Université A. Mira de Béjaia
Département de Physique
Master 2 en Physique

Faculté des Sciences Exactes

Option : Dynamique Des Fluides et Energétique

Module : Interaction Fluide Structure

CORRIGE EXERCICE N°2 : (07 Pts)

Considérons l'équation des cordes vibrantes avec les conditions initiales associées donnée par le système ci-dessous.

$$(a)\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$(b)\quad u(x,t=0) = f(x) \qquad\qquad (1)\ -c^2 \frac{d^2U(x,p)}{dx^2} + p^2 U(x,p) = pf(x) + g(x)$$

$$(c)\quad \frac{\partial u(x,t=0)}{\partial t} = g(x)$$

1-Sachant que la transformée de Laplace de la dérivée seconde d'une fonction $v(x,t)$ est donnée par : $L\left\{\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}\right\} = p^2 L\{v(x,t)\} - pv(x,t=0) - \frac{\partial v(x,t=0)}{\partial t}$

On calcul la transformée de Laplace de l'équation (a) du système (1).

On a $c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \qquad L\left\{c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\} = L\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right\}$$ 0,5 pts

On pose : $L\{u(x,t)\} = U(x,p)$ et on utilise la propriété des transformées de Laplace des Dérivées, on obtient :

$$\Rightarrow \qquad -c^2 \frac{d^2U(x,p)}{dx^2} + p^2 U(x,p) = pu(x,t=0) + \frac{\partial u(x,t=0)}{\partial t}$$ 0,5 pts

Sachant que : $u(x,t=0) = f(x)$ et $\frac{\partial u(x,t=0)}{\partial t} = g(x)$, 0,5 pts

on trouve finalement :

$$-c^2 \frac{d^2U(x,p)}{dx^2} + p^2 U(x,p) = pf(x) + g(x)$$ 0,5 pts

2-En prenant la transformée de Fourrier du résultat de la question 1 on a :

$$-c^2 \frac{d^2U(x,p)}{dx^2} + p^2 U(x,p) = pf(x) + g(x)$$

$$\Rightarrow \qquad F\left\{-c^2 \frac{d^2U(x,p)}{dx^2}\right\} + F\left\{p^2 U(x,p)\right\} = F\{pf(x)\} + F\{g(x)\}$$ 0,5 pts

Sachant que $\quad F\{pf(x)\} = pF\{f(x)\} = pF(q), \qquad F\{g(x)\} = G(q)$

$$F\left\{p^2 U(x,p)\right\} = p^2 F\{U(x,p)\} = p^2 U(q,p)$$ 0,5 pts

Et $\quad F\left\{-c^2 \frac{d^2U(x,p)}{dx^2}\right\} = -c^2 F\left\{\frac{d^2U(x,p)}{dx^2}\right\} = -c^2 (iq)^2 F\{U(x,p)\} = c^2 q^2 U(q,p)$ 0,5 pts

D'où $\quad c^2 q^2 U(q,p) + p^2 U(q,p) = pF(q) + G(q)$ 0,5 pts

Université A. Mira de Béjaia
Département de Physique
Master 2 en Physique

Faculté des Sciences Exactes

Option : Dynamique Des Fluides et Energétique

Module : Interaction Fluide Structure

RATTRAPAGE

Année 2018/2019

EXERCICE N°1 : (07 Pts)

Un système à contre-réaction est régi par l'équation

$$y(t) = x(t-\tau) - ky(t-\tau) \qquad k \in \left]0,1\right]$$

1- Déterminer la fonction de transfert du système $H(p) = Y(p)/X(p)$ où $X(p)$ et $Y(p)$ sont les transformées de Laplace de $x(t)$ et $y(t)$

2- Trouver la réponse du système à un échelon unité $x(t) = u(t)$. Tracer le graphe de $y(t)$ pour $k = 0,5$ et pour $k = 1$.

EXERCICE N°2 : (07 Pts)

Considérons l'équation des cordes vibrantes avec les conditions initiales associées donnée par le système ci-dessous.

$$\begin{array}{ll} (a) & \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ (b) & u(x,t=0) = f(x) \\ (c) & \dfrac{\partial u(x,t=0)}{\partial t} = g(x) \end{array} \qquad (1)$$

1-Sachant que la transformée de Laplace de la dérivée seconde d'une fonction $v(x,t)$ est donnée par : $L\left\{\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}\right\} = p^2 L\{v(x,t)\} - pv(x,t=0) - \dfrac{\partial v(x,t=0)}{\partial t}$

Calculer la transformée de Laplace de l'équation (a) du système (1).

