Chapitre III

LE MOYEN ÂGE

Le moyen âge s'étend du début du cinquième à la fin du seizième siècle. Cette époque correspond à l'installation, en Europe et autour du bassin méditerranéen, des trois grandes religions monothéistes : le Judaïsme, le Christianisme et l'Islam.
En Europe une société féodale, dominée par l'église, a remplacé la brillante civilisation gréco-romaine. Ce sont les arabo musulmans qui ont pris le relais des civilisations de l'antiquité et l'ont transmis à l'Europe.

I. LES PAYS D' ISLAM.

La civilisation arabe a prospéré, durant près de huit siècles, sur un vaste territoire qui, à une certaine époque, s'étendait de la péninsule ibérique à l'Inde en passant par l'Afrique du Nord.

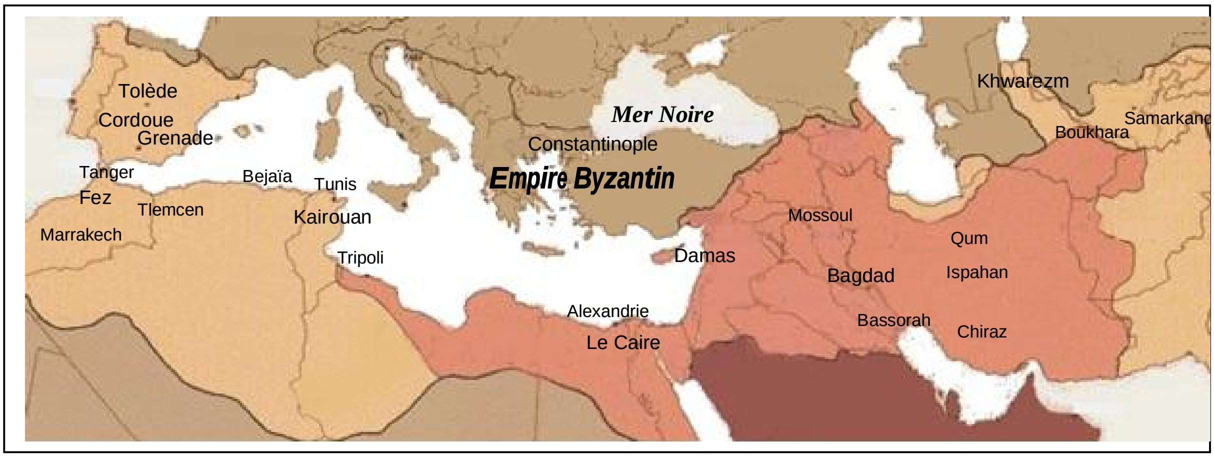


Figure III . 1. *Les pays d'Islam au moyen âge*

Cette civilisation, forgée par des populations d'origines et de confessions différentes[1], a atteint un niveau très élevé grâce à la tolérance des dynasties arabes qui ont régné à cette époque et au respect qu'elles vouaient au savoir.

---

[1] L'Islam tolère et respecte les autres religions : Selon Djebbar *''Une histoire de la science arabe''* page 32 *''Un juif ou un chrétien ne pouvait être roi ou calife, puisque celui qui assumait l'une de ces fonctions était censé être le chef des musulmans, mais il pouvait assumer pratiquement toutes les autres fonctions politiques''*. Il pouvait être chef des armées, ministre ou exercer une fonction équivalant à celle de premier ministre. Cette fonction a été assumée par Samuel Ibn Naghrilla au XI^{ème} siècle à Grenade. Dans le domaine des sciences, la contribution des ''arabes'' non musulmans fut loin d'être négligeable.
Nous désignerons par ''arabes'' tous les savants qui publiaient en arabe.

Selon l'historien Will Durant [2]:

> Les princes omeyyades et abbassides dépêchèrent des messagers à Constantinople et d'autres cités hellénistiques, parfois à leurs ennemis traditionnels les empereurs grecs, demandant des livres grecs, spécialement de sciences et de mathématiques : c'est ainsi que les ''Eléments d'Euclide'' vinrent en Islam. En 830 Al Mamoun fonda à Bagdad une Maison de la Sagesse '' Bayt Al Hikmah'' comprenant une université scientifique, un observatoire et une bibliothèque publique.

En pays d'Islam, la langue arabe fut modernisée et devint la langue de la science utilisée par tous les savants, quelque soit leur origine. C'est ainsi que le Perse Omar Al Khayyam rédigeait en arabe ses ouvrages de mathématiques et en persan ses poèmes.
Le papier, inventé par les chinois, fut utilisé par les arabes dès le VIII ème siècle ce qui a facilité la diffusion de la science[3].
Après une période de traduction et d'étude des ouvrages grecs, syriaques et indiens, commence l'âge d'or de la science arabe avec de nombreuses découvertes scientifiques : en physique (mécanique et optique), en astronomie, en chimie, en botanique, en géographie, en médecine et surtout en mathématiques.

I. 1. La mécanique

Le concept d'*élan,* considéré par Philopon d'Alexandrie[4] comme la cause du mouvement, est repris au XIème siècle en pays d'Islam par Ibn Sina (Avicenne)[5]. Ce dernier introduit le concept de '*mayl*'' (inclination) . Selon Djebbar, Avicenne considère trois genres de ''*mayl*'' :
L'inclination naturelle est la tendance d'un corps à rejoindre son lieu naturel par la gravité ou la légèreté.
L'inclination violente crée le mouvement[6] : c'est l'*élan* de Philopon.
L'inclination psychique est à l'origine du mouvement des êtres animés.
En outre, il énonce une ébauche du principe de l'inertie :

> Un corps au repos résiste à tout ce qui a tendance à le mettre en mouvement

Abu'l-Barakat al-Baghdadi[7] se situe dans la lignée d'Avicenne. Il propose une explication de *l'accélération des corps en chute libre* par l'accumulation des augmentations successives de la vitesse[8].
Selon S. Pines[9], Al Baghdadi rejette la loi d'Aristote sur le mouvement et postule que :

---

[2] Durant Will : *Histoire de la civilisation*, Tome X page 406. Ed. Rencontre, Lausanne, 1964
[3] Les premières fabriques de papier furent construites à Samarcande et à Bagdad sous le califat de Harun ar Rachid (Djebbar *'Une histoire de la science arabe''* page 87)
[4] Voir Ch II § 3. 1.
[5] Ibn Sina : Né en 980 à Boukhara et décédé en 1037 en Iran.
[6] Ibn Sina, comme Aristote, fait la distinction entre le mouvement naturel et le mouvement forcé. Seul l'élément moteur n'est plus le même.
[7] Abu'l Barakat Hibat Allah Al-Baghdadi (1080 - 1165) : philosophe et physicien arabe, né près de Mossoul (Irak).
[8] A. C. Crombie, *Histoire des sciences de St Augustion à Galilée* (2 tomes) PUF 1959
[9] S. Pines (1970). "*Abu'l-Barakāt al-Baghdādī , Hibat Allah*". Dictionary of Scientific Biography. New York:

> La ''force'' est proportionnelle à l'accélération et non pas à la vitesse.

