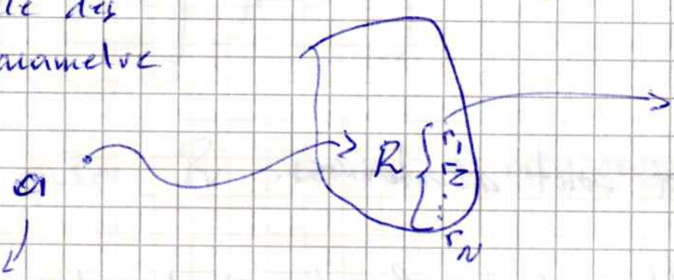
Chap III - Méthodes d'Estimation

Espace des paramètre

Espace des observations

Règle d'Estimation



peut être un

le paramètre peut-être aléatoire ou déterministe

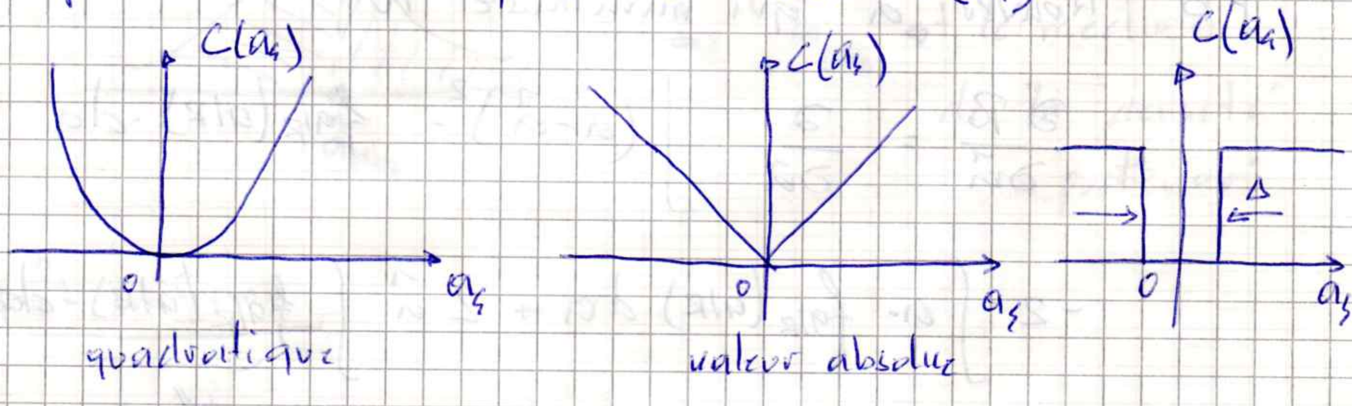
I- Paramètre aléatoire : Estimation de Bayes

a paramètre inconnu — à partir d'observations — $\hat{a}(R)$

comment mesurer la "qualité" de cet estimateur ?

qd on estime on commet une erreur $a_E = \hat{a}(R) - a$

On peut définir des fonctions coût $C(a_E)$



- coût ↗ avec valeur de a_E
- erreur par excès ou par défaut ont m̂ coût

-

- $|a_E| < \Delta/2 \rightarrow = 0$
- sinon m̂ coût

on peut définir n'importe quelle fct coût

On suppose que l'on connaît la densité de proba. de a $f_a(a)$

→ On définit le risque R ou le coût moyen.

$$R = \mathbb{E}\{C(a_\varepsilon)\}$$

Les observations R et a sont aléatoires.

$$\Rightarrow \quad R = \mathbb{E}\{C(a_\varepsilon)\} = \iint C(a_\varepsilon) \cdot f_{a,R}(a,R)\, da \cdot dr$$

où $f_{aR}(a,R)$ est la densité de probabilité conjointe

on cherche à minimiser R

* Coût quadratique : $C(a_\varepsilon) = (a - \hat{a})^2$

$$f_{a,R}(a,R) = f_{a|R}(a|R) \cdot f_R(R)$$

$$R = \int f_R(R) \cdot \underbrace{\int (a-\hat{a})^2 \cdot f_{a|R}(a|R) \cdot da}\cdot dr$$

minimiser R ⇒ min. dr $=$

Pb Trouver $\hat{a}$ qui minimise R

$$\frac{\partial R}{\partial \hat{a}} = \frac{\partial}{\partial \hat{a}} \int (a-\hat{a})^2 \cdot f_{a|R}(a|R) \cdot da$$

$$-2 \int a \cdot f_{a|R}(a|R)\, da + 2\hat{a} \underbrace{\int f_{a|R}(a|R) \cdot da}_{1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{a}_{ms} = \int a \cdot f_{a|R}(a|R) \cdot da}$$

