chap II Variable Aléatoire

I - Introduction :

Une variable aléatoire est un nombre (ou une valeur) que l'on assigne à chaque occurence d'une experience

ex. lancé d'un dé

on a 6 evenements $\{1, 2, .. 6\} : \{f_1, .. f_6\}$

on peut definir une variable aléatoire

* $x(f_i) = 10 \cdot i$ donc $x(f_1) = 10, .. x(f_6) = 60$
* ou par exemple $\begin{cases} x(f_i) = 0 & \text{si face est paire} \\ x(f_i) = 1 & \text{" " impaire} \end{cases}$

On peut avoir des v.a. discrètes ou des v.a. continue

↳ Comment caracteriser une v.a. ?

II Fonction de Répartition :

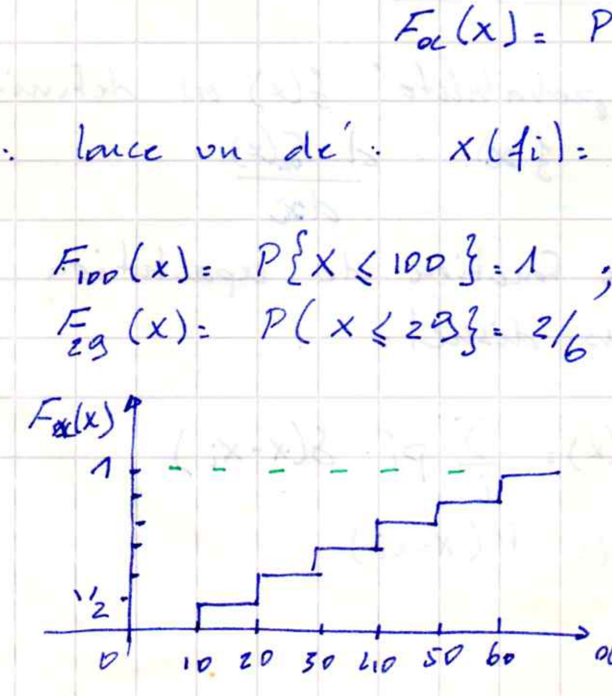
la fonction de repartition $F_x(x)$ d'une v.a. x est la fonction :

$$F_\alpha(x) = P\{x \leq \alpha\}$$

ex. lance un dé : $x(f_i) = 10 \cdot f_i$

$F_{100}(x) = P\{X \leq 100\} = 1$; $F_{55}(x) = P\{X \leq 55\} = 5/6$

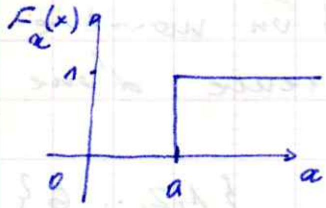
$F_{29}(x) = P(X \leq 29\} = 2/6$, ..

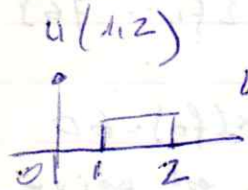


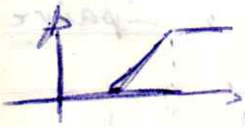
* <u>expl</u> : v.a. $x(f) = a \quad \forall f$.

si $\alpha \geq a \quad F_\alpha(x) = P\{x \leq \alpha\} = 1$.

si $\alpha < a \quad F_\alpha(x) = 0$ est impossible







Propriétés :

1) $F_\infty(x) = 1 \quad ; \quad F_{-\infty}(x) = 0$

2) $F_\alpha(x)$ est une fonction non decroissante

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow F_{\alpha_1}(x) \leq F_{\alpha_2}(x)$$

3) $P\{x > \alpha\} = 1 - F_\alpha(x)$

$x > \alpha$ et $x \leq \alpha$ sont mutuellement exclusifs.

$P(X > \alpha) + P(x \leq \alpha) = 1$

4) $P(\alpha_1 < X \leq \alpha_2) = F_{\alpha_2}(x) - F_{\alpha_1}(x)$

$$(x \leq \alpha_2) = (x \leq \alpha_1) + (\alpha_1 < X \leq \alpha_2)$$

d'ou resultat

III Densité de Probabilité :

La densité de probabilité $f(x)$ est definie par

$$f(x) = \frac{d F_x(x)}{dx}$$

pour une fonction de repartition continue

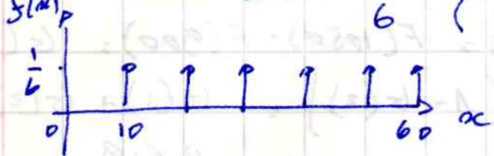
pour le cas discret :

$$f(x) = \sum_i p_i \cdot \delta(x - x_i)$$

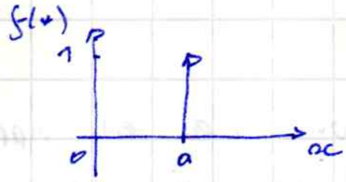
ou $p_i = P(x = x_i)$

ex: la v.a. x_i prend les valeurs 10, 20, .. 60 avec $p_i = \frac{1}{6}$

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot \{ \delta(x-10) + \delta(x-20) + \ldots + \delta(x-60) \}$$