C'est le Principe Fondamental de la Dynamique qui sera clairement formulé au XVII[ème] siècle par Isaac Newton avec l'introduction du concept de masse[10].
Al-Baghdadi a également introduit la notion de *mouvement relatif* lorsqu'il dit que:

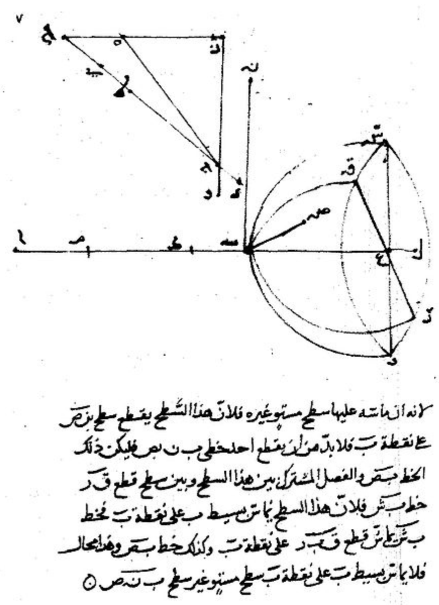
> '' Il n'y a mouvement que si les positions relatives des corps considérés changent''[11]

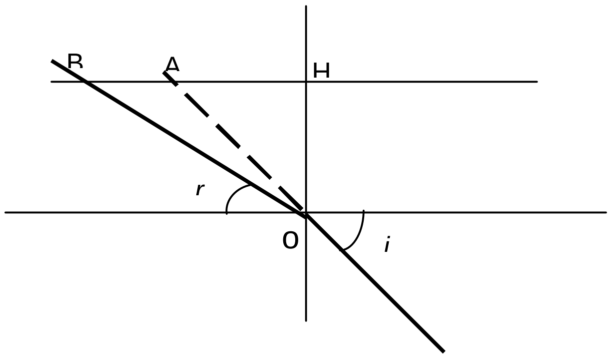
Or c'est parce qu'ils ne tenaient pas compte de la relativité du mouvement, que les grecs pensaient que la terre était fixe.

I. 2. L'optique :

En pays d'Islam, de nombreux savants se sont intéressés à l'étude de la lumière[12]. Parmi les plus célèbres, citons deux grands savants qui vécurent à peu près à la même époque dans l'actuel Irak : Ibn Sahl (940-1000) qui vécut à Baghdad et Ibn Al Haytham (Alazen), né en 965 à Bassorah, décédé en 1039 au Caire.
Ibn Sahl a énoncé une loi de la réfraction : il montre, à partir des deux triangles rectangles portés sur la figure, que le rapport des deux hypoténuses est constant. Celles-ci représentent le rayon réfracté et le prolongement du rayon incident qui passent par le même point O de l'interface.
La loi de la réfraction d'Ibn Sahl peut être présentée sous la forme :

$$\frac{OB}{OA} = k \quad \text{où} \quad k \text{ est une constante} \qquad \text{(a)}$$





⇦ Reproduction d'une page du manuscrit d'Ibn Sahl donnée par Rasched 1990

Figure III . 2. *La réfraction*

---

[10] Voir Ch IV §.3.
[11] Langermann, Y. Tzvi (1998), "*al-Baghdadi, Abu 'l-Barakat*'' *Islamic Philosophy*, Routledge Encyclopedia of Philosophy,
[12] Les arabes ont appris, à partir des ouvrages qu'ils ont traduits, les lois de la propagation de la lumière et de la réflexion, ainsi que les propriétés des miroirs (*miroirs ardents*)

On peut retrouver, à partir de cette loi, celle que donneront, sept siècles plus tard, Snell et Descartes. En effet, la figure montre que :

$$\frac{OH}{OA} = \sin i \qquad \& \qquad \frac{OH}{OB} = \sin r \qquad \text{(b)}$$

A partir de (a) & (b) on obtient la loi des sinus:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = k$$

Ibn Sahl a effectué de nombreux travaux sur les miroirs et les lentilles.

Ibn Al Haytham apporte une importante contribution à l'optique; il entre-prend de nombreuses expériences et écrit plusieurs ouvrages dont ''*Kitab al manadhir''*. Il a été le premier à préconiser que la lumière n'est pas émise par l'œil de l'observateur comme le pensaient les grecs, mais par une source de lumière. Selon Rosmorduc, c'est Ibn Al Haytham qui introduit le concept de ''*rayon lumineux* '' qui n'apparaît pas dans les textes grecs, ''*ce qui marque un vrai tournant conceptuel dans l'histoire de l'optique géométrique''*[13].

Il découvre le principe de la chambre noire (al bayt al mudhlim), et réussit à obtenir l'*image renversée* d'un objet extérieur sur l'écran de sa chambre noire. Il s'intéresse également aux phénomènes de dispersion de la lumière :*''Il postule que la réfraction des rayons lumineux est due aux différences de vitesse de la lumière dans les milieux transparents*[14]''. Il aborde des problèmes relatifs à l'arc en ciel, et aux éclipses.

Selon Djebbar, Ibn Al Haytham ''*adopte une démarche faite d'expériences, d'inductions, de raisonnements, de retours à l'expérience, pour expliquer ou justifier les affirmations qu'il avance, en particulier celles qui contredisent les théories anciennes de la lumière''*[15].

L'œuvre d'Ibn Al Haytem a inspiré le savant polonais Vitellion (1230/1300) et c'est à partir des travaux de ce dernier que Kepler, dans *les paralipomènes*[16] *à Vitellion* livre paru en 1604, a jeté les bases de l'optique géométrique moderne.

I.3. L'astronomie :

Lors de la période d'apprentissage, les arabes ont lu et traduit des ouvrages perses: *tables de Sahriyar*, indiens: *école du Sinhind* et grecs: *l'almageste* de Ptolémée, la s*phère armillaire* de Théon d'Alexandrie etc..

L'intérêt des arabes pour l'astronomie fut initialement lié à la religion et à l'astrologie :

- L'astronomie permet de déterminer la ''*quibla*'' (direction de la Mecque) et l'heure de chaque prière en fonction du lieu et du calendrier. Les arabo musulmans ont adopté un calendrier exclusivement lunaire[17] dont l'année est de onze jours un quart plus courte que l'année solaire. Ainsi le jour de

[13] Dans Djebbar *'Une histoire de la science arabe''* page 268.

[14] De La Cotardière : page 116

[15] Djebbar : *''Une histoire de la science arabe''* p 269

[16] *Paralipomènes :* suppléments à un ouvrage.

[17] Avant l'Islam, les peuples d'Arabie utilisaient, comme les mésopotamiens, un calendrier de 12 mois en alternant les mois de 29 et 30 jours. Pour éviter un décalage par rapport aux saisons, ils intercalaient, tous les trois ans, un 13ème mois (Durant Tome X page 292)

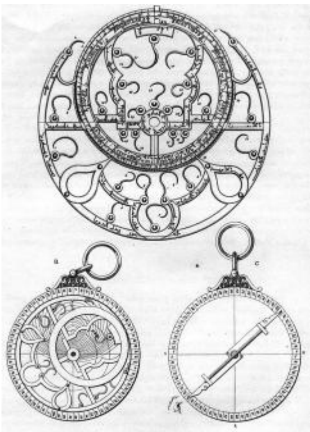
l'an musulman, *Aouel Moharram*, parcourt toutes les saisons et retrouve l'équinoxe du printemps par exemple au bout de trente trois ans.

- Les astronomes étaient sollicités par la société, en particulier par les rois et les princes, pour prédire l'avenir. Il y eut de nombreux astrologues célèbres, Albuma'shar[18] par exemple, dont les œuvres furent traduites en latin
- En astronomie théorique, les arabes ont conservé le système géocentrique de Ptolémée. Mais ce dernier a été critiqué par Ibn al Haytham dans son livre *''les doutes sur Ptolémée''* ce qui a incité certains savants à proposer d'autres modèles du mouvement des astres tout en gardant un système géocentrique. C'est ainsi que al Biruni[19], émit l'hypothèse d'une Terre placée au centre de l'univers mais tournant autour d'elle-même. Il finit par rejeter cette hypothèse en reprenant l'argument des grecs.