⇒ $\hat{a}_{ms}$ est la moyenne de $f_{a|R}(a|R)$ → densité a posteriori

• Coût valeur absolue $C(a_\varepsilon) = |a_\varepsilon|$

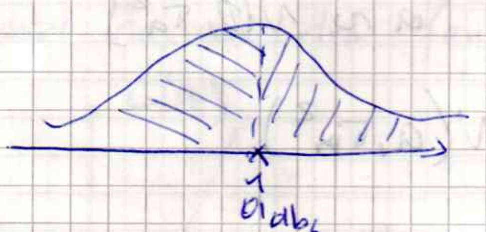
$$R = \int f_R(R) \cdot \int |a - \hat{a}| \cdot f_{a|R}(a|R) \cdot da \cdot dr$$

minimiser R revient à minimiser $\int |a-\hat{a}| \cdot f_{a|R}(a|r)\, da$

$$\int_{-\infty}^{\hat{a}} (\hat{a} - a) \cdot f_{a|R}(a|R) \cdot da + \int_{\hat{a}}^{\infty} (a - \hat{a}) \cdot f_{a|R}(a|R)\, da$$

$$\left.\frac{\partial \,\cdot}{\partial a}\right|_{a = \hat{a}_{abs}} = 0 \Rightarrow - \int_{-\infty}^{\hat{a}_{abs}} f_{a|R}(a|R) \cdot da + \int_{\hat{a}_{abs}}^{\infty} f_{a|R}(a|R) \cdot da = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\hat{a}_{abs}} f_{a|R}(a|R) \cdot da = \int_{\hat{a}_{abs}}^{\infty} f_{a|R}(a|R) \cdot d$$



$\Rightarrow$ $\hat{a}_{abs}$ est le médian de la densité a posteriori

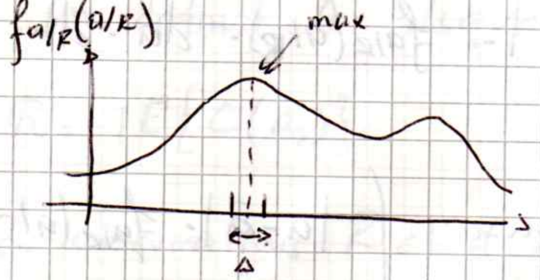
• Coût uniforme

dans le cas

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(R) \cdot \int C(a_\varepsilon) \cdot f_{a|R}(a|R) \cdot da \cdot dR$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(R) \cdot \left[1 - \int_{\hat{a} - \Delta/2}^{\hat{a} + \Delta/2} f_{a|R}(a|R) \cdot dR \right]$$

il faut minimiser R.



si Δ très petit

$\longrightarrow$ on maximise $f_{a|R}(a|R)$

$$\longrightarrow \hat{a}_{map} \longrightarrow \left.\frac{\partial f_{a|R}(a|R)}{\partial a}\right|_{\hat{a}=\hat{a}_{map}} = 0$$

le max de la densité à posteriori

donc

- coût quadratique : moyenne de la densité à posteriori
- — val. absolue : median "
- — uniforme : max "

Exp 1 N observation indépendantes

$r_i = a + n_i \quad i = 1, \dots, N \qquad n_i \sim N(0, \sigma_n^2)$

et a est aléatoire $\quad a \sim N(0, \sigma_a^2)$

$$\Rightarrow f_{R|a}(R|a) \sim N(a, \sigma_n^2)$$

on cherche la densité à posteriori

$$f_{a|R}(a|R) = \frac{f_{a,R}(a,R)}{f_R(R)} = \frac{f_{R|a}(R|a) \cdot f_a(a)}{f_R(R)}$$

Pb ici $f_R(R)$ à la variable qui nous intéresse c'est a

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a|R}(a|R) \cdot da = 1 \quad \Rightarrow \quad f_R(R)$ peut être comme étant une cste pour avoir $\int \cdot = 1$

