exemple 2 :

On suppose maintenant que nous avons K observations indep.

$$H_0 : \; r_k = N \qquad k = 1, \dots, K$$

$$H_1 \; r_k = m + N \qquad k = 1, \dots, K$$

on observe un vecteur $R \begin{cases} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_K \end{cases}$

si nous avons des observations independantes

$$f_{R/H_i}(r/H_i) = \prod_{i=1}^{K} f_{r_i/H_j}(r_i/H_j)$$

$$f_{R/H_0}(r_i/H_0) = \prod_{i=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot r_i^2$$

$$f_{R/H_1}(r_i/H_1) = \prod_{i=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp -\frac{1}{2\sigma^2} (r_i - m)^2$$

donc :

$$f_{R/H_0}(r_i/H_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^K \cdot \exp -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{1}^{K} r_i^2$$

$$f_{R/H_1}(r_i/H_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^K \cdot \exp -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{K} (r_i - m)^2$$

$$\Lambda(R) = \exp -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ -\sum r_i^2 + \sum (r_i - m)^2 \right\}$$

$$= \exp -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ -2m \sum_{i=1}^{K} r_i + K \cdot m^2 \right\}$$

$$\Lambda(R) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \qquad \text{prenant le } \ln(-)$$

$$\frac{m}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{K} r_i - \frac{K \cdot m^2}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln(\eta)$$

qui revient à

$$\boxed{\sum_{i=1}^{K} r_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma}$$

c-a-d j'additionne toutes mes observations et je compare / à un seuil

$\sum_{i=1}^{K} r_i$ est dite "statistique suffisante" B P-319

car elle suffit pour prendre une décision

II Critère du Minimax:

avec le critère de Bayes P_0 & P_1 sont connues, ce qui pour certaines applications n'est pas réaliste.

l'idée choisir un P_1 qui va maximiser le risque R, et on va essayer de minimiser R. c-a-d prendre le P_1 le plus défavorable et minimiser R $\longrightarrow$ minimax

$P(H_1/H_0) \rightarrow P_F$ donc $P(H_0/H_0) = 1 - P_F$

$P(H_0/H_1) \rightarrow P_M$ donc $P(H_1/H_1) = 1 - P_M$

$$R = P_0 \cdot C_{00}\,(1-P_F) + P_0\, C_{10} \cdot P_F + P_1 \cdot C_{11} \cdot (1-P_M) + P_1 \cdot C_{01} \cdot P_F$$

avec $P_0 + P_1 = 1 \implies P_0 = 1 - P_1$

$$R = C_{00} \cdot (1-P_F) + C_{10} \cdot P_F + P_1 \Big[(C_{11} - C_{00}) + (C_{01} - C_{11}) \cdot P_M - (C_{10} - C_{00}) \cdot P_F \Big]$$

on cherche P_1^* qui maximise R:

$$\left.\frac{\partial R}{\partial P_1}\right|_{P = P_1^*} = 0 \implies (C_{11} - C_{00}) + (C_{01} - C_{11}) P_M - (C_{10} - C_{00}) P_F = 0$$

si le coût d'une bonne décision est nul $C_{11} = C_{00} = 0$

$$\longrightarrow \boxed{C_{01} \cdot P_M = C_{10} \cdot P_F}$$

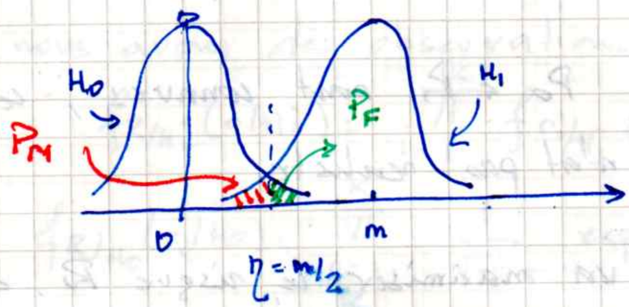
qui est l'éq. du minimax

si on suppose que $C_{01} = C_{10}$

$$\Rightarrow P_F = P_M$$

~~Nous~~ $\cancel{P_F = Q\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) \text{ et } P_M = Q\left(\frac{m-\eta}{\sigma}\right)}$

$\cancel{\Rightarrow Q\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{m-\eta}{\sigma}\right) \Rightarrow \frac{\eta}{\sigma} = \frac{m-\eta}{\sigma} \Rightarrow \eta = m/2}$



Critere de Neyman-Pearson:

il est difficile d'associer des coût C_{ij} et de connaitre les probabilité a priori P_0 et P_1

Pour le critere de N.P.