Les arabes connaissaient les cinq planètes déjà répertoriées depuis l'antiquité :

Mercure	Vénus	Mars	Jupiter	Saturne
عطارد	الزهرة	المـَرّيخ	المشتري	زحل

Pour observer le ciel[20] les astronomes arabes disposaient de l'astrolabe et de la sphère armillaire déjà utilisés par les grecs. Ils se sont appliqués à perfectionner les performances de ces instruments, notamment celles de l'astrolabe.



Astrolabe arabe 1208

Un astrolabe se compose
- d'un disque gradué en degrés
- et d'un bras, l'*alidade*, qui tourne par rapport au centre du disque.

La marque 0° sur le cercle est alignée avec l'horizon.
L'alidade pivote sur son axe et est pointée vers l'astre afin de lire l'angle représentant sa hauteur sur les repères du disque.

La sphère armillaire est un appareil qui représente la sphère céleste et qui montre le mouvement apparent des étoiles et du soleil autour de la Terre.

Figure III . 3.

L'observation des astres a permis aux arabes de dresser des tables astronomiques (*al-Zij*) dont celles qui ont été publiées par al-Battani[21] et qui apportèrent de nombreuses corrections aux tables de Ptolémée.

[18] Abu Ma'shar al-Balkhî, né en Afghanistan en 787, mort en 886 à al-Wasit, Irak.
[19] al Biruni (973/1048) astronome, mathématicien d'origine persane.
[20] Parmi les grands observatoires construits en Orient, le plus important fut celui de Maragha en Asie Centrale. Il a été financé, au treizième siècle, par l'empereur Mongol Hulagu et dirigé par Nasr eddine Tusi.
[21] Al Battani (855/923) astronome et mathématicien arabe, originaire de la ville de Battan en Anatolie

Al Biruni

utilisait les éclipses pour déterminer la longitude des lieux sur Terre et ses observations astronomiques lui servirent à définir la valeur d'un degré du méridien[22].

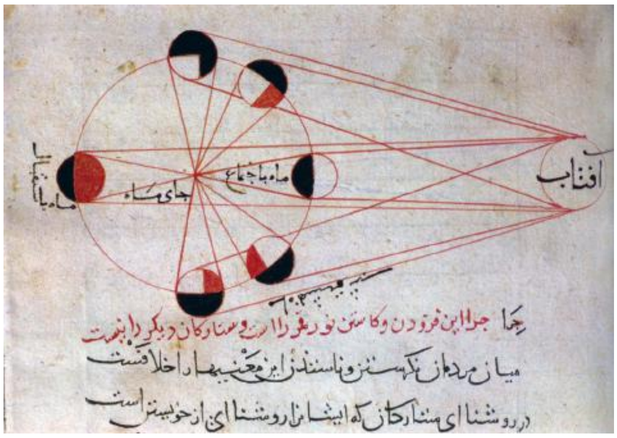


Figure III . 4.*http://en.wikipedia.org/wiki/File:Lunar_eclipse_al-Biruni.jpg*

I. 4. Les mathématiques.

Les arabes s'intéressèrent à l'arithmétique (les chiffres arabes), la trigonométrie plane et sphérique, l'analyse combinatoire, l'algèbre etc..

L'arithmétique & l'algèbre.

Le mathématicien le plus célèbre fut incontestablement Muhammad Ibn Moussa dit al Khwarizmi[23] (780 -850). Il écrit, au début du IXème siècle, un ouvrage pédagogique, intitulé :

كتاب الجامع و التفريق بحساب الهند

''livre sur le calcul indien''

où il expose le système de numération décimale[24] avec l'introduction du zéro. On y trouve également les différentes opérations arithmétiques: Addition, soustraction, multiplication division et extraction de racines carrées et cubiques.
L'ouvrage d' al Khwarizmi, dont le titre est :

كتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة

Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison,

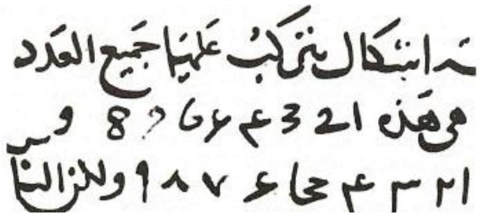
[22] Ronan page 302. Selon Arkan Simaan, les arabes avaient déjà, en 850, mesuré, à la latitude de 30°, le degré du méridien terrestre qui donnait une circonférence de la Terre de l'ordre de 40 250 km. (*La science au péril de sa vie*, page 90 Ed. Vuibert 2004)

[23] Al Khawarizmi fut nommé membre de la maison de la sagesse de Bagdad par le calife Al Mamoun

[24] Auparavant, les arabes utilisaient un système de numération alphabétique analogue à celui des grecs (Djebbar page 219)

signe

> ‘’ l’acte de naissance officiel de l’algèbre en tant que discipline (avec un nom, des objets des outils, des preuves et des domaines d’applications)’’ [25]



Dans A. Djebbar : *Al Khwarismi* Ed du Kangourou, Paris 2013

Chiffres arabes d’occident :

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Chiffres arabes d’orient :

٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١ .

Ecriture actuelle des chiffres arabes

Dans ce livre il définit les objets de l’algèbre : l'inconnue est « la chose » ou *shay* (*šay*), la racine carrée est le *jidhr*, la constante est le *adăd*. Puis il ramène les équations algébriques à six équations canoniques et donne un procédé de résolution pour chacune d’elles. Toutes les équations sont exprimées avec des mots. Le terme *al-jabr* fut repris par les Européens et devint plus tard le mot *algèbre.* D’autre part, le nom latinisé d’al Khwarizmi a donné le mot *algorithme*.

A la fin du IX$^{\text{ème}}$ siècle, Abu Kamil[26] (850/930), traite les équations du second degré avec des radicaux. Son œuvre a influencé Fibonacci. Deux siècles plus tard, Omar Al Khayyam, (1048/1131) poète et mathématicien perse, résout des équations cubiques[27] à partir de l’intersection de deux coniques.

Thabit Ibn Qurra[28] (826/901) est célèbre pour avoir introduit les ‘’nombres amiables’’ ou amicaux et mis au point une méthode pour les obtenir[29]:

> *Deux nombres sont amicaux si la somme des diviseurs de l’un est égale à l’autre.*

Exemple 220 et 284 sont amicaux, car la somme des diviseurs du premier :

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

et celle du second

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

Ce sont les deux premiers nombres amicaux. Puis on trouve la paire : 1184 & 1210, etc.

---

[25] Djebbar *’Une histoire de la science arabe’’* page 223

[26] Abul Kamil mathématicien arabe, d’origine égyptienne.

[27] L’équation du 3$^{\text{ème}}$ degré sera définitivement résolue par les mathématiciens italiens Tartaglia et Cardan au XVIe siècle.

[28] Thabit Ibn Al Qurra est issu de la communauté judéo chrétienne des sabéens.