$\bar{E}_2$

$$f_{a|R}(a|R) = \prod_i \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_n} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}(r_i - a)^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_a} e^{-\frac{1}{2\sigma_a^2}a^2} \cdot \frac{1}{f_R(R)}$$

si on a N observations indep.

$$f_{a|R}(a|R) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\cdot\sigma_n}\cdot\frac{1}{f_R(R)} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot\sum_{i=1}^{N}(r_i-a)^2}{\sigma_n^2} + \frac{a^2}{\sigma_a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{(r_i-a)^2}{\sigma_n^2} + \frac{a^2}{\sigma_a^2} = \frac{\sum r_i^2}{\sigma_n^2} - 2a\frac{\sum r_i}{\sigma_n^2} + \frac{Na^2}{\sigma_n^2} + \frac{a^2}{\sigma_a^2}$$

$$= \left(\frac{N}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\sigma_a^2}\right)a^2 - 2a\frac{\sum r_i}{\sigma_n^2} + \frac{\sum r_i^2}{\sigma_n^2}$$

$$= \underbrace{\frac{N\sigma_a^2 + \sigma_n^2}{\sigma_a^2\cdot\sigma_n^2}}_{\sigma_p^2 \triangleq} a^2 - 2a\frac{\sum r_i}{\sigma_n^2} + \frac{\sum r_i^2}{\sigma_n^2}$$

$$= \sigma_p^2\left(a^2 - 2a\frac{\sum r_i}{\sigma_p^2\cdot\sigma_n^2}\right) + \frac{\sum r_i^2}{\sigma_n^2}$$

$$= \sigma_p^2\left(a - \frac{\sum r_i}{\sigma_p^2\cdot\sigma_n^2}\right)^2 \underbrace{- \left(\frac{\sum r_i}{\sigma_p^2\cdot\sigma_n^2}\right)^2 + \frac{\sum r_i^2}{\sigma_n^2}}_{g(r)}$$

$$\Rightarrow f_{a|R}(a|R) = \{\ \} \cdot \exp -\frac{1}{2}\sigma_p^2\left(a - \frac{\sum r_i}{\sigma_p^2\cdot\sigma_n^2}\right)^2 \cdot \{\ \}_r$$

$$= \{\ \} \cdot \exp -\frac{1}{2\sigma_p^{-2}}\left(a - \frac{\sum r_i}{\sigma_p^2\sigma_n^2}\right)^2$$

$\hookrightarrow$ Gaussienne de variance .. & moyenne $\frac{\sum r_i}{\sigma_p^2\cdot\sigma_n^2}$

$$\text{moy} = \frac{1}{\frac{N\sigma_a^2+\sigma_n^2}{\sigma_a^2\cdot\sigma_n^2}\cdot\sigma_n^2}\cdot\sum r_i = \frac{\sigma_a^2}{N\sigma_a^2+\sigma_n^2}\cdot\sum r_i$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_n^2/N}\cdot\frac{1}{N}\sum_i r_i$$

si la densité a posteriori est Gaussienne $\longrightarrow$

median = mean = max = val. moyenne

$$\Rightarrow \quad \hat{a}_{ms} = \hat{a}_{abs} = \hat{a}_{map} = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \frac{\sigma_n^2}{N}} \cdot \frac{1}{N} \sum r_i$$

$\Rightarrow$ moyenne des observation pondérée par un facteur

$$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \frac{\sigma_n^2}{N}}$$

si $N \nearrow$ influence du bruit diminue.

$N \nearrow\nearrow \quad \longrightarrow \frac{1}{N} \sum r_i$

Paramètre non aléatoire

↳ paramètre inconnu mais non aléatoire

→ 1ère approche

$$\mathcal{R} = \underset{\mathbb{E}\{C(a_\varepsilon)\}}{} = \int_{-\infty}^{+\infty} C(a_\varepsilon) \cdot f_{R|a}(R|a) \cdot dR$$

par exple pour un coût quadratique $C(a_\varepsilon) = (a-\hat{a})^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (a-\hat{a})^2 \cdot f_{R|a}(R|a)\, dR \quad \text{à minimiser}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}(-) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2(a-\hat{a}) \cdot f_{R|a}(R|a) \cdot dR = 0 \Rightarrow \hat{a} = a$$

⇒ !! bloqué estimé est la valeur cherchée !!

