Chapitre II. Theorie de la décision

Ou encore test d'hypothèses.

Nous avons des hypothèses a priori → A partir d'observation → Décision quelle est l'hypothèse vraie

<u>Applications</u> :

- Radar : A partir d'observations (qui sont bruitées) decider presence ou absence d'un cible ennemie
- Medecine : A partir d'observations decider, par exemple, si une tumeur est beguine ou maligne.

Il faut donc trouver un critère de décision !!
Et surtout qu'il soit <u>OPTIMUM</u>

On va donc definir une fonction "coût" souvent appelé $\mathcal{R}$: "risque"

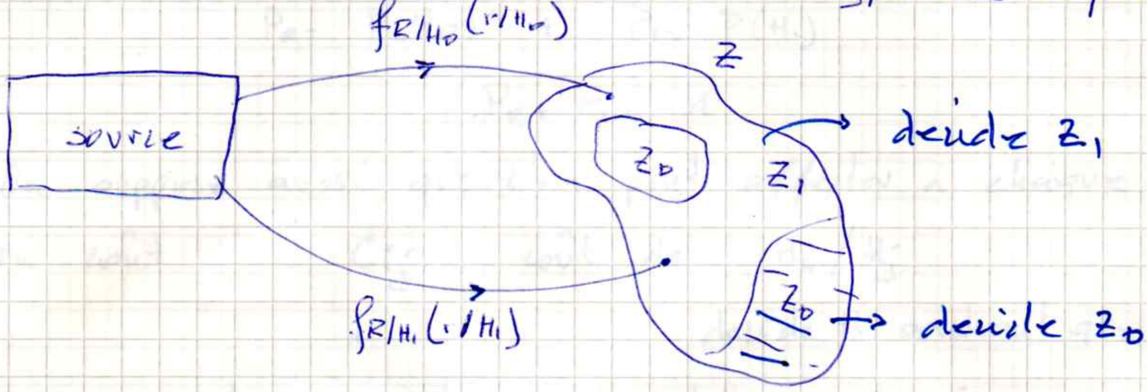
⟹ le but du jeu est de trouver un critere qui minimise le coût moyen.

Théorie de la décision

A partir d'observations → prendre une décision

source genere en sortie des hypotheses H_i

A partir d'observation on decide quelle est l'hypothese la plus vraisemblable



dans le cas d'hypotheses binaires

Z : espace d'observation $Z_0 \cup Z_1 = Z$

R : étant les observations (en general nous avons plusieurs observations)

les observations étant bruitées → elles sont aléatoires.

$f_{R/H_0}(r/H_0)$ densité de probabilité sous l'hypothese H_0

$f_{R/H_1}(r/H_1)$ " " " " H_1

On prend une decision à partir des observations.

a - decide H_0 qd H_0 est vraie → decision correcte

b - " H_0 " H_1 " " → " erronée

c - " H_1 " H_1 " " → decision correcte

d - " H_1 " H_0 " " → " erronée

On utilise une nomenclature reliée au radar

H_1 → presence d'une cible b) → H_0/H_1 → miss

H_0 → absence de la " d) → H_1/H_0 → Fausse alerte

→ but trouver un critere de décision "optimum" !!

I Critere de Bayes:

- On suppose que la probabilité d'occurence des 2 hypotheses sont connues $P(H_0)$: proba d'occurence de H_0

$P(H_1)$: " " H_1

on parle de probabilité a priori (avant toute observation)

$$P_0 = P(H_0) \quad \text{ʻi} \quad P_1 = P(H_1)$$

$$P_0 + P_1 = 1$$

- On suppose aussi que l'on peut affecter a chaque decision un coût C_{ij} : coût de H_i / H_j

decide H_i sachant que H_j vraie

par exemple en radar C_{01} doit etre $> C_{10}$

Critere de Bayes : minimise le coût moyen (risque R)

$$R = P(H_0/H_0) \cdot P_0 \cdot C_{00} + P(H_1/H_0) \cdot P_0 \cdot C_{10} + P(H_1/H_1) \cdot P_1 \cdot C_{11} + P(H_0/H_1) \cdot P_1\, C_{01}$$

$$P(H_0/H_0) = \int_{Z_0} f_{R/H_0}(r/H_0)\, dR$$

$$P(H_0/H_1) = \int_{Z_0} f_{R/H_1}(r/H_1) \cdot dR.$$

On peut reecrire R :

$$R = P_0 \cdot C_{00} \int_{Z_0} f_{R/H_0}(r/H_0) \cdot dR + P_0 \cdot C_{10} \int_{Z_1} f_{R/H_0}(r/H_0)\, dR + P_1 \cdot C_{11} \int_{Z_1} f_{R/H_1}(r/H_1)\, dR$$

$$+ P_1 \cdot C_{01} \int_{Z_0} f_{R/H_1}(r/H_1) \cdot dR$$

$$\int_{Z} - = 1 = \int_{Z_0} - + \int_{Z_1} -$$

donc
$$\int_{Z_1} - = 1 - \int_{Z_0} -$$

$$R = P_0 \cdot C_{10} + P_1 \cdot C_{11} + \int_{Z_0} \left\{ f_{R/H_1}(r/H_1) \cdot \left[P_1 C_{01} - P_1 C_{11} \right] - f_{R/H_0}(r/H_0) \cdot \left[P_0 C_{10} - P_0 C_{00} \right] \right\} \cdot dR$$

$$R = P_0 C_{10} + P_1 C_{11} + \int_{Z_0} \left\{ P_1 (C_{01} - C_{11}) \cdot f_{R/H_1}(r/H_1) - P_0 (C_{10} - C_{00}) \cdot f_{R/H_0}(r/H_0) \right\} \cdot dR$$

et : $C_{01} - C_{11} > 0$ et $C_{10} > C_{00}$ logique coût bonne décision > coût mauvaise.

