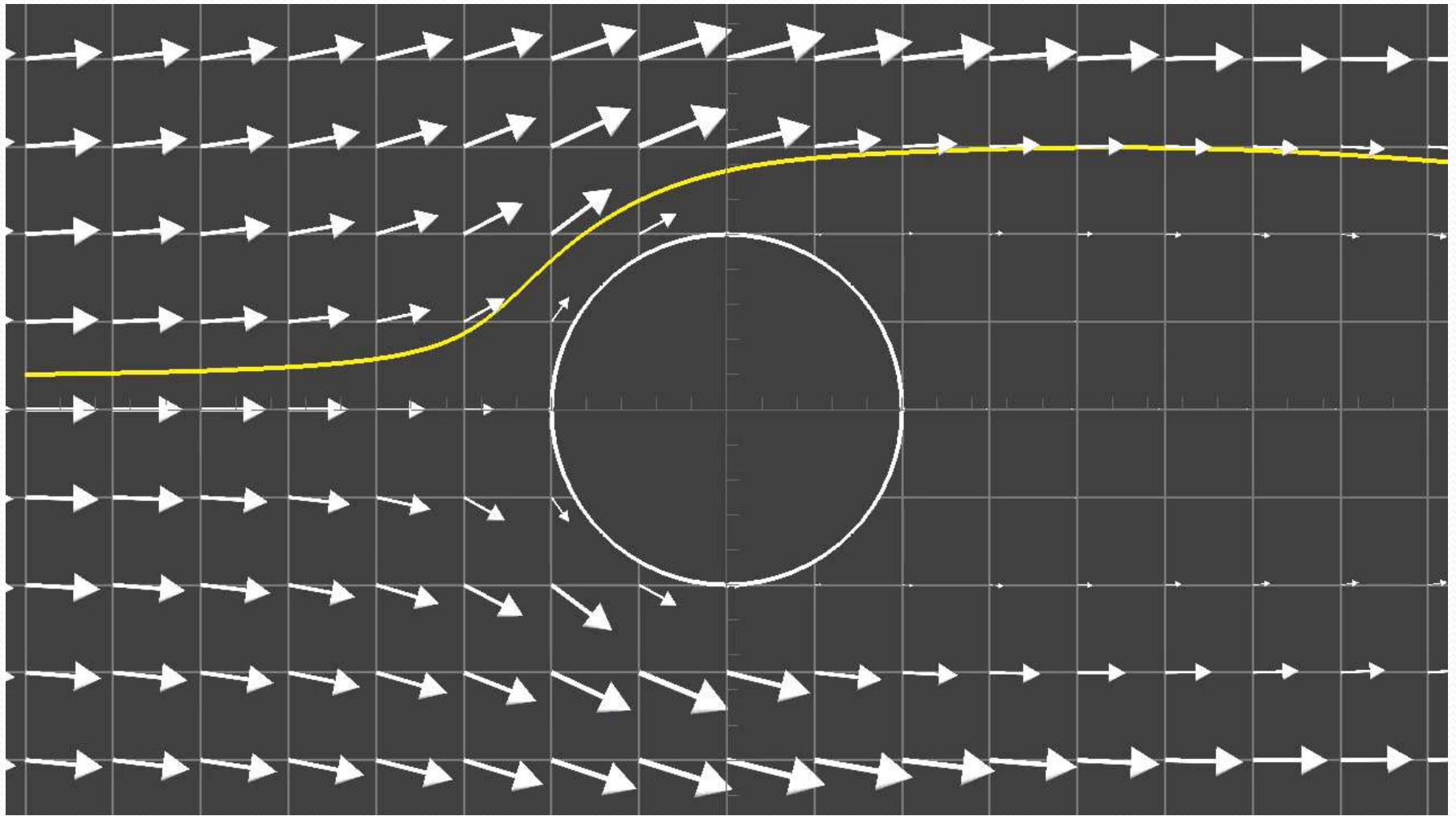


La trajectoire

Même instant, particules différentes

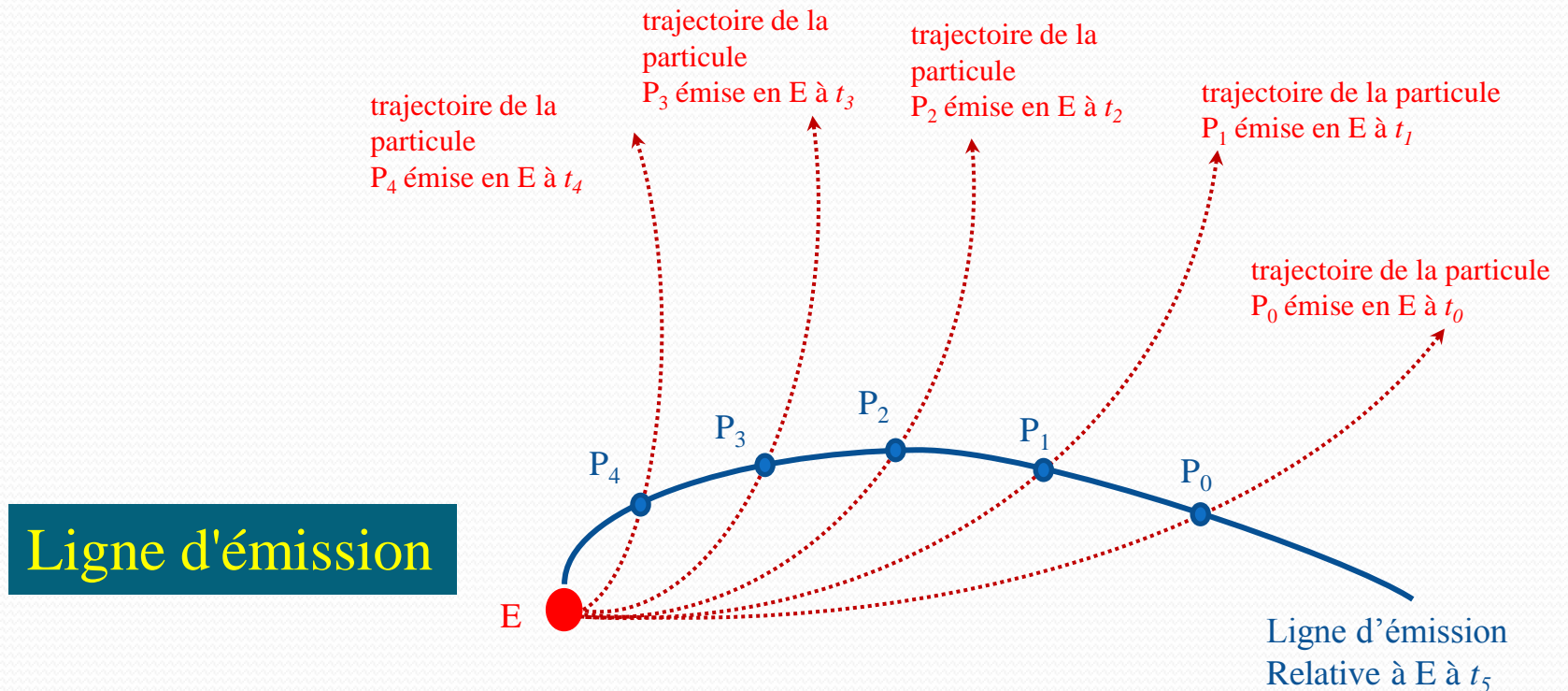


La ligne de courant



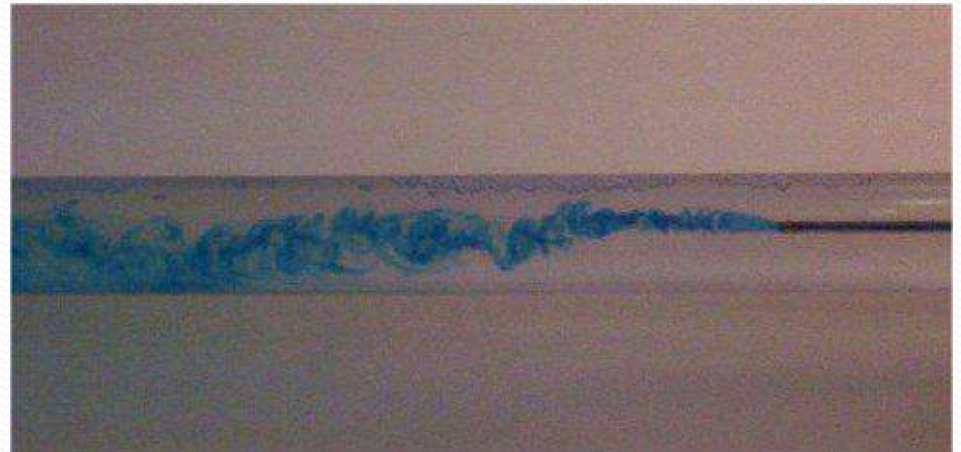
### III.4. Ligne d'émission

Toutes les particules étant passées par un même point  $E$  sont situées à l'instant  $t$  sur une courbe appelée « *ligne d'émission* » relative au point  $E$  à l'instant  $t$ .





La ligne d'émission est constitué par l'ensemble des positions occupées, à un instant donné, par les particules passées en un point donné aux instants successifs antérieurs.

En fait, la ligne d'émission est une courbe dont il est aisément de mettre en évidence expérimentalement : c'est l'exemple le plus explicite étant la source colorante au sein d'un écoulement de fluide translucide, où le filet coloré ainsi produit correspond à une ligne d'émission.

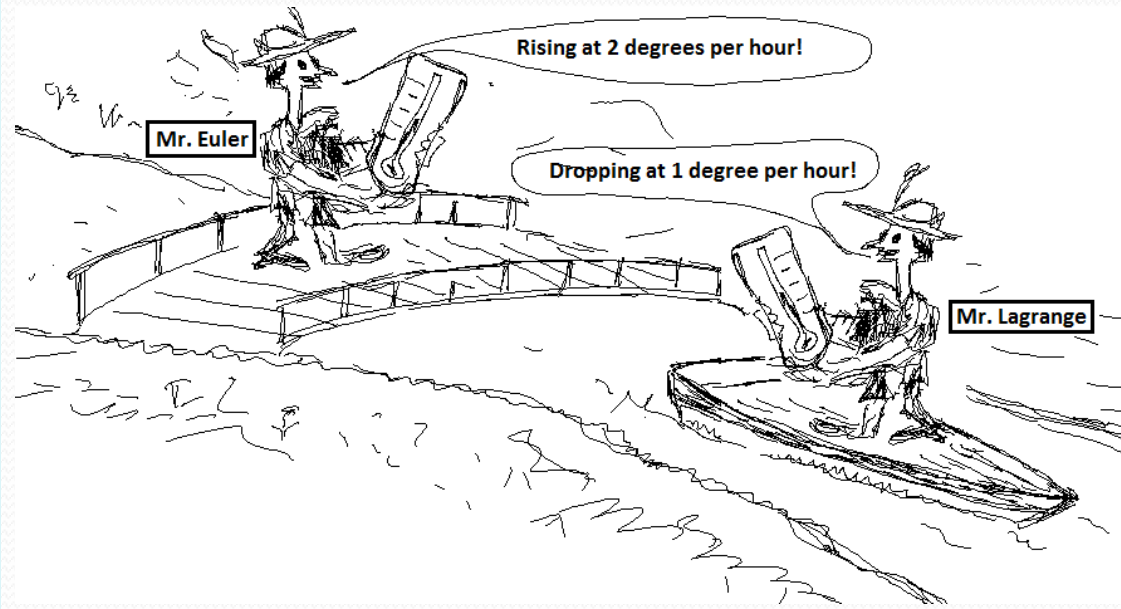


## III.5. Comparaison et domaines d'application des descriptions de Lagrange et d'Euler

Le tableau suivant récapitule, d'une manière très explicite, l'ensemble de ces deux descriptions :

<b>Descriptions</b>	<b>Lagrange</b> 	<b>Euler</b> 
Variables	$x_0, y_0, z_0, t$	$x, y, z, t$
Inconnues	$x = f(x_0, y_0, z_0, t)$ $y = \varphi(x_0, y_0, z_0, t)$ $z = \psi(x_0, y_0, z_0, t)$	$u = f(x, y, z, t)$ $v = \varphi(x, y, z, t)$ $w = \psi(x, y, z, t)$

Les deux descriptions sont utilisées dans le domaine de la mécanique. En mécanique des solides rigides, à priori, le formalisme lagrangien décrit mieux le phénomène physique.