↳ ne dépend pas des observations

* Estimateur du maximum de vraisemblance

(MLE : maximum likelihood Estimate)

$f_{R|a}(R|a)$ → fct vraisemblance → son max est vue comme étant la valeur la "plus probable" car elle a une proba d'occurrence maximum

la + vraisemblable.

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial}{\partial a} f_{R|a}(R|a)\right|_{a=\hat{a}_{MLE}} = 0$$

souvent on prend $\left.\frac{\partial}{\partial a} \ln\left(f_{R|a}(R|a)\right)\right|_{a=\hat{a}_{MLE}} = 0$

petite parenthèse.

Inegalité de Cramer-Rao pour des paramètres aléatoires

$$\mathbb{E}\left\{(\hat{a}-a)^2\right\} \geqslant \left(\mathbb{E}\left\{\left[\frac{\partial \ln f_{R,a}(R,a)}{\partial a}\right]^2\right\}\right)^{-1} \quad \text{(eq. 4)}$$

$$= \left(-\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2 \ln f_{R,a}(R,a)}{\partial a^2}\right\}\right)^{-1} \quad \text{(eq. 5)}$$

$\Rightarrow$ ici nous avons la densité de prob. conjointe

$f_{R,a}(R,a)$

avec egalité si

$$\boxed{\frac{\partial \ln f_{R,a}(R,a)}{\partial a} = k \cdot (\hat{a}-a)} \quad \text{eq. 6.}$$

si on derive eq. 6

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln f_{R,a}(R,a) = -k$$

$$f_{R,a}(R,a) = f_{a|R}(a|R) \cdot f_R(R)$$

$$\ln(\quad " \quad) = \ln\left(f_{a|R}(a|R)\right) + \ln\left(f_R(R)\right)$$

si on $\frac{\partial^2}{\partial a^2}$

$$\rightarrow = \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln\left(f_{a|R}(a|R)\right) + 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln\left(f_{a|R}(a|R)\right) = -k$$

$$\Rightarrow \ln\left(f_{a|R}(a|R)\right) = -ka^2 + k_1 a + k_2$$

$$\Rightarrow f_{a|R}(a|R) = \exp\left(-ka^2 + k_1 a + k_2\right)$$

$\hookrightarrow$ $f_{a|R}(a|R)$ est Gaussienne

la densité a-posteriori est Gaussienne pour avoir un estimateur efficace

Résumé

- **Paramètre aléatoire :**

On peut définire une fct coût

- coût quadratique : $C(a_\epsilon) = (a-\hat{a})^2$
- " v. Absolu : $C(a_\epsilon) = |a-a|$
- " Uniforme : $C(a_\epsilon) = 0$ si $|a_\epsilon| \leq \Delta/2$
  $= 1$ sinon.

minimise coût moyen : risque

$\hat{a}_{ms}$ = moyenne de $f_{a|R}(a|R)$

$\hat{a}_{abs}$ = median " "

$\hat{a}_{map}$ = max " "

Inégalité de C.R.

$$\mathbb{E}\left\{(a-\hat{a})^2\right\} \geq \left[\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial a}\ln f_{R,a}(R,a)\right)^2\right\}\right]^{-1}$$

$$= -\left[\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}\ln f_{R,a}(R,a)\right\}\right]^{-1}$$

avec égalité si

$f_{a|R}(a|R)$ est Gaussienne

$\hookrightarrow \hat{a}_{ms} = \hat{a}_{abs} = \hat{a}_{map}$.

- **Paramètre non aléatoire :**

fct de vraissemblance $f_{R|a}(R|a)$

$\hat{a}_{MLE}$ max de $f_{R|a}(R|a)$

$\Rightarrow$ I. C.R.

$$Var\left\{(a-\hat{a})\right\} \geq \left(\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{R|a}(R|a)\right]^2\right)^{-1}$$

$$= -\left[\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln f_{R|a}(R|a)\right\}\right]^2$$

estimateur sans biais $\mathbb{E}\left\{(a-\hat{a})\right\}=0$

si limite de CR est atteinte $\rightarrow$ estimateur efficace

c-a-d est de var. minimale

et on peut ecrire $\frac{\partial}{\partial a} \ln\left(f_{R|a}(R|a)\right) = k(a)\cdot(\hat{a}-a)$

si l'estimateur est biaisé ??