on fixe P_F à une valeur α fixe et on cherche à avoir une P_D max ou une P_M minimum

on a un probleme d'optimisation sous contrainte

fct objectif $\quad J = P_M + \lambda(P_F - \alpha)$ à minimiser

ou λ ($\lambda \geq 0$) est appele multiplicateur de Lagrange

$$J = \int_{Z_0} p_{R/H_1}(r/H_1)\,dr + \lambda\left\{\int_{Z_1} p_{R/H_0}(r/H_0)\,dr - \alpha\right\}$$

$$= \int_{Z_0}\left[p_{R/H_1}(r/H_1) - \lambda\, p_{R/H_0}(r/H_0)\right]dr + \lambda(1-\alpha) \quad \text{à minimiser.}$$

z_1

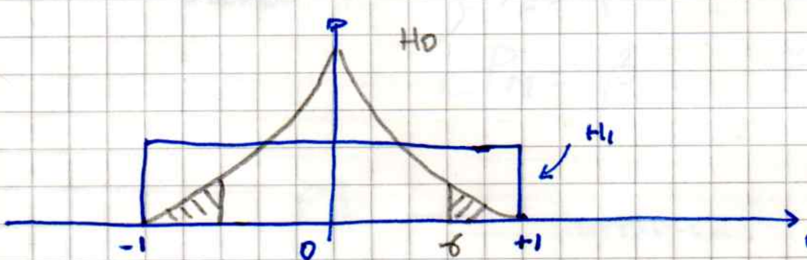
exp! $\quad P_{R/H_0}(r/H_0) = \frac{1}{2(1-e^{-1})}\, e^{-|r|} \quad |r| \leq 1$ et $P_{R/H_1}(r/H_1) = \frac{1}{2}\,\text{rect}\left(\frac{1}{2}\right)$

et $P_0 = P_1$

cherche le Test de Neyman-Pearson avec $P_F = 0,5$

$$\Lambda(r) = \frac{1/2}{\frac{1}{2(1-e^{-1})} \cdot e^{-|r|}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\frac{1-e^{-1}}{e^{-|r|}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \quad \Rightarrow \quad |r| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$



$\sum$ 2 sur 1 = 0,5

trouve le seuil

$$P_F = P(H_1/H_0) \Rightarrow P(|r| > \gamma \,/\, H_0)$$

Detection sequentielle:

Nous avons supposé que le nombre d'observations est fixe. Dans des cas pratiques les observations viennent de manière sequentielle

A chaque observation on peut prendre 3 décisions
- ① → Decide H_0
- ② → " H_1
- ③ → ne dispose pas d'assez d'information pour decider H_0 ou H_1

dans ① & ② le test s'arrete

dans ③ avec une nouvelle observation on refait le test

Ici le nombre d'observations est aleatoire

Avec K observations $R = \{r_1, r_2 \cdots r_K\}$

$$\Lambda(R) = \frac{P_{R/H_1}(r/H_1)}{P_{R/H_0}(r/H_0)}$$

$\Lambda(R) \geq \eta_1$ decide H_1

$\Lambda(R) \leq \eta_0$ decide H_0

$\eta_0 < \Lambda(R) < \eta_1$ → prendre une nouvelle observ. & refaire le test

On prend $\begin{cases} P_F = \alpha & P(H_1/H_0) \\ P_M = \beta & P(H_0/H_1) \end{cases}$

Pb → comment trouver les seuils η_1 & η_0

$$P_D = P_r(H_1/H_1) = \int_{Z_1} p_{R/H_1}(r/H_1)\cdot dr$$

$$= \int_{Z_1} \Lambda(R)\cdot p_{R/H_0}(r/H_0)\cdot dr \quad \text{car} \quad \Lambda(R) = \frac{p_{R/H_1}(r/H_1)}{p_{R/H_0}(r/H_0)}$$

decide H_1 c-a-d $\Lambda(R) \geq \eta_1$

$$P_D \geq \eta_1 \cdot \underbrace{\int_{Z_1} p_{R/H_0}(r/H_0)\,dr}_{P_F} = \eta_1 \cdot P_F = \eta_1 \cdot \alpha.$$

$$P_D = 1 - P_M = 1 - \beta \geq \eta_1 \cdot \alpha \Rightarrow \eta_1 \leq \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

$$\eta_1 \leq \frac{1-\beta}{\alpha}$$

en prenant m̂ procedure

$$\eta_0 \geq \beta/_{1-\alpha}$$

Une autre question : quelle est la valeur moyenne du nombre d'observations ?

$\rightarrow$ Est ce que le processus est fini ?

— o —