[29] Critère d’ Ibn Qurra : Si $n > 2$ et si a , b , c sont des *nombres premiers* tels que : $a = 3 \times 2^n - 1$, $b = 3 \times 2^{n-1} - 1$ et $c = 9 \times 2^{2n-1} - 1$, alors les nombres $2^n ab$ et $2^n c$ sont amicaux.
Avec $n = 2$, on obtient 284 et 220. Le critère n’est pas valable pour n = 3 (c = 287 n’est pas premier).
Avec $n = 4$, on obtient 17 296 et 18 416. Cette paire a été retrouvée par Fermat au XVII$^{\text{ème}}$ siècle. (E. Sartori *Les grands scientifiques français* , page 173. Ed. Tempus 2012)

Au XIe siècle, al Karaji[30], (953/1029), ouvre un nouveau chapitre de l'algèbre : *L'algèbre des polynômes*. Ses travaux seront développés par son disciple as Samaw'al[31], qui aboutit à *''l'arithmétisation de l'algèbre''*[32]. A dix neuf ans, ce dernier écrit un ouvrage ''*Al Bahir fi Al Jabr* ''qui comporte quatre parties.

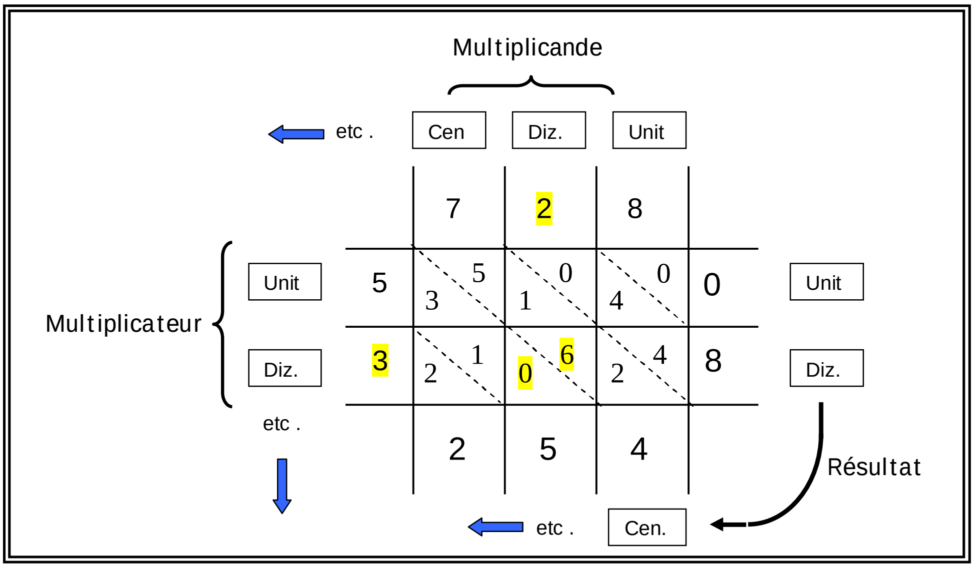


Figure III. 5 : Procédure pour effectuer une multiplication en Pays d'Islam.

Cette procédure est appelée ''*multiplication par jalousies*'', on procède de la façon suivante :
On doit effectuer, par exemple, la multiplication 728 x 35 = 25 480. On dispose les chiffres du multiplicateur sur la colonne de gauche, comme l'indique la figure, et ceux du multiplicande sur la ligne du haut. Puis on multiplie le nombre d'une case de la colonne par celui qui est porté sur une case de la ligne. Le résultat est un nombre de deux chiffres, il est porté sur la case correspondante, le chiffre des dizaines à gauche de la diagonale et celui des unités à droite : Exemple 3 x 2 = 06 (chiffres surlignés). Chaque chiffre du résultat est obtenu en faisant la somme des chiffres d'une même diagonale : Unités 0, dizaines 0+4+4 = 8, centaines 5+1+6+2 =14: on écrit 4 et on tient compte de la retenue dans le calcul de la diagonale suivante (1) + 3 + 1 + 0 = 5 etc . Le résultat est 25 480.

Dans la première partie il étend aux polynômes les règles de l'addition, de la multiplication et de la division.
A cet effet, il introduit les nombres négatifs. Ces nombres étaient connus des anciens, les indiens par exemple, mais ils étaient liés à la notion de ''richesse'' et de ''dette''[33]. As Samaw'al les considère comme des nombres sur lesquels on peut effectuer des opérations telles que l'addition, la soustraction et la multiplication. *Lorsqu'on soustrait de zéro un nombre*

---

[30] Abu Bakr Al Karaji, mathématicien d'origine perse né à Karaj. Al Karaji, a calculé π avec 16 décimales (π = 3, 141 592 653 589 793 2).
[31] Ibn Yahya al Maghribi as Samaw'al, né a Bagdad en 1130, mort à Maragha en Iran en1180, est un mathématicien d'origine maghrébine, ses parents sont originaires de Fez.
[32] R. Rashed XIII^e Congrès International d'Histoire des Sciences (Moscou 1971).
[33] Ainsi Bramagupta (Voir §.3) écrit au VIIème siècle :''*Une dette retranchée du néant devient un bien, un bien retranché du néant devient une dette.*''

positif, on obtient un nombre négatif et lorsqu'on fait la même opération avec un nombre négatif on obtient un nombre positif.
En Europe, les nombres négatifs étaient qualifiés ''*d'absurdes*'' ou ''*fictifs*'' jusqu'à ce que ce concept soit repris par Fibonacci (1170 - 1240) au douzième siècle. Il est définitivement admis après sa diffusion par Simon Stevin au seizième.
As Samaw'al introduit, probablement pour la première fois, des exposants nuls et négatifs[34] et les utilise dans la multiplication des puissances grâce à un algorithme qu'il a mis au point.
Il adopte, dans le livre II d'*Al Bahir*, une forme de raisonnement par induction, lorsqu'il calcule la série que nous écrivons actuellement:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Il vérifie ce résultat en donnant à n des valeurs allant de 1 à 5 et écrit que l'on peut continuer ainsi indéfiniment. Le raisonnement par induction tel qu'il est utilisé ici, ne prouve pas[35] que l'expression ci-dessus est valable quelque soit n.
Selon Rashed et Djebbar, Ibn Al Haytham avait, déjà au début du X$^{\text{ème}}$ siècle, utilisé un tel raisonnement, l'induction, pour aboutir à un théorème appelé aujourd'hui ''théorème des restes de Wilson''[36].
Si n est un nombre premier, le nombre

$$1 . 2 . 3 . ...(n-1) + 1 \quad \text{soit} \quad (n-1)! + 1$$

est divisible par n.

Il est vérifié pour : $n = 3 \rightarrow 2 + 1 = 3$ divisible par 3
$n = 5 \rightarrow 24 + 1 = 25$ divisible par 5
$n = 7 \rightarrow 720 + 1 = 721$ divisible par 7

La trigonométrie.

La trigonométrie était initialement liée à l'astronomie ; l'astronome et mathématicien perse Nasr eddine Tusi (1201/1274) est probablement le premier à traiter la trigonométrie comme une branche des mathématiques.
Les arabes ont emprunté aux indiens le sinus plus pratique que la mesure des cordes utilisées par les grecs.
Le mathématicien et astronome, d'origine iranienne, Abu'l Wafa (940/997) introduit pour la première fois le cercle trigonométrique, cercle de rayon $R = 1$, que nous utilisons actuellement. Abu'l Wafa est à l'origine de nouvelles fonctions trigonométriques, comme la tangente et la sécante[37], et de la formule :

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

---

[34] On pensait que ces exposants avaient été introduits, plus tard au XVe siècle, par Nicolas Chuquet. K. Jaouiche Revue d'histoire des sciences, Vol. 29, N° 29-2 pages 184-186 (1976).
[35] Le raisonnement par récurrence, qui est un raisonnement par induction valable quelque soit n , a été introduit, à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, par le mathématicien français Henri Poincaré (Voir Bendaoud Ch. III, § 2.).
[36] La formulation actuelle de ce théorème est:
'' Si n est un nombre premier, alors ($n - 1$) ! est congru à – 1 modulo n''
[37] La sécante est l'inverse du cosinus.