I $Y \sim N(0, \sigma^2)$ (6.2) : σ paramètre non aléatoire

- Trouver estimé du max. de vraisemblance de σ et de σ^2
- les estimateurs sont-ils efficaces ?

fct de vraiss. $f_{Y/\sigma}(y/\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-y^2/2\sigma^2}$

$\ln(-) = \sim - \ln(\sigma) - y^2/2\sigma^2$

$\frac{\partial}{\partial\sigma}(-) = -\frac{1}{\sigma} - \frac{(-1)\,4\sigma\,y^2}{4\,\sigma^4} = y^2/\sigma^3 - \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^3}\cdot(y^2 - \sigma^2)$

$\frac{\partial}{\partial\sigma}(-) = 0 \Rightarrow \hat{\sigma} = \pm y \Rightarrow \hat{\sigma} = +y \quad (\sigma > 0)$

on ne retrouve pas la forme $k(a)\cdot(\hat{a} - a) \Rightarrow$ estimateur efficace n'∄

on note $\gamma = \sigma^2 \rightarrow \sigma = \gamma^{1/2}$

$\ln(-) = \sim - \ln(\gamma^{1/2}) - y^2/2\gamma$

$\frac{\partial}{\partial\gamma} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\gamma} - \frac{-y^2 \cdot 2}{4\gamma^2} = \frac{1}{2\gamma^2}(y^2 - \gamma)$

$\frac{\partial}{\partial\gamma} = 0 \rightarrow \hat{\gamma} = y^2$ on a donc $\frac{1}{2\gamma^2}(\hat{\gamma} - \gamma)$

on retrouve la forme cherchée $\rightarrow$ estimateur efficace ∃ si biais = 0

<u>biais</u>: $\mathbb{E}\{y^2\} = \sigma^2 \Rightarrow \mathbb{E}\{y^2 - \sigma^2\} = 0$ estimateur sans biais

$\Rightarrow$ limite de CR est atteinte

$$\mathrm{Var}\{\ \} = \frac{-1}{\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}(-)\right\}}$$

$\frac{\partial}{\partial\gamma} = y^2/2\gamma^2 - \frac{1}{2\gamma} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} = \frac{-y^2 \cdot 4\gamma}{4\gamma^4} + \frac{2}{4\gamma^2} = \frac{-y^2}{\gamma^3} + \frac{1}{2\gamma^2}$

$\mathbb{E}\{-\} = \frac{-\mathbb{E}\{y^2\}}{\gamma^3} + \frac{1}{2\gamma^2} = -\frac{\gamma}{\gamma^3} + \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{-1}{2\gamma^2}$

$\Rightarrow \mathrm{Var}\{-\} = 2\gamma^2 = 2\sigma^4$

II (6.3) Y_1 & Y_2 2 Gaussiennes indep. avec $\mathbb{E}\{Y_1\} = m$, $\mathbb{E}\{Y_2\} = 3m$

et $var\{Y_1\} = var\{Y_2\} = 1$

a) Trouver l'estimateur du max. de vraisemblance de m.

b) si ~~l'estimateur de m est de la forme $\alpha Y_1 + \beta Y_2$ trouver α & β pour que le biais soit nul~~.

indep $\longrightarrow$ $f_Y(y) = f_{Y_1}(y_1) \cdot f_{Y_2}(y_2)$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp -\frac{1}{2}\left[(y_1 - m)^2 + (y_2 - 3m)^2\right]$$

$$\ln(-) = \sim -\frac{1}{2}(y_1 - m)^2 - \frac{1}{2}(y_2 - 3m)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial m} = -\frac{1}{2}\left[2(y_1 - m)(-1) + 2(y_2 - 3m)(-3)\right]$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}}\left[(y_1 - m) + 3(y_2 - 3m)\right] = \left(y_1 + 3y_2 - 10m\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial m} = 0 \Longrightarrow \hat{m} = y_1 + 3y_2 / 10$$

$$\mathbb{E}\{\hat{m}\} = \frac{m + 3 \cdot 3m}{10} = m \longrightarrow \text{estimateur sans biais}$$