En mécanique des fluides, dans le cas général, il n'est pas nécessaire de suivre la trajectoire et les positions relatives de la particule par rapport au temps. Il est plus adapté de fixer un point donné de l'espace, et d'étudier, à chaque instant des particules différentes qui passent par ce point, les variations temporelles de la vitesse et de la pression. Pour cette raison le formalisme eulérien est plus adéquat.

## III.6. Écoulement Stationnaire ou permanent

Un écoulement est dit stationnaire (ou permanent), si tous les champs de grandeurs locales (vitesse, pression,...) ne dépendent pas explicitement du temps ( $t$ ). Autrement dit, les dérivées partielles par rapport au temps des champs eulériens sont nulles.

C'est-à-dire que :

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}(\vec{r})$$
$$u = u(x, y, z) ; v = v(x, y, z) ; w = w(x, y, z)$$

D'une manière plus explicite, dans un écoulement stationnaire, les lignes de courant à l'instant  $t_1$  ne dépendent pas du temps  $t_1$ , et elles demeurent fixes au cours du temps.

Et nous aurons :

$$\frac{dx}{u(x,y,z)} = \frac{dy}{v(x,y,z)} = \frac{dz}{w(x,y,z)} = dt$$

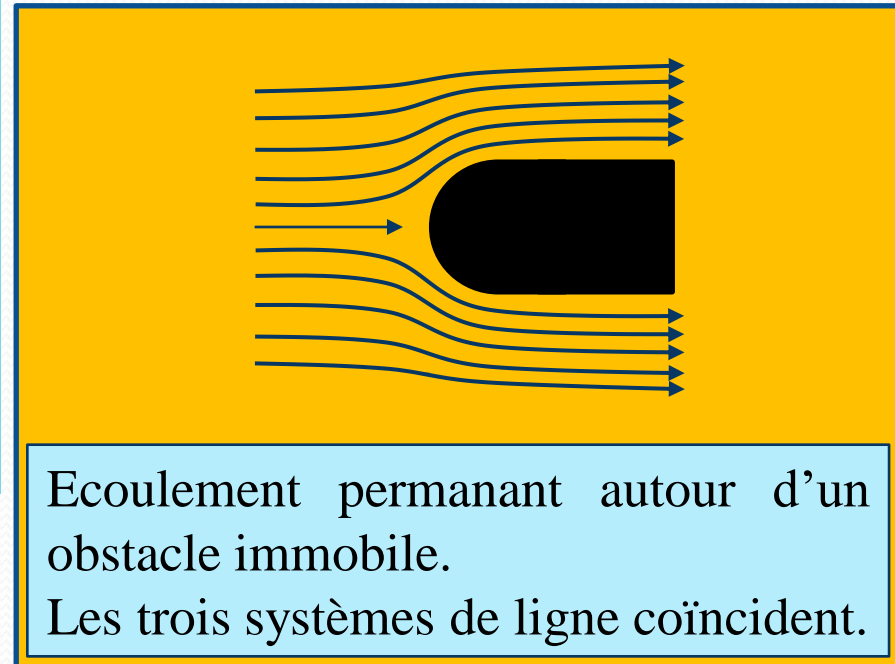
*Equation de la trajectoire*

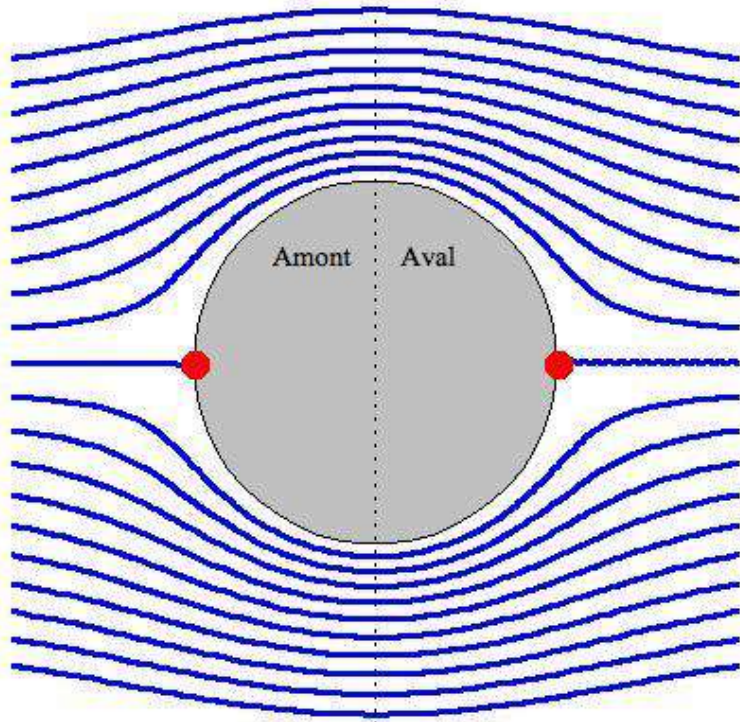
$$\frac{dx}{u(x,y,z)} = \frac{dy}{v(x,y,z)} = \frac{dz}{w(x,y,z)}$$

*Equation de la ligne de courant*

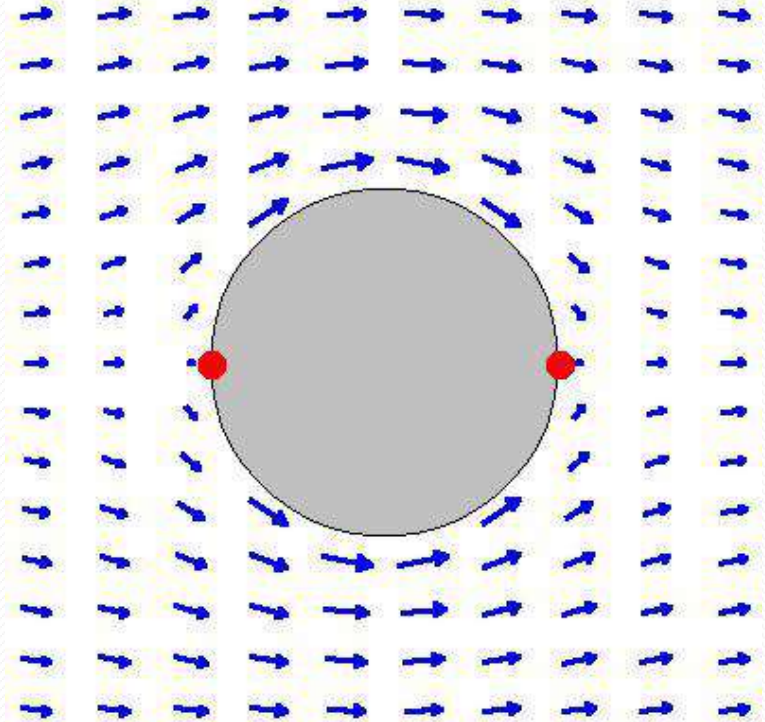
En effet, les différentes particules émises d'un même point au cours du temps ont les mêmes trajectoires : celles-ci représentent donc en même temps les lignes d'émission.

Par ailleurs, le vecteur vitesse local (indépendant du temps) est tangent en chaque point aux trajectoires qui représentent donc également les lignes de courants.





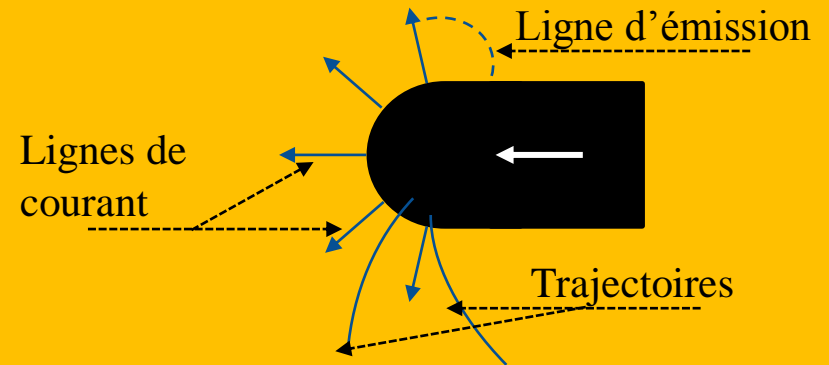
Écoulement d'air autour d'un disque.  
Les lignes de courant épousent parfaitement la forme de l'obstacle, même à l'aval de l'écoulement.



Champ des vitesses de l'écoulement  
autour d'un disque.

En rouge sont représentés les points de stagnation, lieux où la vitesse d'écoulement est nulle. Source <http://images.math.cnrs.fr/>

Par contre, dans le cas d'un écoulement instationnaire (non permanent), les trois systèmes de lignes sont en général distincts, et la correspondance entre eux est difficile à étudier. Dans ce cas on ne s'intéresse, en général, qu'aux lignes de courants à l'intérieur du fluide.

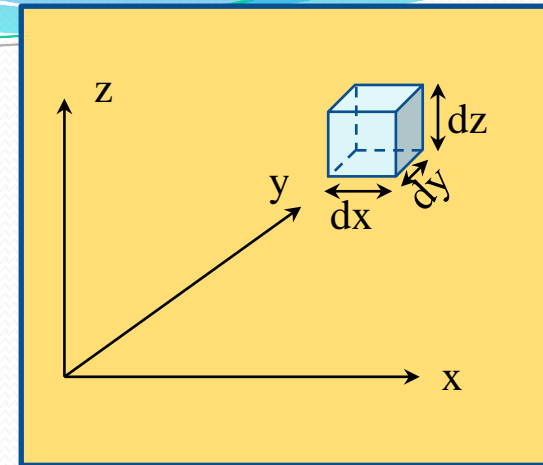


Écoulement instationnaire.  
L'obstacle est en mouvement dans une nappe d'eau immobile.

## III.7. Débit massique et débit volumique

### III.7.1. Débit massique

Considérons un parallélépipédique élémentaire de fluide de volume  $dx dy dz$ .



Le débit massique  $q_m$  est la masse élémentaire  $dm$  de fluide qui traverse une surface droite élémentaire  $dS$  pendant un intervalle de temps  $dt$ .

Donc :

$$q_m = \iint_S \frac{dm}{dt} = \iint_S \frac{\rho dx dy dz}{dt} = \rho \iint_S dS \frac{dx}{dt} \quad ; \quad \left(\frac{dx}{dt} = v\right)$$

Après intégration, nous obtenons :

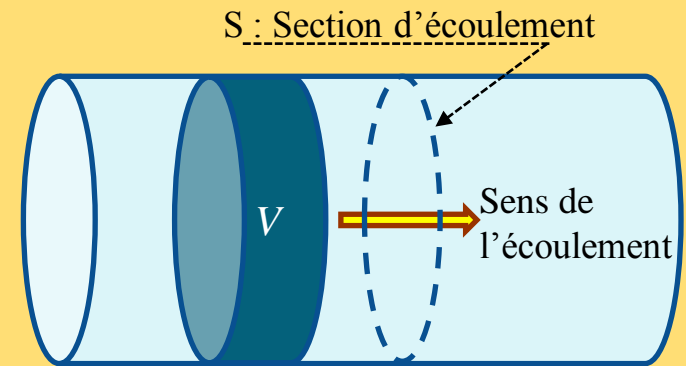
$$q_m = \rho v S \quad [\text{kg/s}]$$

$v$  : vitesse moyenne de l'écoulement du fluide (m/s)

$\rho$  : masse volumique ( $\text{kg/m}^3$ )

### III.7.1. Débit volumique

Le débit volumique  $Q_v$  est le volume élémentaire  $dV$  de fluide qui traverse une surface droite élémentaire  $dS$  pendant un intervalle de de temps  $dt$ .



Quel sera le temps nécessaire  $t$  pour que le volume  $V$  du fluide passe à travers le section  $S$ .

$$Q_v = \iiint_V \frac{dV}{dt} = \iiint_V \frac{dx dy dz}{dt} = \iiint_V dS \frac{dx}{dt}; \quad \left(\frac{dx}{dt} = v\right)$$

Après intégration, nous obtenons :

$$Q_V = v \cdot S \quad [m^3/s]$$

$v$  : vitesse moyenne de l'écoulement du fluide (m/s)

$V$ : volume du fluide ( $m^3$ ).

$S$  : l'aire de la section droite ( $m^2$ ).

Une origine possible de la lettre  $Q$  serait le mot latin **quantitas** (génitif **quantitatis**), qui signifie **quantité**.