La célèbre formule :

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

avait été introduite par les indiens dès le sixième siècle.

Les arabes ont confectionné des tables qui donnent les fonctions trigonométriques avec huit décimales pour des angles qui varient à intervalles de 0.25°.

L'Analyse combinatoire.

Au début, il s'agissait de déterminer le nombre de mots que l'on peut composer avec l'alphabet arabe[38]. Puis ces travaux se sont orientés vers une étude théorique. Ainsi au treizième siècle, le mathématicien maghrébin Ibn al Banna[39] a proposé une méthode pour calculer le nombre de combinaisons de n objets p à p, sans passer par le triangle[40] de ''Pascal''. Il a trouvé la formule que l'on peut écrire avec nos notations actuelles :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

La Géométrie.

La géométrie était utile pour le calcul des surfaces et des volumes[41]. Les mathématiciens arabes, parmi lesquels Ibn al Qurra, Omar al Khayyam, ont entamé une réflexion sur le célèbre postulat d'Euclide ou axiome des parallèles. Cette réflexion fut reprise, au XIXe siècle, par Lobachevski, Bolay et Riemann qui ont réussi à élaboré des géométries non euclidiennes[42].

I. 5. La chimie.

Là encore, après une période d'apprentissage à partir de l'héritage égyptien, mésopotamien et grec, les savants arabes ont apporté une contribution non négligeable au développement de cette discipline.

Les arabes ont abordé l'étude de la chimie ou plutôt de l'alchimie sous deux aspects : un aspect ésotérique[43] et un aspect scientifique.

- L'aspect ésotérique : l'alchimie est une science occulte réservée à quelques initiés qui reçoivent, du maître, des secrets qu'ils transmettront, par la suite, à d'autres membres de la confrérie.

---

[38] Djebbar *' L'age d'or des sciences arabes''*page 54.

[39] Ibn Al Banna (1256/1321) né et mort à Marrakech, il fit ses études à l'Université de Fez (Al Quaraouiyine)

[40] Le triangle arithmétique dit de Pascal était connu, des chinois par exemple, mais il a été introduit par Ibn Mun'im''*selon une démarche strictement combinatoire''* (Djebbar page 232).
Ibn Mun'im (mort en 1228) est mathématicien andalou, il vécut à Marrakech.

[41] Outre l'utilisation pratique de la géométrie pour le mesure des surfaces et des volumes, les savants arabes ont procédé à des calculs théoriques. Ainsi Ibn Haytham (Djebbar page 216) utilisa, pour le calcul des surfaces et des volumes, la méthode d'exhaustion introduite par Eudoxe de Cnide et utilisée par Archimède (Voir Ch. II).

[42] Voir Ch. I. § 3.1

[43] Hermétique aux non initiés.

Le but essentiel de l'alchimie est la transmutation des métaux. On connaissait à l'époque sept métaux :

Le fer, le cuivre, le plomb, l'étain, le mercure, l'argent et l'or.

Ils sont classés en fonction de leur degré de perfection. Tous les alchimistes ont essayé de trouver le secret pour transformer un métal courant, le plomb par exemple, en un métal précieux, l'argent ou l'or. Ibn Sina reconnait l'impossibilité de transmuter les métaux, car chaque métal a ses propres caractéristiques. C'est à l'intérieur de la Terre que le métal se forme et se transforme au cours du temps.

- L'aspect scientifique concerne les procédés de distillation, de calcination, de cristallisation, de sublimation, de purification etc., procédés fondamentaux sur lesquels est basée la chimie telle que nous la concevons aujourd'hui.

Figure III . 6.

A cet effet, les chimistes arabes ont construit des instruments et appareillages : balances, alambics, cornue et le bain de refroidissement, appelé ''tête de maure''[44] etc.
Les ouvrages, écrits à cette époque, montrent, comme le soulignent Bernadette Bensaude-Vincent et Isabelle Stengers, l'importance accordée par les chimistes arabes à l'expérimentation :

> Les opérations sont décrites avec soin et précision, les quantités de réactif et leur degré de pureté sont déterminés, les indices précisant le moment adéquat pour les différentes étapes sont indiquées. Bref qu'il s'agisse de chimie laïque ou d'alchimie, les savants arabes se consacrent à la production et à la transmission d'un savoir pratique et reproductible.[45]

Parmi les chimistes les plus célèbres, on peut citer :

Jabir Ibn Hayyan, connu en Europe sous le nom de Gaber. C'est un savant, d'origine persane, qui a vécu au huitième siècle.

[44] Djebbar *''L'âge d'or des sciences arabes''* page 138
[45] Bernadette Bensaude- Vincent et Isabelle Stengers : *Histoire de la chimie* page 25

Bien qu'il fut un adepte de l'alchimie, il recommandait à ses disciples de recourir à l'expérimentation.
Comme tous les savants du moyen âge, il se réfère à la théorie d'Aristote basée sur les quatre éléments d'Empédocle[46]. Tous les matériaux connus peuvent être obtenus à partir de ces quatre éléments de base en tenant compte de leurs quatre qualités[47] auxquelles il ajoute deux principes[48] de base :

le soufre et le mercure.

De l'union de ces deux principes[49] naissent tous les métaux. Ainsi lorsque la quantité du principe soufre diminue et celle du principe mercure augmente, le métal se transforme et progresse dans l'échelle de la perfection des sept métaux connus. On peut alors transmuter du plomb par exemple en or.

Il découvre, avec ses élèves[50], la soude caustique, l'acide nitrique, à partir du salpêtre et l'acide chlorhydrique, à partir du chlorure de sodium. Puis il invente l'eau régale[51] qui permet de dissoudre l'or.

Al Razi[52], (953/1029), dont le nom latinisé est Rhazès, est un chimiste et médecin persan.

> Rationaliste, il rejeta une grande partie du mysticisme de l'alchimie et se concentra particulièrement sur les résultats expérimentaux[53].

Il classe les substances en espèces animales, végétales et minérales. Il découvre l'éthanol puis il l'aurait utilisé en médecine.

La chimie était également pratiquée en vue de ses applications. Au moyen âge, les arabes fabriquaient des alcools, des solvants, des peintures, des teintures, des cosmétiques, du savon, des explosifs, des produits pharmaceutiques etc. La construction de fabriques de papier et d'encres colorées a permis de mettre à la disposition des savants des outils pour l'écriture beaucoup moins chers que le papyrus ou le parchemin, ce qui a facilité la diffusion du savoir. En outre, ils ont perfectionné le travail du verre et la métallurgie. Selon Djebbar[54] , les historiens ont

> recensé un grand nombre d'unités de production disséminées à travers tout le territoire de l'Empire. Il nous est d'ailleurs parvenu des miniatures montrant des systèmes d'alambics montés en série et illustrant ce stade « industriel » de la production.