III (6.4) observation de l'enveloppe d'un signal (Rayleigh)

$$f_{Y_k}(y_k) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-y_k/\theta\right) \quad k = 1, \dots, N \quad \theta \text{ paramètre inconnu.}$$

N observ. indep.

on cherche $\hat{\theta}$:

$$f_{Y/\theta}(y/\theta) = \prod_{k=1}^{N} f_{Y_k/\theta}(y_k/\theta) = \frac{1}{\theta^N} \exp\left(-\frac{1}{\theta} \sum y_k\right)$$

$$\ln(-) = -N \cdot \ln(\theta) - \frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{N} y_k$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(-) = -\frac{N}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum y_k = \frac{N}{\theta^2}\left(\frac{1}{N}\sum y_k - \theta\right)$$

donc $\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum y_k$ & on retrouve la forme

$$\rightarrow \frac{N}{\theta^2}\left(\hat{\theta} - \theta\right)$$

biais : $\mathbb{E}\{\hat{\theta}\} = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{N}\sum y_k\right\} = \frac{1}{N}\cdot N\theta = \theta$ → sans biais

estimateur sans biais → est efficace.

L.C.R.

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(-) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{N}{\theta^2}\cdot(\hat{\theta}-\theta)\right) = -\frac{N\cdot\hat{\theta}\cdot 2\theta}{\theta^4} + \frac{N}{\theta^2}$$

$$= \frac{N}{\theta^2}\left(1 - \frac{\hat{\theta}\cdot 2}{\theta}\right)_{=\theta}$$

$$\mathbb{E}(-) = \frac{N}{\theta^2}\left(1 - \frac{E(\hat{\theta})\cdot 2}{\theta}\right) = -\frac{N}{\theta^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(-) = \theta^2/N$$

IV (6.6) Trouver les estimateur de ML de m et σ^2 si

$f_{Y_k}(y_k) \sim N(m, \sigma^2)$ avec N observations indep.

$$f_{Y/m,\sigma^2}(y/m,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{N} f_{Y_k/m\sigma^2}(y_k/m\sigma^2) = \prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}(y_k-m)^2\right)$$

Puisque l'on cherche l'estimé de σ^2 → on prend $\theta = \sigma^2$

$$\ln(-) = \sim -\frac{N}{2}\ln\theta - \frac{1}{2\theta}\sum(y_k-m)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial m}- = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2\theta}\sum 2(y_k-m)(-1) = 0 \Rightarrow \sum(y_k-m) = 0 \quad \sum y_k - N\cdot m = 0$$

$$\Rightarrow \hat{m} = \frac{1}{N}\sum y_k.$$

↳ moyenne.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow -\frac{N}{2}\frac{1}{\theta} - \frac{(-2)}{4\theta^2}\cdot\sum(y_k-m)^2 = 0$$

$$\frac{N}{2\theta} = \frac{1}{2\theta^2}\cdot\sum(y_k-m)^2 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{N}\cdot\sum(y_k-m)^2$$

moy. des variance.

(6.14)

on observe $Y = X + N$ $\qquad N \sim \mathcal{N}(1, \sigma^2)$ et $X \sim \mathcal{U}[0,2]$

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(n-1)^2} \qquad \text{et} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

on cherche : $\hat{x}_{map}$

on cherche la densite à posteriori

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y/X}(y/x) \cdot f_X(x)}{\underbrace{f_Y(y)}_{\text{indep. de } x.}}$$

on prend $\ln(-)$

$$= \ln f_{Y/X}(y/x) + \ln f_X(x) + \dots$$

$$f_{Y/X}(y/x) \sim \mathcal{N}(x+1, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp -\frac{1}{2\sigma^2}(y-x-1)^2$$

$$\ln(-) = \sim \quad \frac{-1}{2\sigma^2}(y-x-1)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-) = \frac{-1}{2\sigma^2}(y-x-1)(-1) = \frac{1}{2\sigma^2}(y-x-1)$$

$$f_X(x) = 1/2 \quad 0 < x < 2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \dots = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sigma^2}(y-x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x}_{map} = y-1 \qquad 0 \leq x \leq 2$$