Partie II :

# L'HYDRODYNAMIQUE DES FLUIDES

L'hydrodynamique a pour but d'étudier les mouvements des liquides en fonction des forces qui leur donnent naissance. Parmi ces forces, celles de viscosité n'interviennent que pour les fluides réels. Cette remarque conduit à faire donc la distinction entre les liquides réels et les liquides parfaits. Ces derniers ont la particularité de ne pas avoir de viscosité et de ne pas développer de la turbulence.

Dans tout ce qui suit, nous travaillerons **en variable d'Euler**, c'est-à-dire que nous étudierons en chaque point de l'écoulement la vitesse et la pression du fluide en fonction du temps.

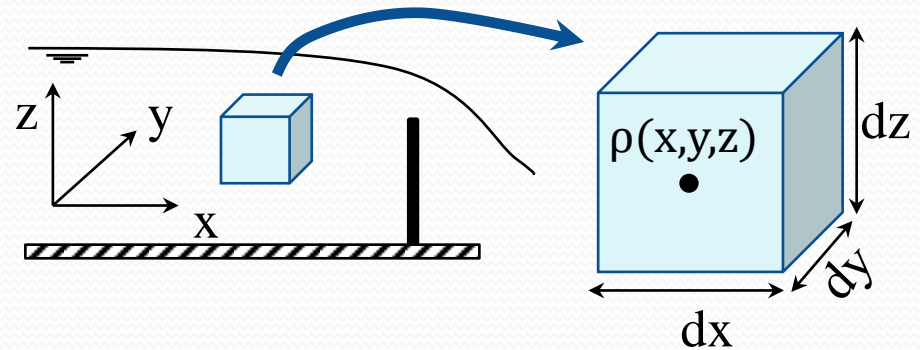
CHAPITRE I :

L'HYDRODYNAMIQUE DES  
FLUIDES PARFAITS

# I.1 – L'équation de continuité

L'équation de continuité exprime que le fluide est continu, et que la masse se conserve durant l'écoulement, c.-à-d., qu'il ne peut y avoir dans aucune partie du fluide ni apport extérieur, ni prélèvement de matière.

En d'autres termes, la conservation de la masse veut dire que la variation de la masse de fluide d'un élément de volume  $dv$  pendant un temps  $dt$  est égale à la différence entre la masse de fluide entrante et la masse de fluide sortante dans ce même volume.



## Variation de masse entre $t$ et $t+dt$

La masse de fluide contenue dans le volume  $dv=dx.dy.dz$  est égale au temps  $t$  à :

$$\rho.dx.dy.dz$$

Après un temps  $dt$  dans ce même volume, la masse est égale à :

$$\left(\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} dt\right)dx.dy.dz$$

On constate donc une variation de masse de :

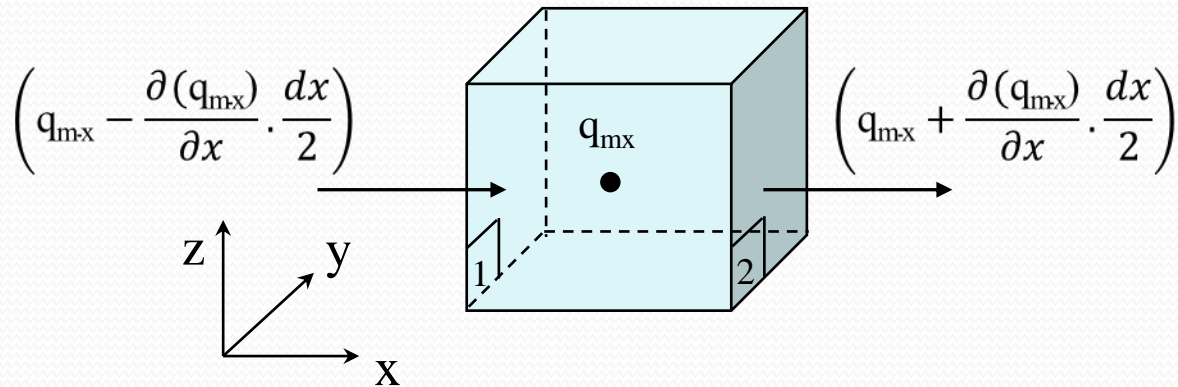
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} dt.dx.dy.dz$$

Variation de masse de fluide pendant la durée dt entre ce qui entre et ce qui sort :

On définit le débit massique ( $q_m$ ) par :

$$q_{mx} = \rho \cdot Q_{vx} = \rho \cdot u \cdot dy \cdot dz$$

Avec  $q_{mx}$  : débit massique suivant l'axe des x



La masse de fluide entrante par la face 1 (suivant x) pendant le temps  $dt$  est :

$$\left( q_{mx} - \frac{\partial(q_{mx})}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dt = \left( \rho \cdot u \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot dy \cdot dz)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dt$$

La masse de fluide sortante par la face 2 (suivant x) pendant le temps  $dt$  est :

$$\left( q_{mx} + \frac{\partial(q_{mx})}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dt = \left( \rho \cdot u \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot dy \cdot dz)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dt$$

La différence de masse entre ce qui entre et ce qui sort dans le volume  $dv$  est donc suivant x, vaut :

$$- \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

Nous avons de même suivant les autres axes (y et z) avec  $V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$  :

-  $\frac{\partial \rho v}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$  ; -  $\frac{\partial \rho w}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$

En écrivant que la variation de masse de fluide d'un élément de volume  $dv$  pendant un temps  $dt$  est égale à la masse de fluide entrante dans ce volume moins la masse de fluide sortante, ce qui donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho V) = 0}$$

Ce ci est l'équation de continuité d'un fluide conservatif.

## Cas des fluides incompressibles :

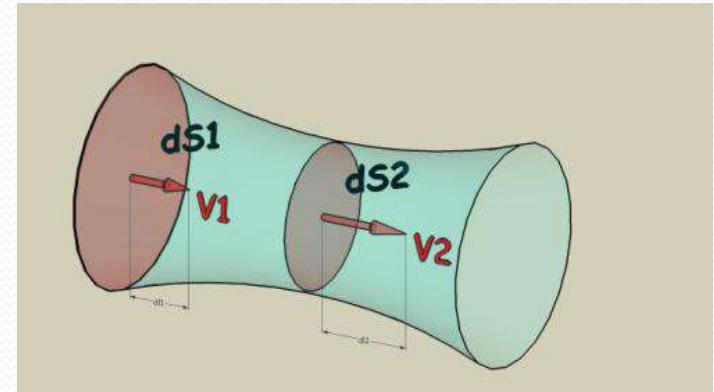
Dans le cas où le fluide est en mouvement permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ), la masse volumique  $\rho$  est indépendante du temps et si, en plus, nous sommes en présence d'un fluide incompressible, où  $\rho$  est indépendant de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , l'équation de continuité deviendra :

$$\text{div}(\mathbf{V}) = 0$$

L'interprétation physique de cette équation est la suivante : les débits  $Q$  entrant et sortant à travers un volume quelconque et rempli du fluide doivent être égaux.

$$Q_1 = Q_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 V_1 = S_2 V_2$$

La vitesse est inversement proportionnelle à la section de passage.

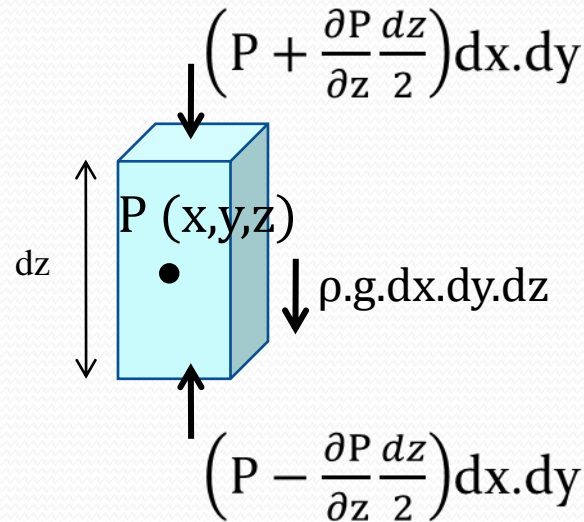
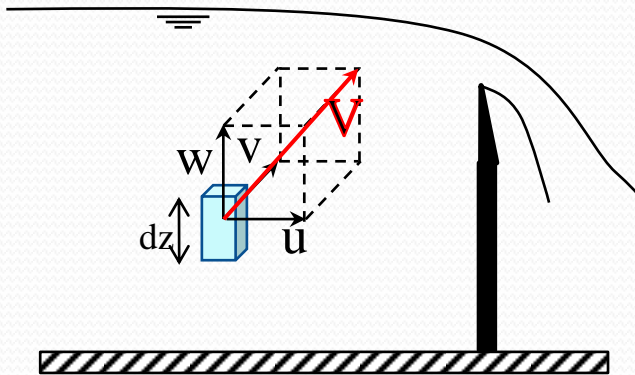


## I.2 – Equations générales du mouvement : équations d'Euler

Pour les fluides parfaits, on admet que la viscosité est nulle et par conséquent la turbulence ne peut être développée.



1707 -1783



En raisonnant, dans un premier temps, suivant la verticale (z), les forces qui agissent sur cet élément de volume  $dv = dx.dy.dz$ , sont :

a) Les forces de volume :

➤ Forces de pesanteur provenant de la gravité : il n'existe qu'une seule, et elle s'écrit comme suit:

$$F = -\rho.g.(dx.dy.dz) = -\rho.g.dv$$

➤ Forces d'inerties :

$$\rho \frac{dw}{dt} dv = \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) dv$$

- Les forces d'accélération pure :  $\rho \frac{\partial \rho w}{\partial t} dx.dy.dz$
- Les forces d'accélération convective :  $\rho \cdot \underline{\text{grad}}(w) \cdot \underline{V} \cdot dx.dy.dz$

b) Les forces de surfaces :

➤ les forces de pression :

✓ Surface inférieure :  $\left(P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx \cdot dy$

✓ Surface supérieure :  $-\left(P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx \cdot dy$

➤ les forces de frottement de viscosité : 0

➤ les forces de frottement de turbulence : 0

En équilibre de l'ensemble des forces, l'équation de l'hydrodynamique des fluides parfaits s'écrit comme suit:

$$\Sigma F = \text{Forces d'inertie}$$

C'est-à-dire :

$$-\rho \cdot g \cdot (dx \cdot dy \cdot dz) + \left( P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy - \left( P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy =$$

$$\rho \frac{\partial \rho w}{\partial t} dx \cdot dy \cdot dz + \rho \cdot \underline{\text{grad}}(w) \cdot \underline{V} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\boxed{-\rho \cdot g - \frac{\partial P}{\partial z} = \rho \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \rho \cdot \underline{\text{grad}}(w) \cdot \underline{V}}$$

En écrivant l'équation suivant les trois axes, nous aurons :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right.$$

Ce qui donne l'équation d'Euler qui s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{\text{grad}}(\underline{V}) \cdot \underline{V} + \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}}(p + \rho \cdot g \cdot z) = 0$$

Dans l'hydrodynamique, les caractéristiques du mouvement d'un fluide incompressible dépendent de quatre inconnues, à savoir :  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $P$ , donc il faut au moins quatre équations.

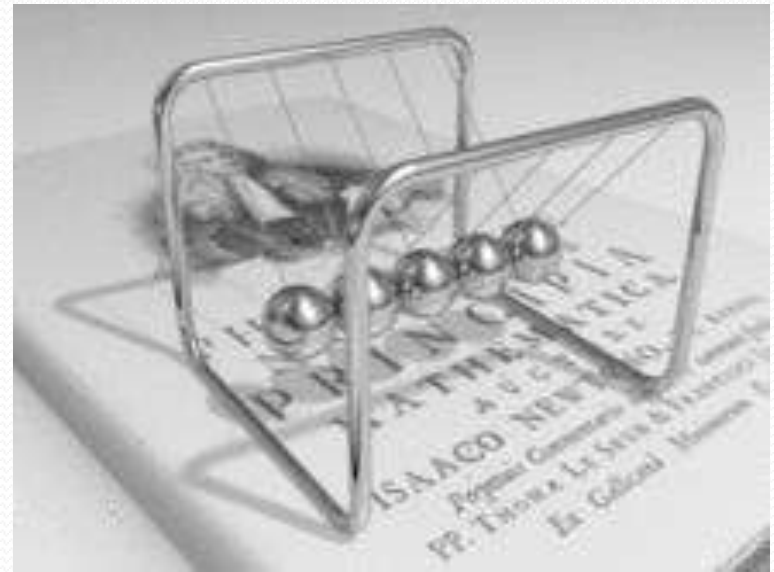
- l'équation d'Euler donne trois équations,
- L'équation de la conservation de la masse en donne la quatrième.