2-En prenant la transformée de Fourrier du résultat de la question 1 montrer que :

$$U(q,p) = \frac{p}{c^2q^2 + p^2} F(q) + \frac{1}{c^2q^2 + p^2} G(q) \quad (2)$$

Où $F(q)$ et $G(q)$ sont les transformées de Fourrier de $f(x)$ et $g(x)$

3-En utilisant la Transformée de Laplace Inverse de (2), montrez qu'on obtient

$$u(q,t) = F(q)\cos(ctq) + \frac{\sin(ctq)}{q} G(q)$$

EXERCICE N°3 : (06 Pts)

Un pendule double est constitué de deux masses ponctuelles m reliées par des fils de longueurs l et de masse négligeable. Les équations du mouvement sont écrites sous la forme suivante, avec g qui représente l'accélération de la pesanteur :

$$2l\frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + l\frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2} + 2g\theta_1(t) = 0$$

$$l\frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + l\frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2} + g\theta_2(t) = 0$$

1- Calculer les pulsations propres ainsi que la matrice modale associée. Commenter les résultats obtenus.

2- Lorsqu'une force est appliquée sur le pendule N°1, est-ce qu'il est possible d'annuler les oscillations du pendule N°2 ? Quelle est la signification physique de ce résultat ?

Université A. Mira de Béjaia
Département de Physique
Master 2 en Physique

Faculté des Sciences Exactes

Option : Dynamique Des Fluides et Energétique

Module : Interaction Fluide Structure

CORRIGE RATTRAPAGE

Année 2018/2019

CORRIGE EXERCICE N°1 : (07 Pts)

Un système à contre-réaction est régi par l'équation

$$y(t) = x(t-\tau) - ky(t-\tau) \qquad k \in]0,1]$$

1- La fonction de transfert du système $H(p) = Y(p)/X(p)$ où $X(p)$ et $Y(p)$ sont les transformées de Laplace de $x(t)$ et $y(t)$

On a $L\{x(t-\tau)\} = e^{-\tau p} X(p)$ 0,5 pts et $L\{y(t-\tau)\} = e^{-\tau p} Y(p)$ 0,5 pts

D'où $L\{y(t)\} = L\{x(t-\tau) - ky(t-\tau)\} = L\{x(t-\tau)\} - kL\{y(t-\tau)\}$ 0,5 pts

$\Rightarrow \quad Y(p) = e^{-\tau p}[X(p) - kY(p)]$ 0,5 pts

$\Rightarrow \quad Y(p) = X(p)\dfrac{e^{-\tau p}}{1+ke^{-\tau p}}$ 0,5 pts

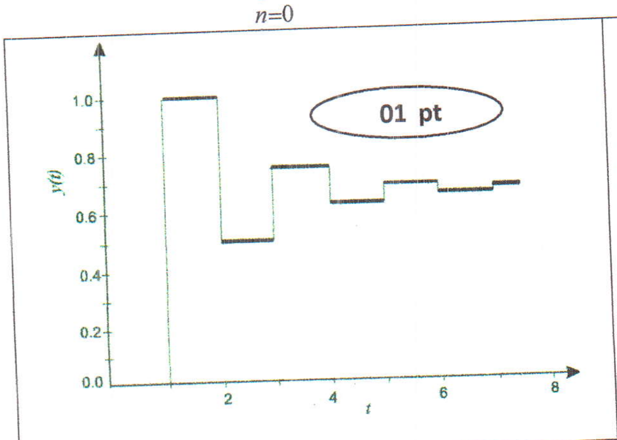
Finalement $H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)} = \dfrac{e^{-\tau p}}{1+ke^{-\tau p}}$ 0,5 pts

2- La réponse du système à un échelon unité $x(t) = u(t)$. Tracer le graphe de $y(t)$ pour $k = 0{,}5$ et pour $k = 1$.

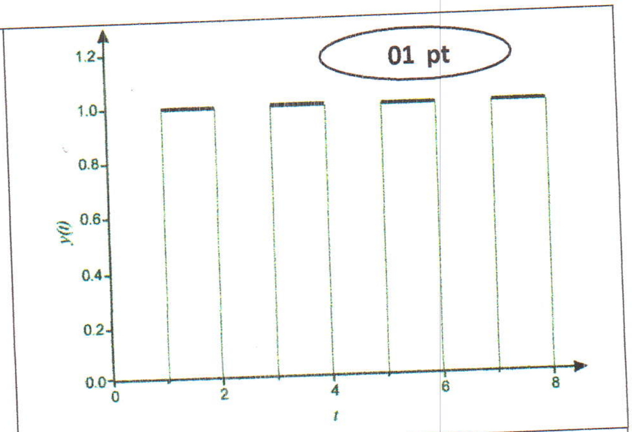
Lorsqu'on a $x(t) = u(t) \Rightarrow X(p) = \dfrac{1}{p}$

$$Y(p) = \frac{e^{-\tau p}}{p\left[1+ke^{-\tau p}\right]} = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-k)^n e^{-(n+1)\tau p}$$ 01 pt

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-k)^n u[t-(n+1)\tau] = u[t-\tau] - ku[t-2\tau] + k^2u[t-3\tau] + \ldots$$ 01 pt



La solution $y(t)$ pour $k = 0{,}5$



La solution $y(t)$ pour $k = 1$