$R =$ coût fixe + ... depend choix de la region Z_0

$$R = \text{coût fixe} + \int_{Z_0} \{\ \} - \{\ \} \; dR$$

Pour minimiser le risk R on affecte a Z_0 les points pour lesquels $\{\ \} - \{\ \}$ est < 0

donc si $P_1 (C_{01} - C_{11}) \cdot f_{R/H_1}(r/H_1) < P_0 (C_{10} - C_{00}) \cdot f_{R/H_0}(r/H_0)$

on decide H_0

sinon on decide H_1

c-a-d:

$$P_1 \cdot (C_{01}-C_{11}) \cdot f_{R/H_1}(r/H_1) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} P_0 (C_{10}-C_{00}) \cdot f_{R/H_0}(r/H_0)$$

ou:

$$\boxed{\frac{f_{R/H_1}(r/H_1)}{f_{R/H_0}(r/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0 \cdot (C_{10}-C_{00})}{P_1 \, (C_{01}-C_{11})}}$$

$\Lambda(R)$ appelé rapport de vraisemblance "likelihood ratio"

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Lambda(R) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta} \qquad \eta : \text{seuil}$$

<u>exemple 1</u>: H_0: $R = N$ où m est une constante

H_1: $R = m + N$ N est un bruit Gaussien $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$

donc pour H_0 $R \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

H_1 $R \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$

i.e. $$f_{R/H_0}(r/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp -r^2/2\sigma^2$$

$$f_{R/H_1}(r/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp -\frac{1}{2\sigma^2}(r-m)^2$$

donc $$\Lambda(R) = \frac{\exp -\frac{1}{2\sigma^2}(r-m)^2}{\exp -r^2/2\sigma^2} = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(m^2 - 2rm\right)\right)$$

$$\exp -\frac{m}{2\sigma^2}(m-2r) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$ ln est une fct non décroissante

$$\frac{m\,(2r-m)}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln(\eta) \Rightarrow r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{m}\ln(\eta) + \frac{m}{2} = \gamma$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma}$$

Pour cet exemple, il serait interessant de calculer les performances c-a-d

P_F : probabilite de fausse alerte
decide H_1 / H_0 est vrai

P_M : probabilite de Miss "Raté"
decide H_0 / H_1 est vrai

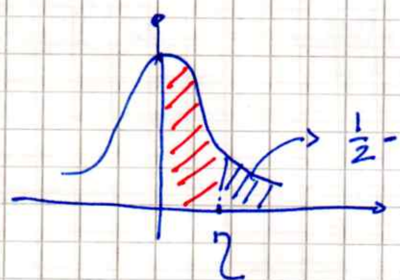
Hyp III bis

$$P_F = \int_{\eta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-r^2/2\sigma^2} \cdot dr = \phi(\eta)$$ Fonction tabulée

souvent on utilise la fct $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt$

$$u = \frac{r}{\sqrt{2}\cdot\sigma} \Rightarrow dr = \sqrt{2}\cdot\sigma\, du$$

$$P_F = \int_{\eta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-u^2} \cdot \sqrt{2}\cdot\sigma\cdot du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\eta}{\sqrt{2}\cdot\sigma}}^{\infty} e^{-u^2} \cdot du$$



$\rightarrow \frac{1}{2} -$ ////

$$\Rightarrow P_F = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathrm{erf}\left(\eta/\sigma\cdot\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\eta/\sigma\sqrt{2}\right)\right)$$

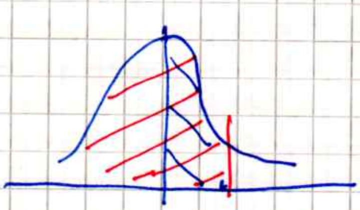
$$= \frac{1}{2}\, \mathrm{erfc}\left(\eta/\sigma\sqrt{2}\right)$$

avec $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$

$$P_M = \int_{-\infty}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r-m)^2} \cdot dr$$

$$u = \frac{(r-m)}{\sqrt{2}\cdot\sigma} \rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sigma} \cdot dr$$

$$P_M = \int_{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-u^2} \cdot \sqrt{2}\cdot\sigma\cdot du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\eta-m}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-u^2} \cdot du$$



$\frac{1}{2} +$ ////

$$\Rightarrow P_M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{erf}\left(\frac{\eta-m}{\sigma\cdot\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\eta-m}{\sigma\cdot\sqrt{2}}\right)\right)$$

erf est une fonction tabulée

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!} \cdot x^{2n+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + O(x^9) \right)$$

$\exists$ d'autres approximations

$$\left(1 - e^{-x^2}\right)^2 \leqslant \mathrm{erf}(x) \leqslant \left(1 - e^{-\frac{4x^2}{\pi}}\right)^{1/2}$$

en 1955 à 10^{-3} près

- $\mathrm{erf}(x) \simeq 1 - e^{-1.9\, x^{1.3}}$ en 1996 à 10^{-2} près

erf : fct speciale en mathematiques

→ probal stat

↳ physique : solution de equation propagation de la chaleur