Ce qui permettrait de résoudre le système d'équations.

## I.3 – Théorème de la quantité de mouvement:

Le principe fondamental de la dynamique veut que toute variation (temporelle) de quantité de mouvement résulte de l'application de forces.

$$\frac{d(m.V)}{dt} = \sum F$$



Donc, on peut écrire une relation générale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, pour un tube de courant volume de fluide  $\mathcal{V}$  fixe dans l'espace, limité par une surface  $S$ , de la forme suivante :

$$\iint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}_{\text{ext}}) dS = \Sigma \vec{F}_{\text{ext}}$$

$\vec{n}_{\text{ext}}$ : normale unitaire aux surfaces extérieures au tube de courant;

$\vec{F}_{\text{ext}}$ : la somme des forces extérieures;

$\vec{V}$ : vitesse du fluide dans la section  $S$ .

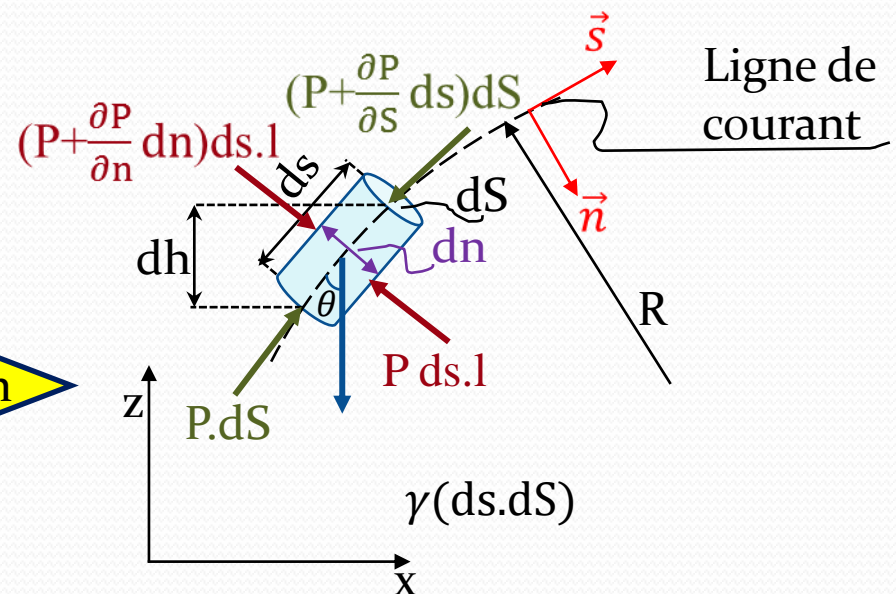
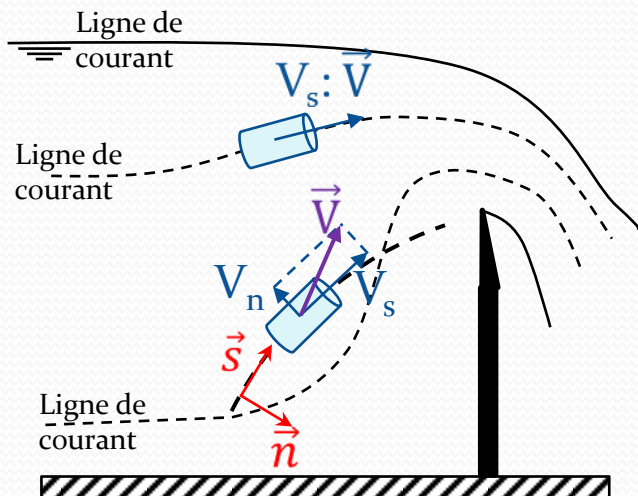
N.B.: Comme nous sommes en présence d'un fluide parfait  $\vec{V}$  est uniforme. Et  $S$  est formée de plusieurs surfaces.

# I.4 Equations de Bernoulli

Le système d'équations intrinsèques consiste à écrire les équations d'Euler en régime permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) dans un repère particulier. Ce repère est constitué par les lignes de courant pour le vecteur  $\underline{t}$  et par le vecteur  $\underline{n}$  tel que  $\underline{v}$  est perpendiculaire à  $\underline{n}$ .



1667 - 1748



en appelant  $\vec{s}$  le vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire, on a :

$$\vec{V} = V \cdot \vec{s} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt} \vec{s} + V \frac{d\vec{s}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R} V$$

R : rayon de courbure

$\vec{n}$  : le vecteur perpendiculaire à  $\vec{s}$

V : l'intensité d'une particule fluide.

$$V \frac{\partial V}{\partial s} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (\rho \cdot g \cdot z + P) \quad \text{suivant } \vec{s}$$

$$V \cdot \frac{V}{R} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} (\rho \cdot g \cdot z + P) \quad \text{suivant } \vec{n}$$

L'équation de Bernoulli s'obtient en intégrant la première équation tout en restant sur la ligne de courant, et s'écrit comme suit :

$$\rho \cdot \frac{V^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z + P = \text{Cste}$$

la quantité  $\left\{ \rho \cdot \frac{V^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z + P \right\}$  est constante le long d'une ligne de courant.

L'équation de Bernoulli est valable en tout point du fluide incompressible en mouvement permanent.

$$\rho \cdot \frac{V_A^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_A + P_A = \rho \cdot \frac{V_B^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_B + P_B$$

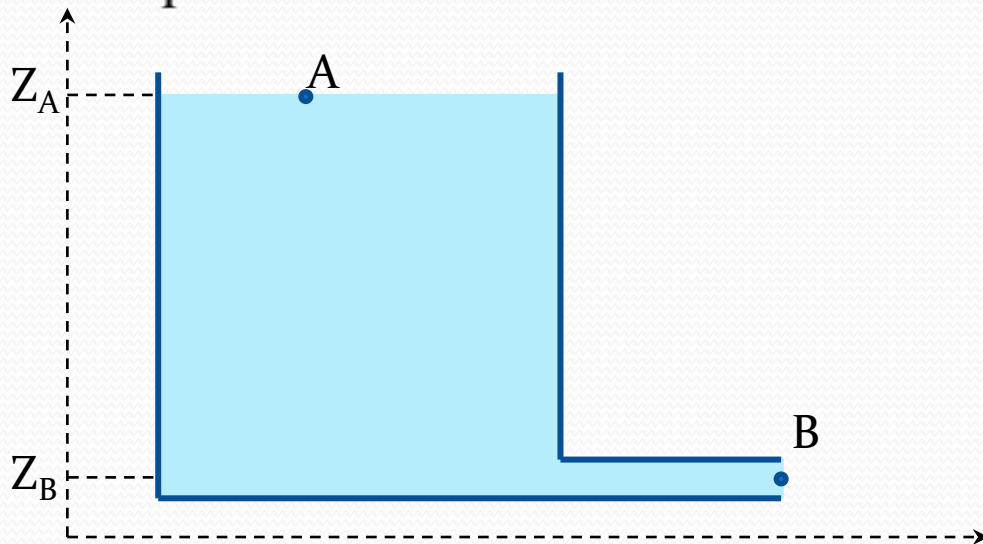
Avec :  $P_A = P_B = P_{\text{atm}}$  et  $V_A \lll V_B$  car  $S_A \ggg S_B$

$$\rho \cdot g \cdot z_A = \rho \cdot \frac{V_B^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_B$$

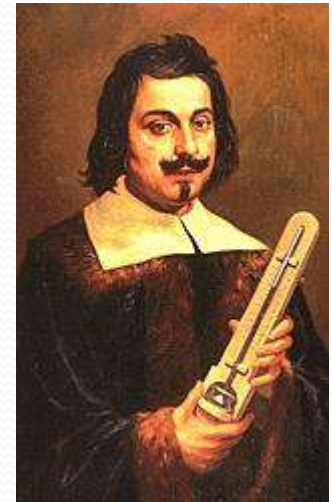
$$V_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

$$V_B = \sqrt{2gh}$$

Cette équation est connue sous le nom de formule de Torricelli.



mabessedik@yahoo.fr



1608-1647

## 1.5 – Charge hydraulique

Comme nous l'avons cité précédemment, selon l'équation de Bernoulli la charge hydraulique est constante le long d'une ligne de courant.

Cette charge est exprimée comme suit :

$$H \text{ [m]} = z + \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\rho g}$$

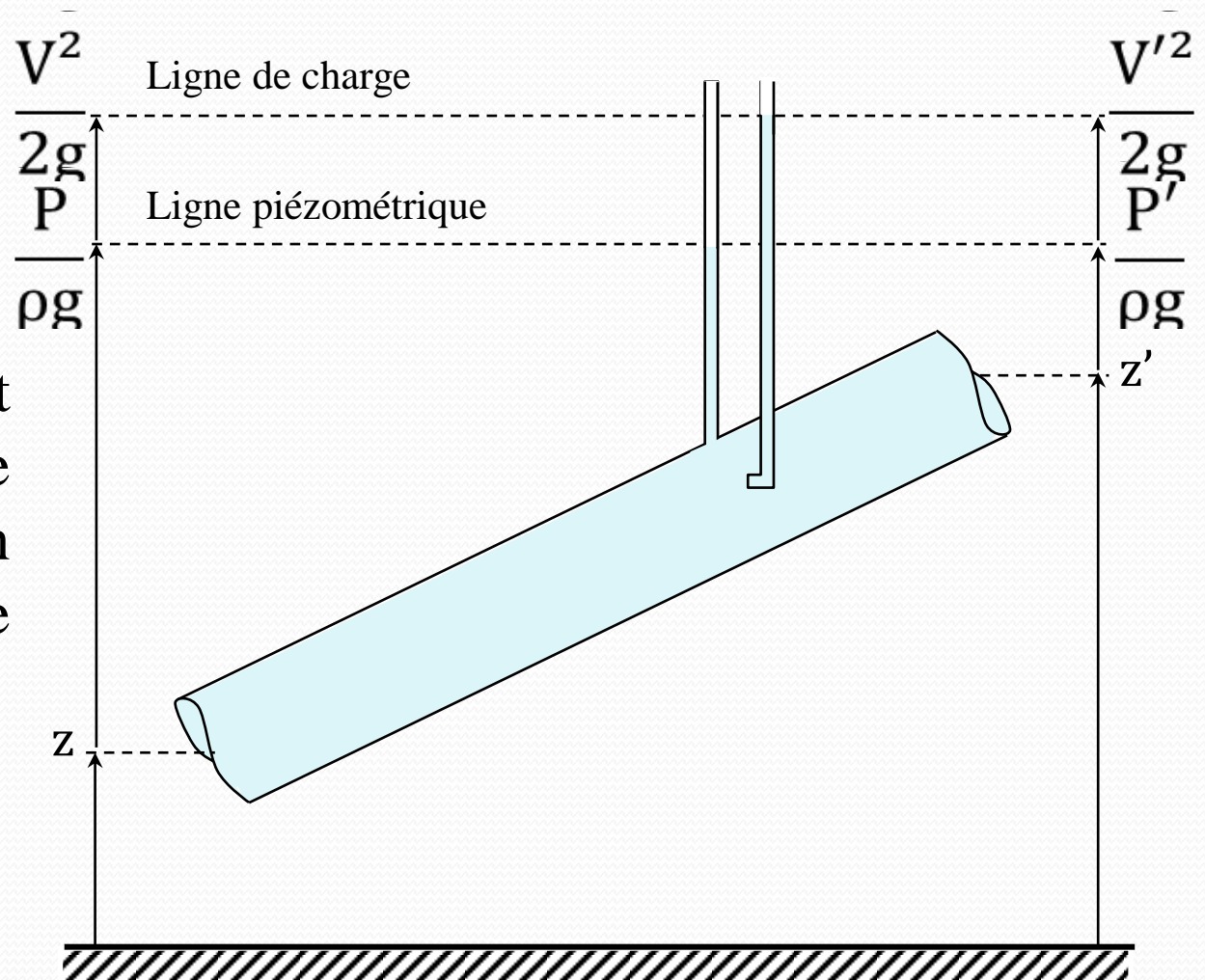
Avec :