---

[46] Voir Ch II, § 3.1.
[47] Le chaud, le froid, le sec et l'humide (Voir Ch II § 3.1).
[48] Au moyen âge, le principe mercure représente le féminin et le principe soufre le masculin. On peut noter l'analogie avec le yin et le yang des chinois. Nous reviendrons au paragraphe II.4 sur le concept de principe en alchimie.
[49] Il ne faut pas confondre le mercure (principe) et le mercure (métal).Il en est de même du soufre (principe) et du soufre (élément chimique).
[50] De nombreux ouvrages ont été écrits, sous le nom de Jabir, par ses élèves.
[51] L'eau régale (eau royale) : mélange d'acide chlorhydrique et d'acide nitrique.
[52] Abu Bakr Mohammad Ibn Zakariya al-Razi,
[53] Ronan page 335.
[54] Djebbar A. *L'âge d'or des sciences arabes* page 134.

2. L'EUROPE.

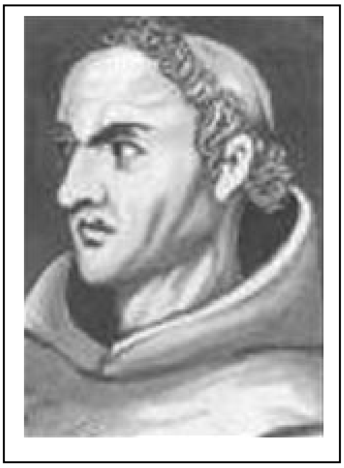
Les ouvrages scientifiques arabes furent traduits, en latin[55], par des européens dont Gérard de Crémone et Robert de Chester, ce qui a permis le démarrage de la science en Europe à partir du douzième siècle. Plus d'une centaines d'ouvrages furent traduits [56] entre 1116 et 1187.

2. 1. La mécanique.

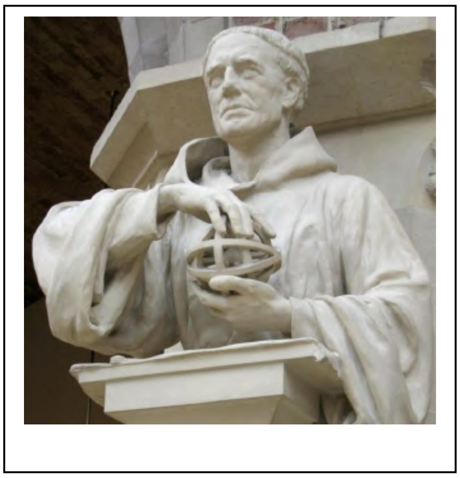
Jean Buridan (1292-1363), recteur de l'université de Paris, conserve la séparation de notre univers en monde sub lunaire et supra lunaire mais il rejette, dans le premier cas, le rôle moteur dû au milieu. Le moteur est dans le mobile, c'est l'impétus. On retrouve le concept d'élan introduit par Philipon d'Alexandrie.

> Tandis que le moteur meut le mobile, il lui imprime un certain impetus, une certaine puissance capable de mouvoir le mobile dans la direction même où le moteur meut le mobile...
> Plus grande est la vitesse avec laquelle le moteur meut le mobile, plus puissant est l'*impetus* qu'il imprime en lui...
> Plus un corps contient de matière, plus il peut recevoir de cet impetus.[57]

On voit naître le concept d'impulsion ou quantité de mouvement[58] qui est une grandeur proportionnelle à la ''masse'' et à la vitesse



Jean BURIDAN (1292-1363)



Roger BACON (1214-1294)

Dans le monde supra lunaire, l'impetus, imprimé par Dieu, se conserve indéfiniment.

> Dieu, lorsqu'il a créé le Monde, a mu comme il lui a plu chacun des orbes célestes, il a imprimé à chacun d'eux un impetus qui le meut depuis lors [52].

[55] En Europe, le latin était la langue de la religion et de la science.
[56] Djebbar *'Une histoire de la science arabe''* page 147
[57] Cité par Rosmorduc *''Histoire de la Physique''* page 35.
[58] Le concept de *''quantité de mouvement''* sera introduit par Descartes au XVII[ème] siècle.

2. 2. L'optique :

En Europe, au X^e siècle, les artisans verriers italiens découvrent ''les lentilles'' appelées ainsi en raison de leur forme semblable au légume. Robert Grossetête (1168, 1253) après avoir étudié les traités d'Ibn Al Haytem, s'intéresse à l'optique. Il découvre que les lentilles, utilisées jusqu'à cette époque pour mettre le feu, peuvent servir de loupe. Il écrit :

> '' si nous comprenons bien cette partie de l'optique, nous pourrons faire apparaître comme toutes proches les choses''[59]

C'est ainsi que les lentilles convexes ont pu servir à corriger la presbytie, puis on découvrit que les lentilles concaves corrigent la myopie.
Roger Bacon (1214,1294) reprend l'étude de la réfraction et donne les conditions d'observation d'un arc en ciel.

2. 3. Les mathématiques.

L'un des plus grands mathématiciens européens du moyen âge fut incontestablement l'italien Léonardo Pisano dit Fibonacci (1175/1250). Il étudia, lorsqu'il était enfant, les mathématiques arabes à Béjaïa au Maghreb où son père était diplomate.

Il retourne, à la fin du douzième siècle en Italie où il introduit la numération décimale avec le zéro. Jusqu'à cette époque, seuls les chiffres romains étaient utilisés en Europe. Des opérations comme la multiplication et la division étaient impossibles à réaliser, on avait alors recours à des abaques.
En 1202, il publie un ouvrage qui eut beaucoup de succès et qu'il intitula ''*Liber abaci*''. Il expose le système de numération indo-arabe avec les différentes opérations comme la multiplication par jalousies, que nous avons étudiée au § I.4, des méthodes de conversion, le calcul des intérêts etc. Il aborde également la théorie des nombres et les équations algébriques.

Fibonacci 1175 - 1250

Dans ce livre, il expose le problème de la croissance d'une population de lapins. Ce problème fait apparaître une suite, appelée '' suite de Fibonacci'' :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610...

où chaque terme est égal à la somme des deux termes précédents. Le rapport de deux termes consécutifs

$\frac{u_n}{u_{n-1}}$ tend vers le nombre $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$ appelé nombre d'or.

[59] Dans Maitte ''*La lumière*'' p 31

On peut écrire : $u_{n-1} = \varphi . u_{n-2}$ (1) d'où $u_n = \varphi . u_{n-1} = \varphi^2 . u_{n-2}$ (2)
Avec (1) et (2) et la condition de la suite de Fibonacci $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ on obtient l'équation du second degré

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

dont la racine positive[60] est : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Si on calcule le rapport du 15ème terme sur le 14ème on a : 610/377 = 1, 618.
Le nombre d'or, qui apparaît à plusieurs reprises en mathématiques (Voir Annexe IV), a fasciné les mathématiciens à un point tel qu'ils l'ont désigné par une lettre grecque (φ) au même titre que le célèbre nombre π.

Au quatorzième siècle, le savant français Nicole Oresme (1320/1382) représente graphiquement la variation d'une ''fonction''[61], et annonce ainsi la géométrie analytique qui sera introduite, trois siècles plus tard par Descartes et Fermat. D'autre part, il démontre que la série harmonique diverge :

$$\underbrace{1}\ + \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\ + \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}\ + \underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}}\ \ldots + \frac{1}{n}$$

Oresme regroupe les termes, le $p$ème groupe comporte 2^{p-1} termes. La somme des termes de chaque groupe est supérieure à 1/2 , la somme de tous les termes est donc infinie.

2. 4. La chimie.