2° exple



Propriétés :

1) $f(x) \geq 0$ car $F(x)$ est non decroissante

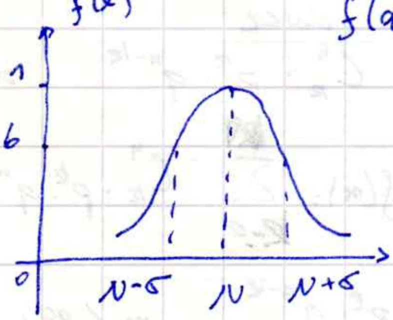
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ $\quad F_{\infty}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$

donc $P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\cdot dx = F_{x_2}(x) - F_{x_1}(x)$

IV Expl de distributions.

- Normal : une v.a. X est appelée Normale ou Gaussienne si

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(X-\mu)^2} \qquad N(\mu, \sigma)$$



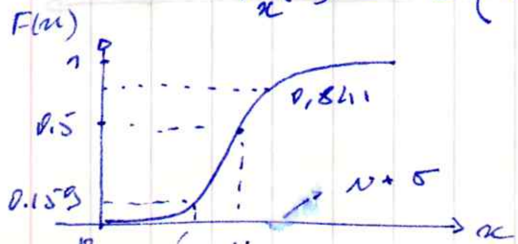
μ : moyenne

σ : ecart type

ex : ds examen 68% sont entre $\mu-\sigma$ et $\mu+\sigma$

courbe en forme de cloche

$$F_x(x) = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad \text{fct tabulée}$$

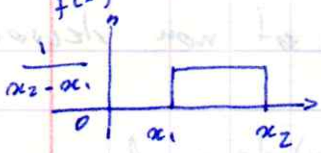


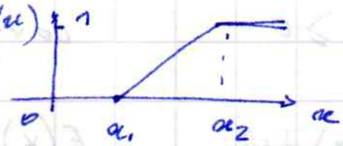
ex: $X \sim N(1000, 50)$ $\quad P(900 < X \leq 1050)$

$$P(900 < X \leq 1050) = F(1050) - F(900) = G(1) - G(-2)$$
$$= G(1) - (1 - G(2)) = G(1) + G(2) - 1$$
$$= 0.819$$

* Uniforme: une v.a. est appellée uniforme entre x_1 et x_2 si sa densité de proba:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x_2 - x_1 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$





ex: une v.a. résistance est uniforme entre 900 et 1100 Ω
$P(950 \leq r \leq 1050)$

$$= \int_{950}^{1050} \frac{1}{1100-900} \cdot dr = \frac{1}{200} \cdot 100 = 0.5$$

* Binomiale: une v.a. est appellée binomiale d'ordre n si elle prend les valeurs $k = 0, 1, \dots n$ avec

$$P(X = k) = C_k^n \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad \text{avec } p + q = 1$$

n essais indep.
prob. pour que evenement arrive k fois.
p: proba de cet evt

la densité de proba: $f(x) = \sum_{k=0} C_k^n \cdot p^k \cdot q^{n-k} \cdot \delta(x-k)$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m} C_k^n \, p^k \cdot q^{n-k} \quad m \leq x < m+1$$

fct en escalier

(nbre d'appel par unité ... teleph.

- Poisson : une v.a. a une distribution de Poisson de paramètre a si elle prend les valeurs 0, 1, 2, ... et avec

$$P(x=k) = e^{-a} \frac{a^k}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$f(x) = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \delta(x-k)$$

a : moyenne = variance.

F(x) fct en escalier.

evenement rare (crash d'avion, ...) avec evenement sur une periode donnée. → avoir k sur cette periode.

Gamma :

$$f(x) = A \cdot x^b e^{-cx} \cdot u(x)$$

b et c nombre > 0

et A : telque $\int_{-\infty}^{\infty} A \cdot x^b \cdot e^{-cx} u(x) \, dx = 1$

$$A = \frac{c^{b+1}}{\Gamma(b+1)} \quad \text{où} \quad \Gamma(b) = \int_0^{\infty} y^{b-1} e^{-y} \, dy$$

fct Gamma

ie $$f(x) = \frac{c^{b+1}}{\Gamma(b+1)} \cdot x^b \cdot e^{-cx} \cdot u(x)$$

$\Gamma(\cdot)$: fct Gamma

$\Gamma(b+1) = b\,\Gamma(b)$ factorielle generalisée

si ~~b~~ n entier $\Gamma(n) = (n-1)!$

$b+1 = n$ $$f(x) = \frac{c^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-cx} u(x)$$

↳ Erlang (telephonie)

moyenne = n/c

si n = 1 → $c \cdot e^{-cx} u(x)$ → exponentielle

↳ si la v.a ≥ 0
↳ Normal pas possible