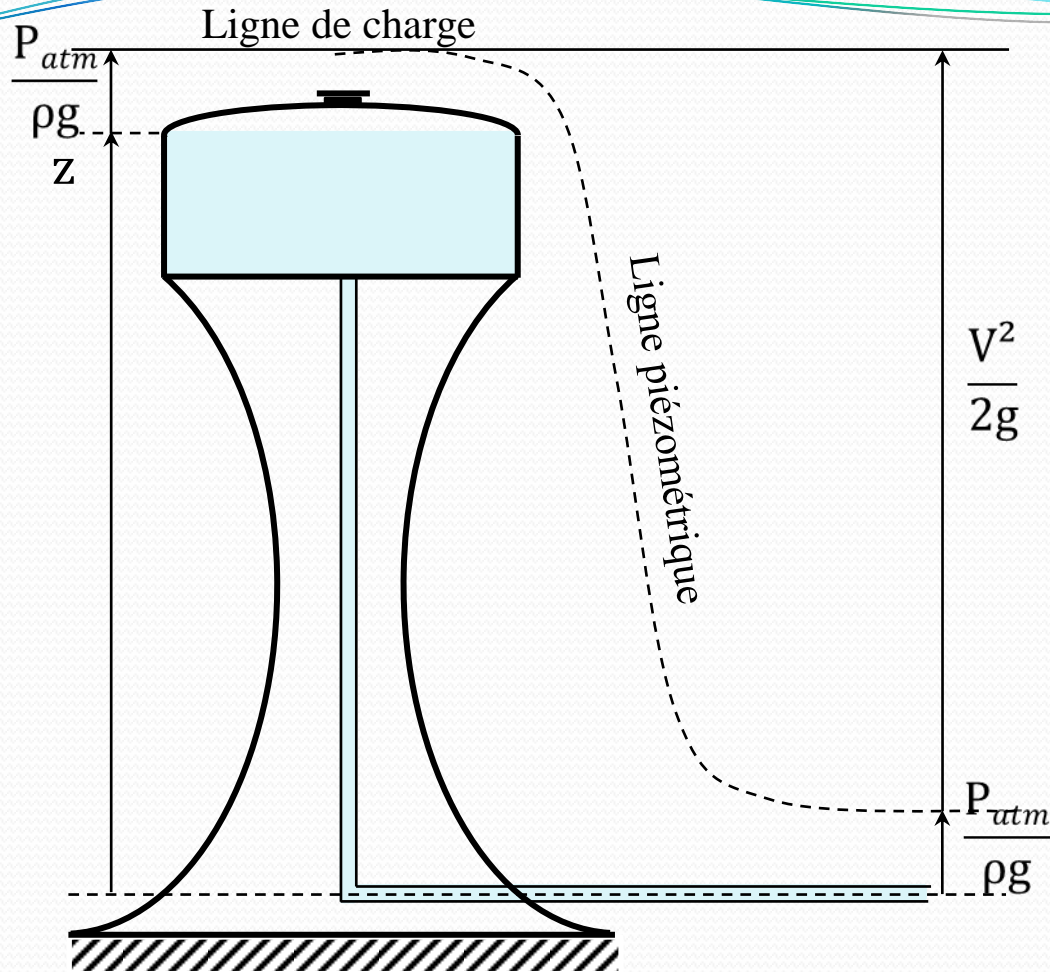
$\frac{P}{\rho g}$  : hauteur de pression (charge de pression) } Hauteur  
 $z$  : cote du point } piézométrique

$\frac{V^2}{2g}$  : Hauteur dynamique

## a) Représentation graphique

Ligne de charge et ligne piézométrique pour une canalisation de section constante pour un fluide parfait.





Ligne de charge et ligne piézométrique pour un château d'eau ouvert sur une conduite à l'atmosphère.

En terme de pression :

$$\rho \cdot \frac{V^2}{2} + \underbrace{\rho \cdot g \cdot z + P}_{\text{Pression statique}} = P_t$$

Pression dynamique                      Pression statique                      Pression Totale

## **b) Interprétation énergétique**

L'équation de Bernoulli peut être interprétée en terme énergétique :

$$\rho \cdot \frac{V^2}{2} + \underbrace{\rho \cdot g \cdot z + P}_{\text{Energie potentielle}} = P_t$$

Energie cinétique                      Energie potentielle                      Energie mécanique

CHAPITRE II :

L'HYDRODYNAMIQUE DES  
FLUIDES REELS

## II.1 – Fluides réels et la turbulence

Nous avons considéré dans le chapitre précédant que les fluides étaient parfaits (viscosité et turbulence nulles) et que par conséquent, il n'y avait pas de frottement ni entre les molécules du fluide ni sur les parois des canalisations. Alors qu'en réalité, un liquide parfait ne peut exister.

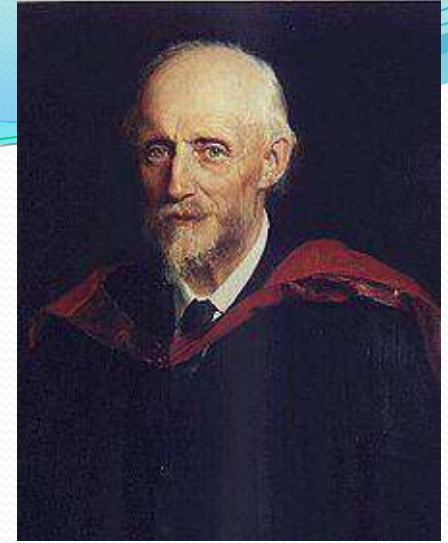
Dans un écoulement d'un fluide réel il existe de deux types de forces de frottement :

- i. frottements intermoléculaires du fluide,
- ii. frottements entre fluide et objets (parois des canalisations, ou autres).

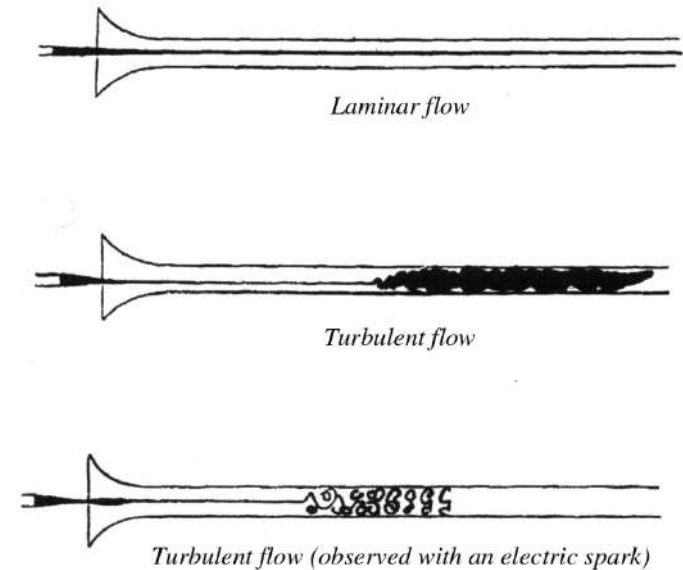
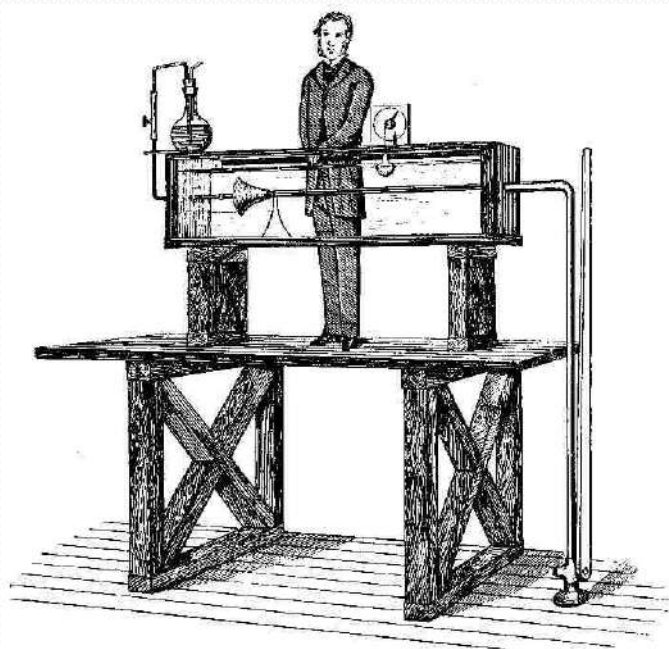
Ces forces de frottement sont appelées **les forces de viscosité**.

# NOMBRE DE REYNOLDS

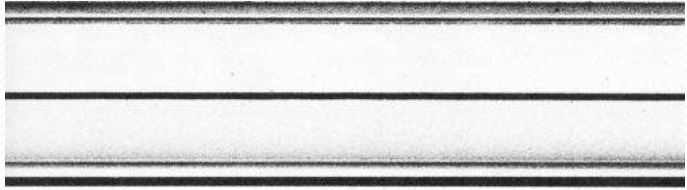
Les expériences réalisées par **Osborne Reynolds** en 1883, lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de deux types de régimes d'écoulement distincts, à savoir : **Laminaire et Turbulent**.



23/08/1842 –  
21/02/1912



En présence des forces de viscosité il y a trois types d'écoulements :



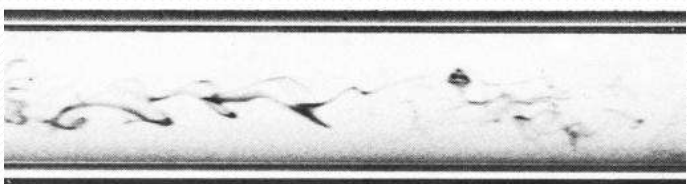
**Régime laminaire** : toutes les particules qui passent par un même point ont la même trajectoire. C'est un écoulement régulier.

$$Re < 2000$$



**Régime transitoire** : appelé aussi régime intermédiaire. La limite entre ces différents types d'écoulements est évidemment difficile à appréhender.

$$2000 < Re < 2500$$



**Régime turbulent** : des tourbillons se forment, les particules suivent des trajectoires chaotiques.

- Écoulement turbulent lisse si  $2000 < Re < 100000$
- Écoulement turbulent rugueux si  $Re > 100000$

En utilisant divers fluides à viscosités différentes, en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds donné par l'expression suivante :

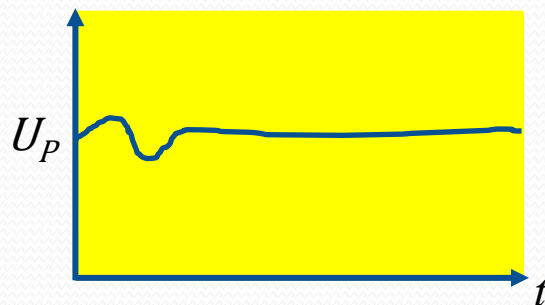
$$R_e = \frac{V \cdot d}{\nu}$$

- $V$  : Vitesse moyenne d'écoulement à travers la section considérée en (m/s)
- $d$  : Diamètre de la conduite ou largeur de la veine fluide en (m).
- $\nu$  : Viscosité cinématique du fluide ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).

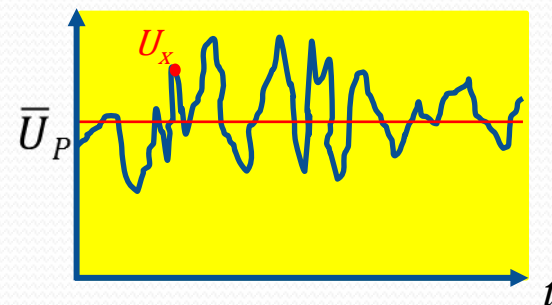
La transition d'un régime à un autre est causée par plusieurs facteurs:

- La vitesse moyenne des particules fluides;
- La viscosité et la densité du fluide;
- Les caractéristiques géométriques de la canalisation (le diamètre).

La caractéristique principale d'un mouvement turbulent vient du fait que les vitesses et pression en un point fluctuent avec le temps de façon aléatoire.