A partir du douzième siècle les européens prennent connaissance des travaux des alchimistes arabes, à travers des ouvrages traduits en latin. Ils poursuivent ces travaux en accentuant le caractère ésotérique de l'alchimie. Ils associent à l'aspect scientifique de cette discipline, une composante mystique[62]. Ainsi l'oratoire[63] de l'alchimiste devait-il se trouver près du laboratoire pour lui permettre de prier avant de travailler[64].

Les alchimistes européens reprennent la théorie d'Aristote et la doctrine alchimiste des arabes basée sur les deux principes actifs de la matière : Le soufre et le mercure, auxquels Paracelse ajoutera[65], par la suite, un troisième principe le sel. A partir de ces principes, les alchimistes pensaient, en ajustant les dosages, parvenir à transmuter des métaux imparfaits en métaux nobles : l'or et l'argent. Leur but était de trouver la pierre philosophale capable de transformer du plomb par exemple en or et de

[60] La racine négative est à rejeter.
[61] Dans la chute libre d'un corps la vitesse est proportionnelle au temps. Oresme représente graphiquement la vitesse en fonction du temps par une droite.
[62] Mystique : relatif aux choses secrètes, au mystère religieux.
[63] Lieu réservé à la prière.
[64] De La Cotardière page 307
[65] Ch IV § 5.

réaliser le grand rêve ou grand magistère. Le petit rêve ou petit magistère consiste à obtenir de l'argent.

N.B. Les alchimistes utilisaient une terminologie spécifique : principe (soufre, mercure), esprit etc. Ainsi, au XVIIème siècle, René Descartes (1596-1650), écrit, dans une lettre envoyée, le 23 novembre 1646, au marquis de Newcastle : '' *Je souscris en tout point au jugement que Votre Excellence fait des chimistes et crois qu'ils ne font que dire des mots hors de l'usage commun pour faire semblant de savoir ce qu'ils ignorent......Enfin selon mon opinion, leur sel, leur soufre et leur mercure ne diffèrent pas plus entre eux que les quatre éléments des philosophes''*

En plus de la propriété de transformer un métal vil en or, la pierre philosophale avait deux autres vertus : guérir toute les maladies et prolonger la vie jusqu'à atteindre l'immortalité.
Les alchimistes occidentaux ont poursuivi les travaux scientifiques des arabes. Ils ont pu obtenir des acides plus forts : l'acide nitrique (esprit de nitre), l'acide chlorhydrique (esprit de sel) et l'acide sulfurique (vitriol).
Au treizième siècle Roger Bacon remarque, à partir d'observations, que *l'air est l'aliment du feu*. Il redécouvre la poudre à canon, inventée au septième siècle par les chinois.

3. L'INDE.

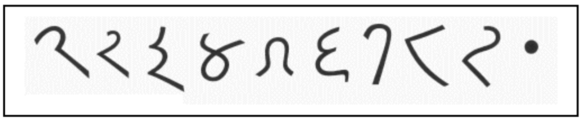
La civilisation indienne est aussi ancienne que celle des chinois, mais elle est beaucoup moins connue. Les travaux des savants indiens du moyen âge sont mieux connus grâce aux arabo-musulmans.

En Physique, leur conception de la matière résulte d'un mélange entre la théorie atomique et celle d'Empédocle. Ils connaissaient le principe de l'inertie et avaient introduit le concept de ''*véga*'' analogue à l'impétus : *Lorsqu'un corps reçoit une ''impulsion'' (véga) qui le met en mouvement, il conserve ce mouvement jusqu'à ce qu'un obstacle l'arrête*[66].

En Chimie, comme tous les autres peuples de l'époque, ils travaillaient les métaux, le verre, fabriquaient des teintures, mais ne donnaient aucune explication scientifique.

En astronomie, le savant Âryabhata (476/550) entreprend au sixième siècle l'étude des astres en se basant sur les travaux des grecs, notamment ceux de Ptolémée. Les indiens se sont intéressés à l'astronomie pour dresser des calendriers et des cycles en relation avec leurs croyances. Ils utilisèrent des instruments connus depuis l'antiquité.

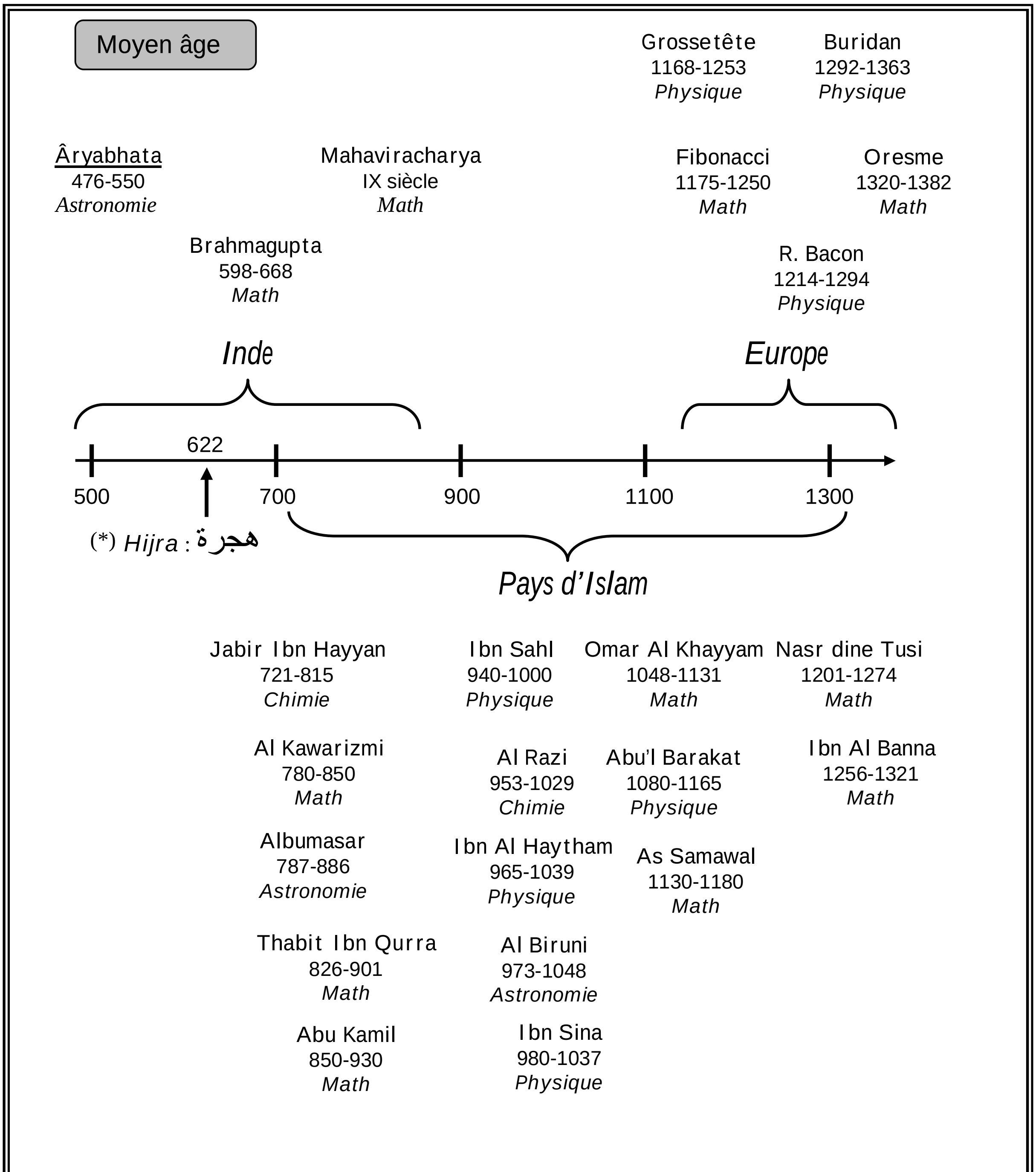
En mathématiques, ils s'intéressèrent à l'arithmétique, à l'algèbre, à la trigonométrie, mais très peu à la géométrie. Ils adoptèrent un système de numération décimale avec dix chiffres dont le zéro. L'écriture des chiffres a varié au cours du temps et n'était pas la même d'une région à l'autre.