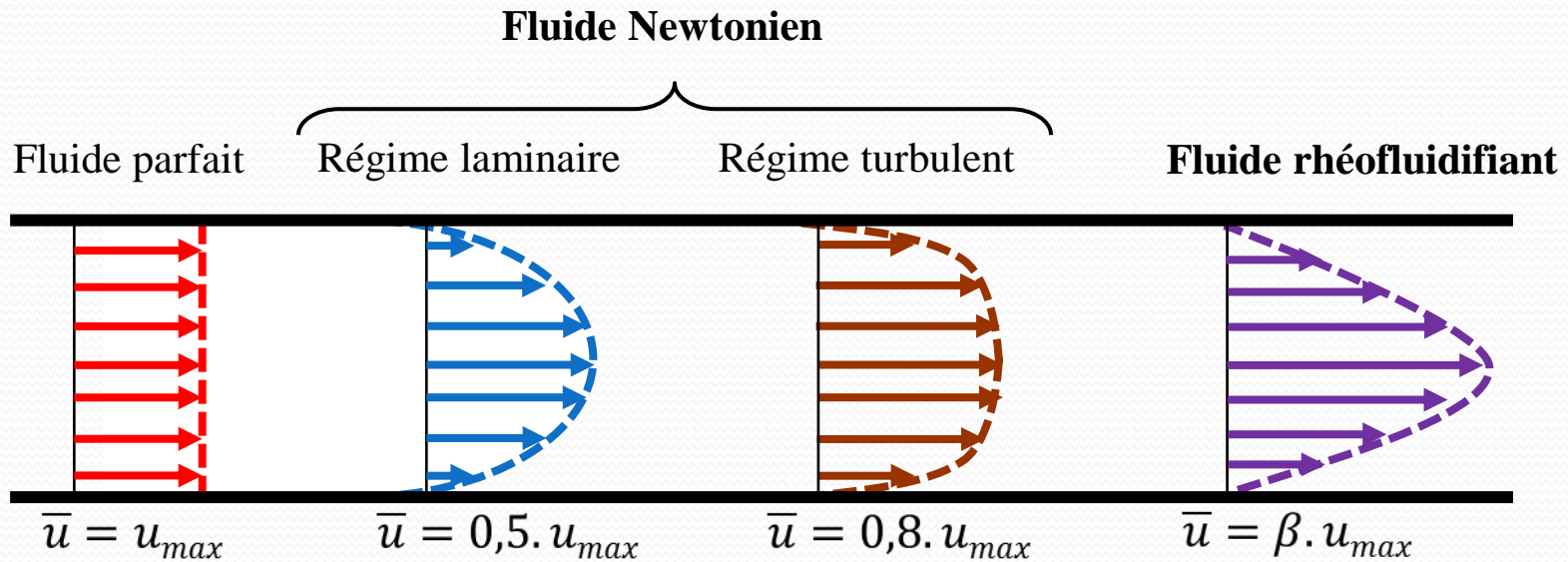
a: écoulement laminaire



b: écoulement turbulent

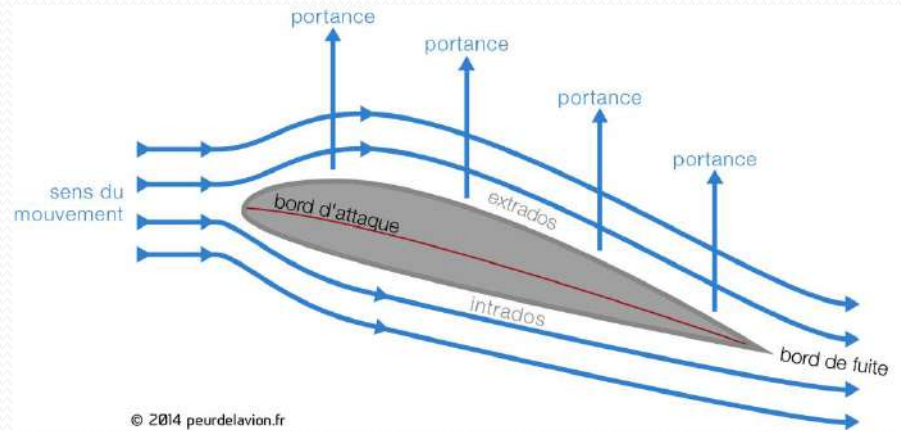
Variation d'une des composantes de la vitesse pour des écoulements (a) laminaire et (b) turbulent en un point P.

L'agitation dans un écoulement turbulent est dû à ces fluctuations qui donnent un profil de vitesses qui est plus uniforme en moyenne que dans le cas d'un écoulement laminaire dans un tube.

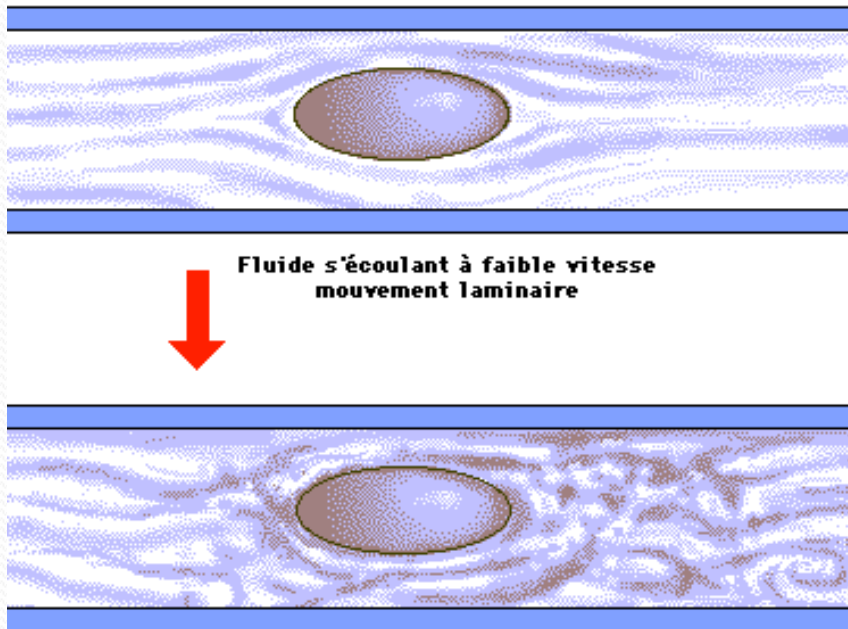


Comparaison des profils de vitesse dans un tube à différents types d'écoulements.

La turbulence peut être créée par les forces de viscosité sur les parois (*turbulence pariétale*) ou par les différentes couches de l'écoulement et qui sont à des vitesses différentes les unes par rapport aux autres.

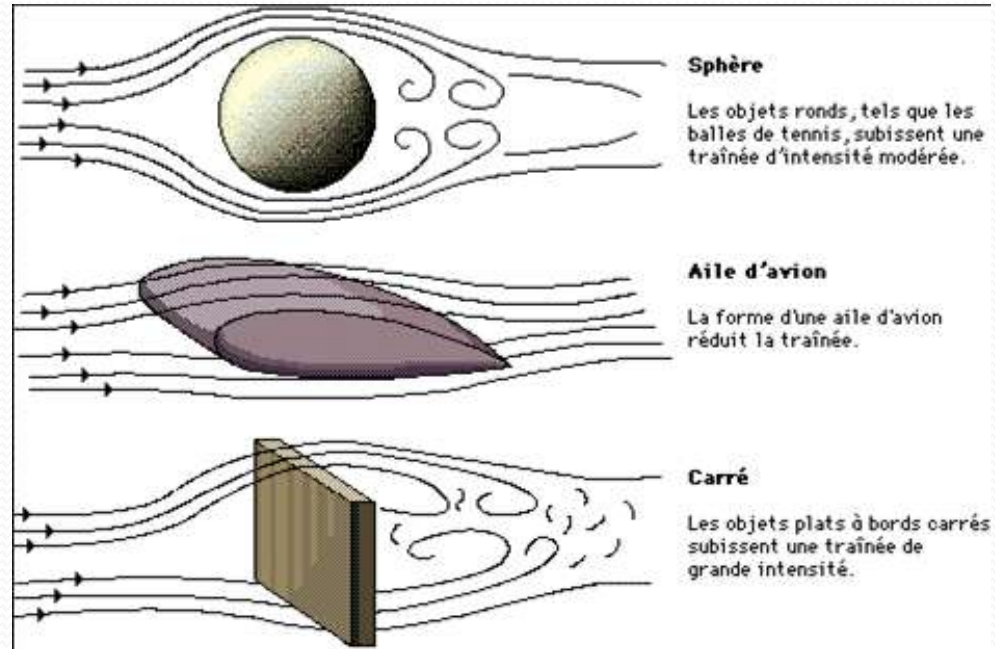


© 2014 peurdelavion.fr



Fluide s'écoulant à faible vitesse  
mouvement laminaire

Fluide s'écoulant à grande vitesse:  
mouvement turbulent



**Sphère**

Les objets ronds, tels que les balles de tennis, subissent une traînée d'intensité modérée.

**Aile d'avion**

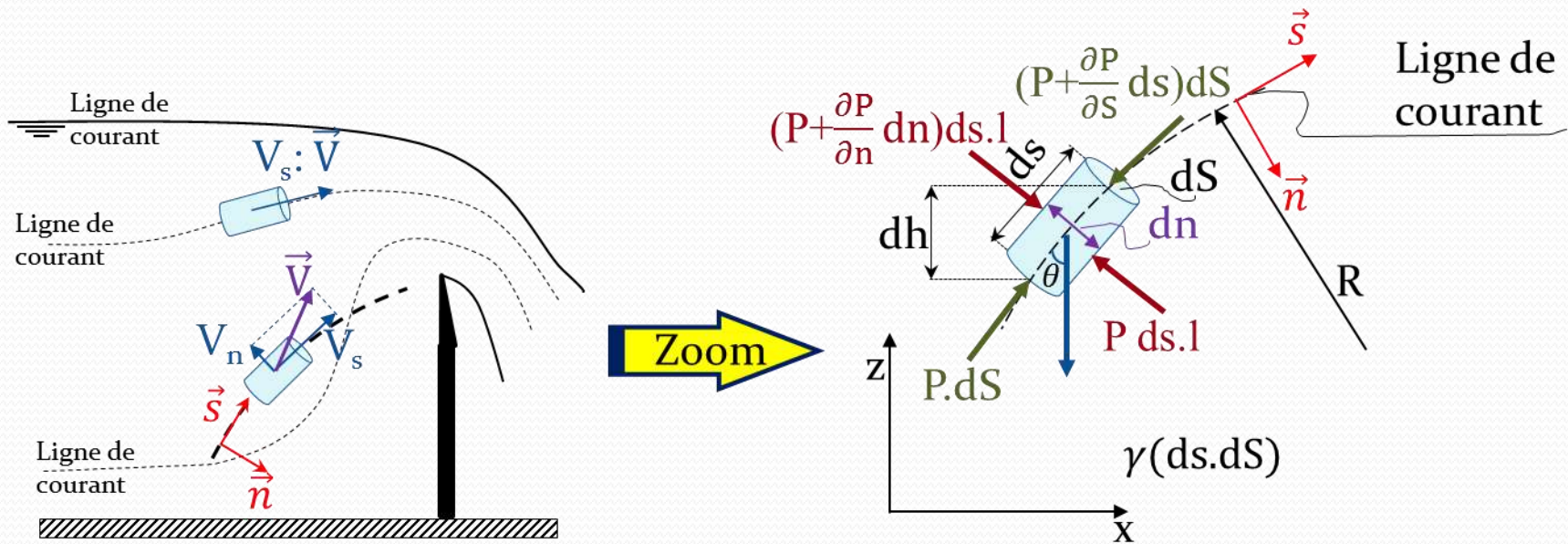
La forme d'une aile d'avion réduit la traînée.

**Carré**

Les objets plats à bords carrés subissent une traînée de grande intensité.

## II.2 – L'équation de Bernoulli pour les fluides réels

Nous avons vu que pour le cas d'un fluide réel et en régime permanent, d'autres forces interviennent, notamment les forces dues au frottement, qui font apparaître une dissipation de l'énergie mécanique en énergie thermique.



Le long d'une ligne de courant, l'énergie mécanique diminue du fait de l'augmentation de l'énergie thermique ; on appelle ce phénomène la perte de charge due aux frottements dans un liquide.

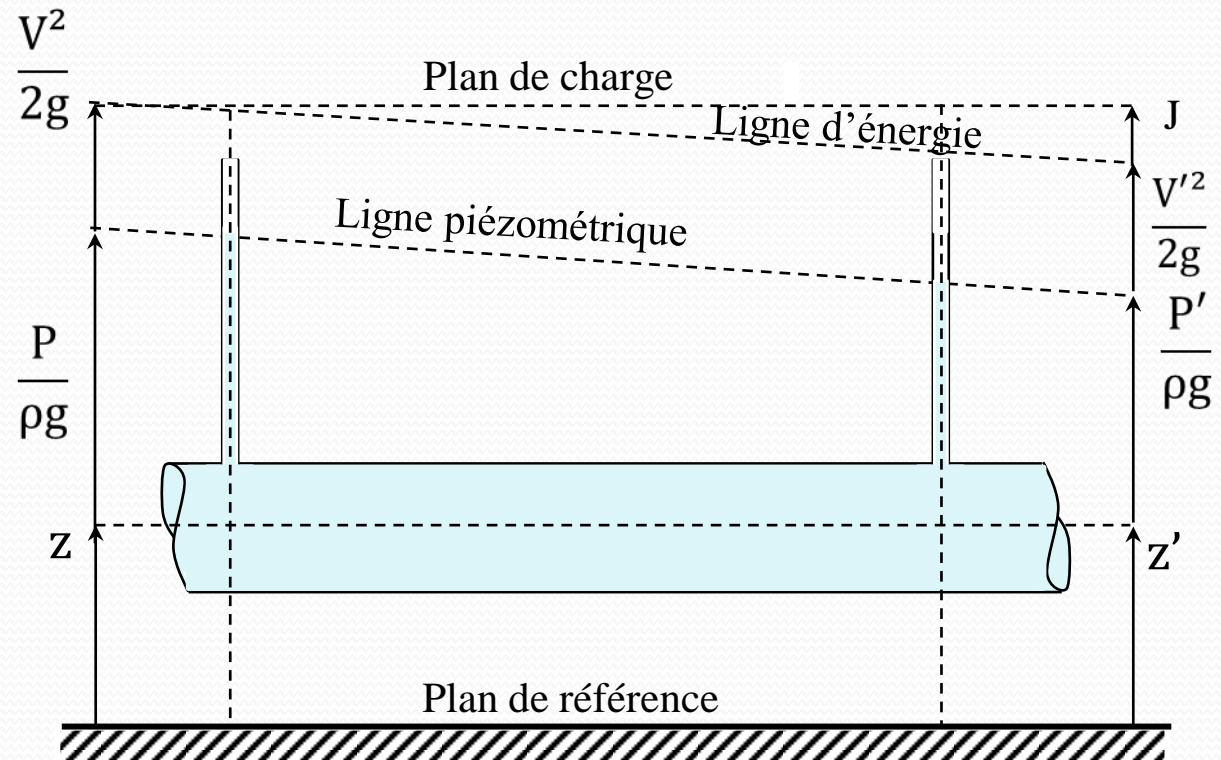
Après intégration entre deux points sur la même ligne de courant l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B + j_{A-B}$$

- $j_{A-B}$  : étant la perte de charge entre A et B en (m)

## Représentation graphique

Ligne de charge et ligne piézométrique pour une canalisation de section constante pour un fluide réel.



## II.3 – Evaluation des pertes de charge

L'écoulement d'un fluide réel dans une conduite subit des forces de frottement visqueux qui auront tendance à le freiner. Celles-ci représentent les pertes de charge le long de cet écoulement.

En hydrodynamique des fluides réels, on distingue deux types de perte de charge :

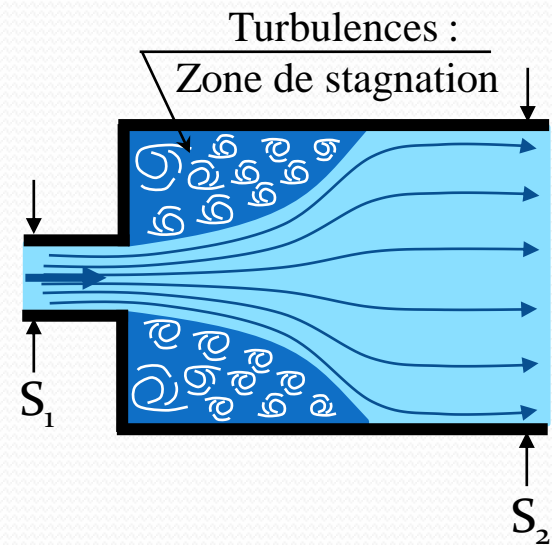
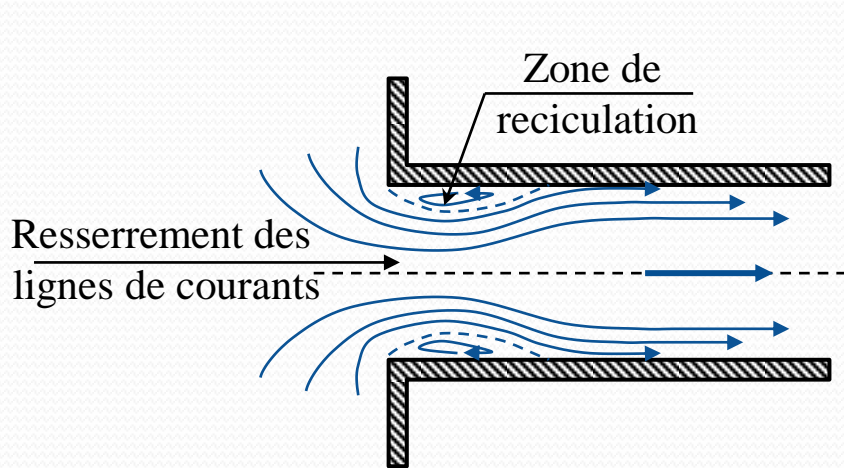
- la perte de charge linéaire représentant l'énergie perdue entre les deux points,
- la perte de charge singulière qui intervient lorsque l'écoulement uniforme est localement perturbé.

## II.3.1– Pertes de charge singulières

Lorsqu'un écoulement dans une conduite subit des variations brusques (de section ou de direction), il se produit des pertes de charges dites singulières. Elles sont, obligatoirement, présentes dans toutes les installations, et causent des nuisances mécaniques (corrosion) et hydrodynamiques.

Les pertes de charges singulières peuvent être provoquées par :

- un changement de section de la conduite (convergent, divergent),
- un changement de direction (coude),
- un branchement ou raccordement,
- un dispositif de mesure et contrôle de débit...



- Courbure de ligne de courant, qui décollent de la paroi.
- Formation de zones de recirculation et/ou de stagnation.

Les pertes de charges singulières sont exprimées par la relation suivante :

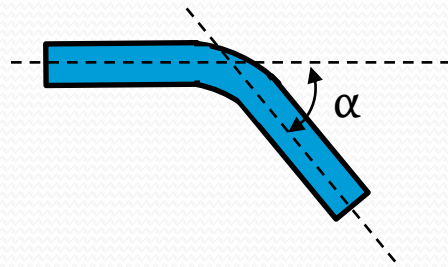
$$J = \zeta \cdot \frac{V^2}{2g}$$

Où :

$\zeta$ : Coefficient (sans unité) de pertes de charge. Il dépend de la nature et de la géométrie de l'accident de forme.

Les valeurs de  $\zeta$  sont données par les constructeurs dans leurs catalogues.

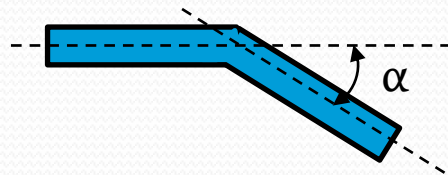
## Coude arrondi



Valeurs de  $\zeta$

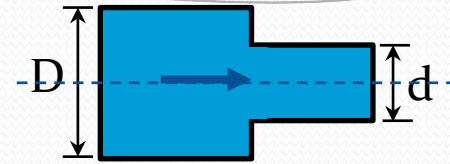
$\alpha$	$\frac{r}{D} = \frac{\text{rayon de courbure}}{\text{diamètre intérieur}}$				
	1	2	3	4	5
22,5	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
30	0,07	0,06	0,06	0,06	0,05
45	0,14	0,10	0,09	0,08	0,08
60	0,19	0,12	0,11	0,10	0,09
90	0,21	0,14	0,12	0,11	0,09

## Coude brusque



$\alpha$	22,5	30	45	60	90
Valeurs de $\zeta$	0,07	0,11	0,24	0,47	1,13

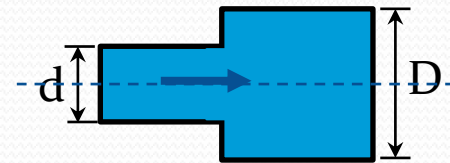
## Rétrécissement brusque



$\frac{d}{D}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Valeurs de $\zeta$	0,50	0,48	0,45	0,43	0,40	0,36	0,31	0,24	0,17	0,09	0,00

Dans le cas d'un réservoir se déversant dans une canalisation, il faut prendre  $\zeta = 0,50$ .

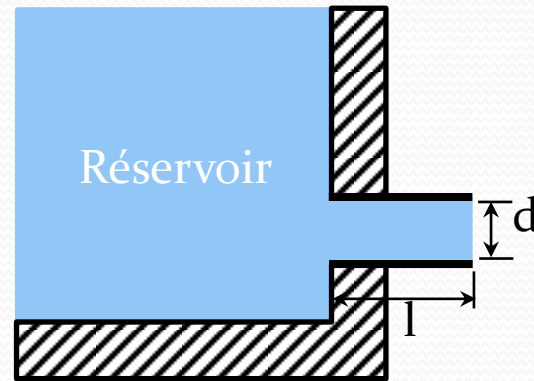
## Elargissement brusque



$\frac{d}{D}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Valeurs de $\zeta$	1,00	0,98	0,92	0,83	0,71	0,56	0,41	0,26	0,13	0,04	0,00

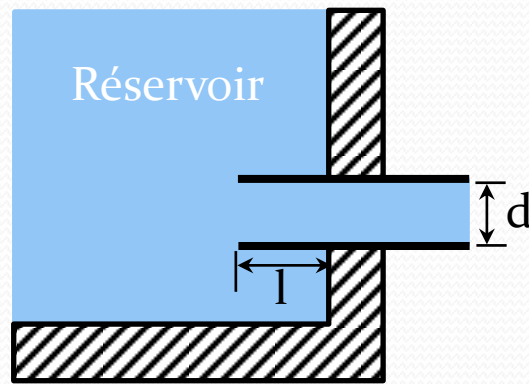
Dans le cas d'une canalisation se déversant dans un réservoir, il faut prendre  $\zeta = 0,50$ .

Ajutage débitant à  
gueule bée



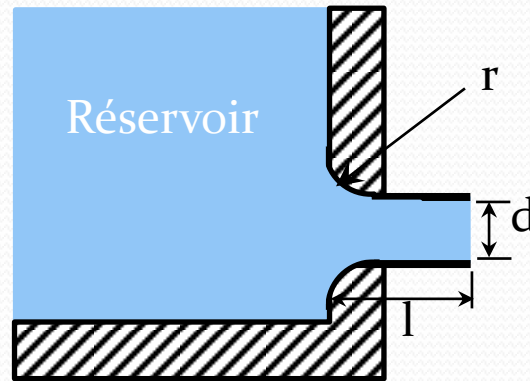
Pour  $2.d < l < 5.d$   
 $\zeta = 1,5$

Départ avec saillie  
à l'intérieur du  
réservoir



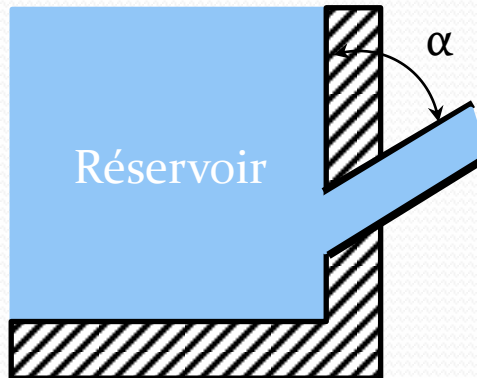
Pour une saillie  $l > \frac{d}{2}$   
 $\zeta = 1,0$

Raccord à bords arrondis



Pour  $\frac{r}{d} > 0,18$   $\zeta = 0,05$

Raccord cylindrique oblique

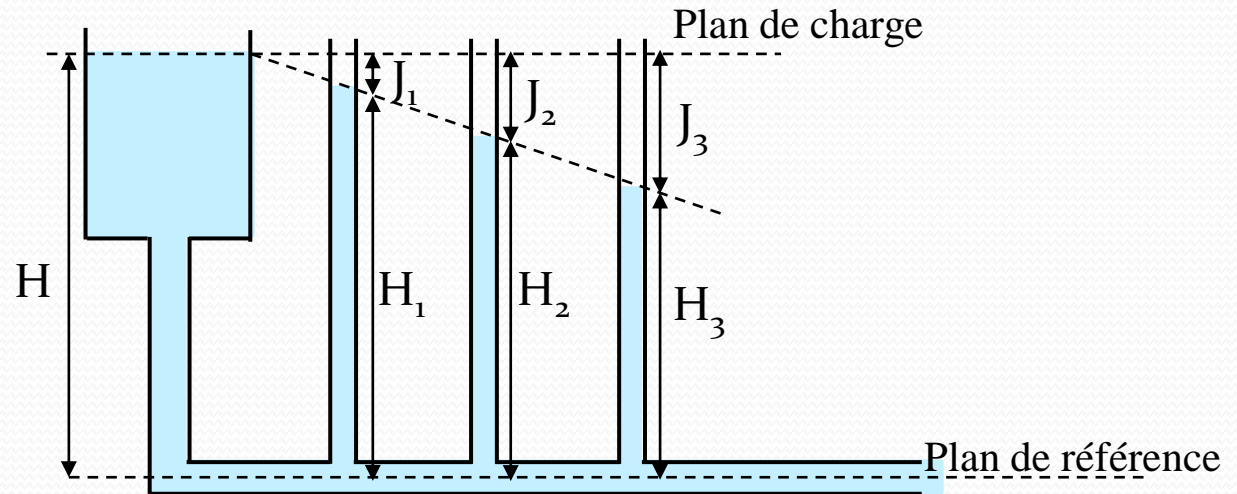


$\alpha$	20°	30°	45°	60°	70°	80°	90°
$\zeta$	0,96	0,91	0,81	0,70	0,63	0,56	0,50

## II.3.1– Pertes de charge linéaires

Les pertes de charge linéaires sont générées par les frottements le long des longueurs droites des conduites. Elles dépendent :

- du type d'écoulement et de la qualité du tube ( $\lambda$ )
- du diamètre de la conduite ( $1/D$ )
- de la pression dynamique ( $v^2/2g$ )
- de la longueur de la conduite .



Du fait de la difficulté de résoudre le système d'équation de Navier-Stokes, ces pertes de charge sont généralement calculées par des équations empiriques du genre :

$$\Delta H = L.J = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (mce)$$

Avec :

$\lambda$  : coefficient de perte de charge. Il est adimensionnel et est fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité de la paroi.

L : la longueur de la conduite

D : le diamètre

V : la vitesse moyenne de l'écoulement

J : la perte de charge part unité de longueur

## En régime laminaire

En régime laminaire, seules les forces de viscosité interviennent dans le calcul du coefficient  $\lambda$ . Etant donnée, la vitesse est très faible, l'état de surface de la paroi n'a aucune incidence les pertes de charges linéaires.

Nous avons donc:

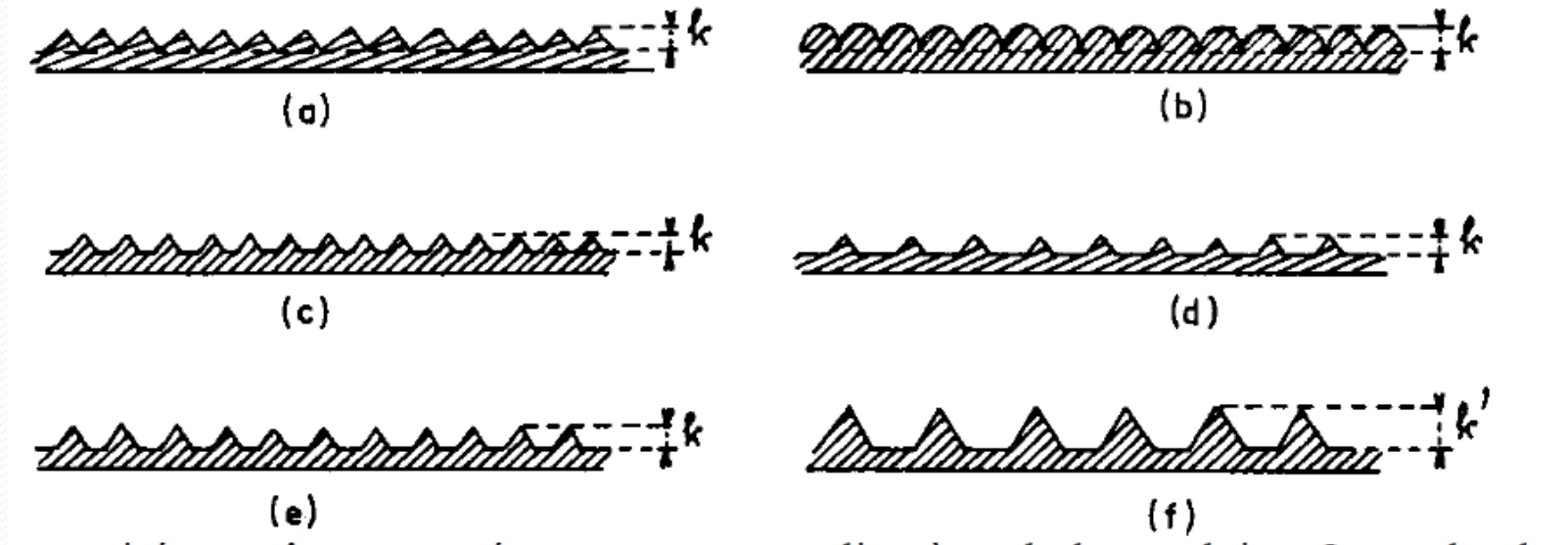
$$\lambda = \frac{64}{R_e} \quad \text{et comme} \quad R_e = \frac{V.D}{\nu}$$

$$\lambda = L \frac{32}{g} \frac{V.V}{D^2}$$

- $V$  : Vitesse moyenne d'écoulement à travers la section considérée en (m/s)
- $D$  : Diamètre de la conduite ou largeur de la veine fluide en (m).
- $\nu$  : Viscosité cinématique du fluide (m<sup>2</sup>/s).
- $g$  : pesanteur (m/s<sup>2</sup>).

## En régime turbulent

Les irrégularités de la surface interne de la conduite ont une action directe sur les forces de frottement, ce qui exerce une influence bien déterminée sur l'écoulement. Une surface rugueuse peut être considérée comme étant constituée par une série de protubérances élémentaires. Elles sont caractérisées par une certaine hauteur  $k$  (désignée parfois par  $\epsilon$ ).



Dans le cas des régimes turbulents rugueux, les pertes de charge ne dépendent que des frottements du fluide sur les aspérités de la canalisation et donc de la rugosité relative :  $k/D$  ( $\epsilon/D$ ).

### Méthodes de calcul du coefficient de pertes de charges

Dans le régime turbulent, il existe plusieurs méthodes pour le calcul du coefficient de pertes de charge.

#### Formule de Blasius

Pour un domaine où :  $4000 < Re < 100000$  , nous pouvons utiliser la formule de Blasius comme formule approchée :

$$\lambda = (100.R_e)^{-0,25}$$

## Formule de Nikuradse

Cette formule est utilisée pour les écoulement en régime turbulent rugueux :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log_{10} \left[ \frac{k}{3,7D} \right]$$

Son domaine d'utilisation est pour  $\frac{k \cdot R_e \sqrt{\lambda}}{D} \geq 200$   
Donc  $\lambda$  ne dépend plus que de  $k/D$ .

## Formule de Colebrook

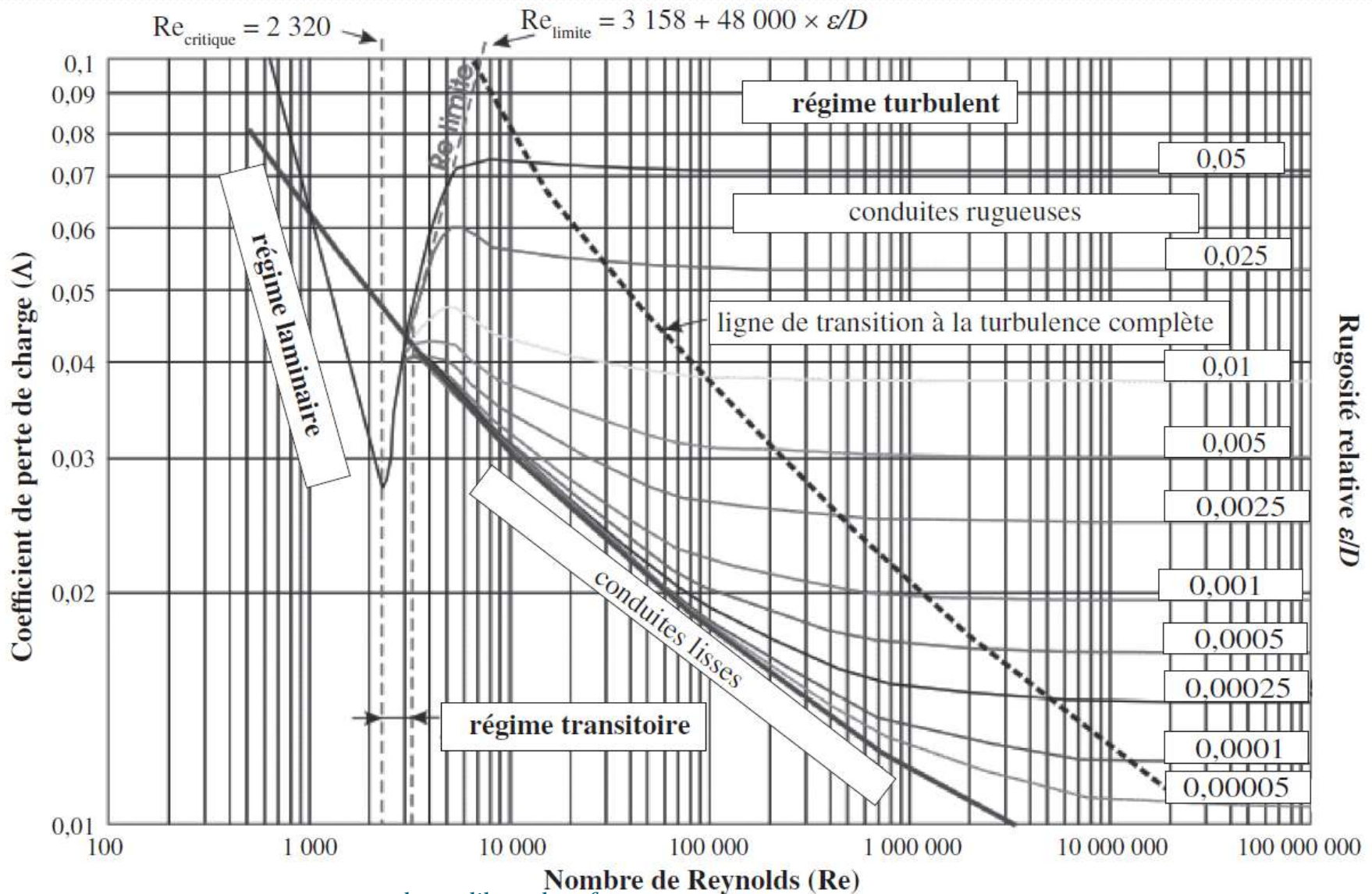
C'est la formule la plus reconnue pour les écoulements turbulents, pour  $4000 < Re < 10^8$  :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log_{10} \left[ \frac{k}{3,7D} + \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} \right]$$

Cette formule est implicite et ne peut donc se résoudre qu'à l'aide d'approximations successives.

Cette relation implicite est difficile à exploiter analytiquement et est le plus souvent représentée sur un graphique.

# Diagramme de Moody-Stanton reliant le coefficient de perte de charge régulière $\lambda$ au nombre de Reynolds $Re$ et à la rugosité relative $\varepsilon/D$ .



<i>Minuscule</i>	<i>Majuscule</i>	<i>Nom</i>	<i>Minuscule</i>	<i>Majuscule</i>	<i>Nom</i>
α	Α	<i>alpha</i>	ν	Ν	<i>nu</i>
β	Β	<i>béta</i>	ξ	Ξ	<i>xi</i>
γ	Γ	<i>gamma</i>	ο	Ο	<i>omicron</i>
δ	Δ	<i>delta</i>	π	Π	<i>pi</i>
ε	Ε	<i>epsilon</i>	ρ	Ρ	<i>rhô</i>
ζ	Ζ	<i>dzéta</i>	σ	Σ	<i>sigma</i>
η	Η	<i>éta</i>	τ	Τ	<i>tau</i>
θ	Θ	<i>théta</i>	υ	Υ	<i>upsilon</i>
ι	Ι	<i>iota</i>	φ	Φ	<i>phi</i>
κ	Κ	<i>kappa</i>	χ	Χ	<i>khi</i>
λ	Λ	<i>lambda</i>	ψ	Ψ	<i>psi</i>
μ	Μ	<i>mu</i>	ω	Ω	<i>oméga</i>