Chiffres nagari

A partir du sixième siècle Âryabhata sait extraire une racine carrée et une racine cubique. Il calcule π avec 4 décimales (π = 3.1416). En trigonométrie, il introduit le sinus et le cosinus.

[66] Ronan page 280.



(*) Al Hijra (l'hégire) marque le début de l'ère musulmane.

Figure III. 8. *Les savants du moyen âge cités dans ce chapitre*

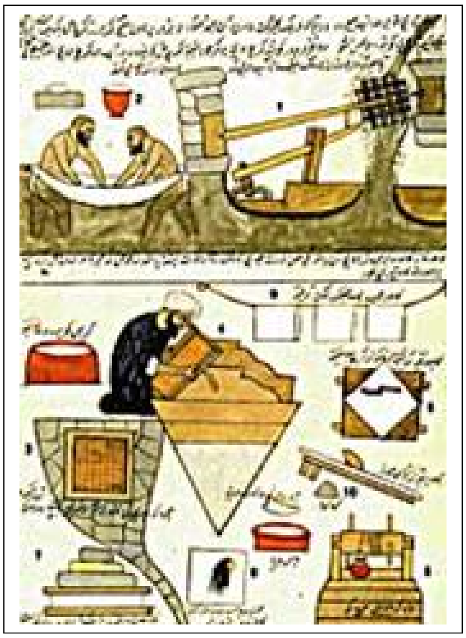
Brahmagupta (598/668) s'intéresse aux séries de nombres et donne une définition du zéro. Il trouve une solution générale de l'équation du second degré.

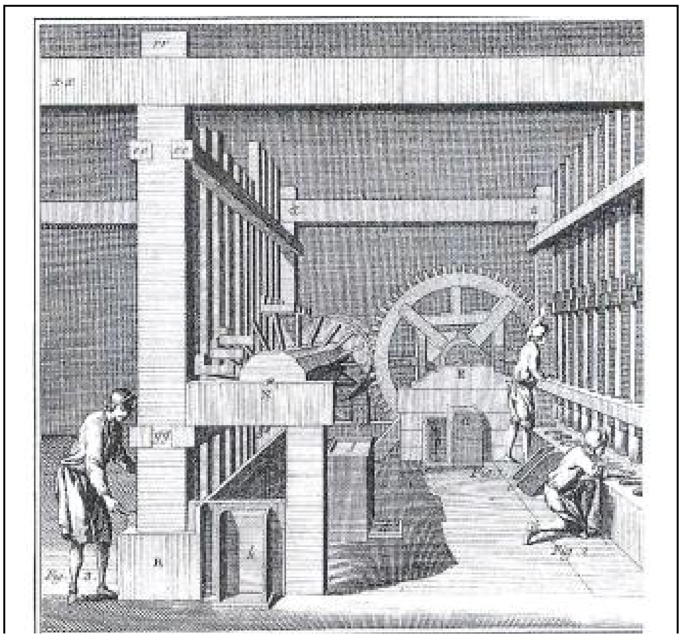
Au début du neuvième siècle, le mathématicien Mahaviracharya affirme que zéro est un nombre[67] comme tous les autres en expliquant que ''multiplier un nombre par zéro donne zéro et retrancher zéro d'un nombre donne le même nombre[68]''

4. LES TECHNIQUES.

Dans l'antiquité l'énergie était essentiellement d'origine musculaire (animaux et esclaves)[69]. Au moyen âge, on utilisa, en plus, les énergies éolienne et hydraulique.

Les premiers moulins à vent ont été construits en Perse. Ils ont été introduits, par les arabo musulmans, en Espagne, puis leur emploi s'est étendu à toute l'Europe.





Figures III . 7 à gauche : Fabrication artisanale du papier au début du moyen âge.

à droite : Fabrique de poudre.

L'énergie, d'origine hydraulique est fournie par une roue à aubes. Un système mécanique, constitué de roues dentées et d'un arbre à cames, actionne les pilons. Ces derniers viennent écraser le mélange, soufre- salpêtre- charbon, placé dans des mortiers.

Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers.

Histoire naturelle. Minéralogie Publiée de 1751 à 1772 sous la direction de Diderot et d'Alembert.

[67] En 1889, le mathématicien italien Giuseppe Peano, fondateur avec Hilbert de l'axiomatique, propose une série d'axiomes qui caractérisent rigoureusement l'ensemble N des nombres entiers naturels et dont le premier est :'' *L'élément zéro, noté* 0*, est un nombre entier naturel''.*

[68] John Gribbin '' *Une brève histoire des sciences''* page 23 Ed. Larousse 1999

[69] Dans l'antiquité l'énergie éolienne était utilisée dans la navigation à voiles.

L'énergie hydraulique a été utilisée à grande échelle à partir du onzième siècle[70]. Le moulin à eau, muni d'un mécanisme en bois, servait à moudre le blé, à tanner le cuir, à fabriquer de la poudre et de la pâte à papier.
Cette étape marque le début du machinisme. Les figures III.7 illustrent parfaitement le passage d'une fabrication artisanale, où le travail est fait à la main, à une fabrication ''industrielle'' où des machines sont utilisées.
Le machinisme n'a été possible que grâce à l'invention de mécanismes transformant un mouvement de rotation en un mouvement de translation alternatif et vice et versa.
L'arbre à cames est le premier dispositif découvert. Au XIIème siècle Al Jazari (1136-1206) décrit un arbre à cames qui était utilisé, pour le tannage du cuir, dans des moulins à eau.
Puis vers la fin du XIVème siècle, apparaît le système ''bielle-manivelle''. Cependant ce mécanisme était, depuis longtemps, utilisé par les chinois pour actionner des souffleries à partir de roues à aubes[71].

La figure de droite III.7 montre que toutes les pièces des machines sont en bois. Le bois est facile à travailler et les techniques disponibles à l'époque ne permettaient pas d'utiliser des pièces métalliques.

Il y eu d'autres inventions, durant cette périodes. Au IXème siècle les frères Banu Moussa mettent au point un mécanisme de régulation du débit d'eau.
A la fin du moyen âge le mathématicien Cardan invente un dispositif de suspension articulé qui porte son nom : le cardan.

5. LES UNIVERSITES MEDIEVALES.

En Europe l'instruction primaire était dispensée aux enfants dans des écoles rattachées aux églises. Il en était de même en pays d'Islam où cet enseignement se faisait dans des locaux qui dépendaient des mosquées [72].
C'est au moyen âge que furent fondées, dans les pays arabo musulmans, les premières universités: Al-Qarawyin à Fez en 859, l'Université de Cordoue[73] au début du dixième siècle, et Al-Azhar au Caire en 972.
En Europe, les universités apparurent un siècle plus tard avec Bologne en1088, qui fut la première et, à la même époque, celle de Paris. Ensuite ont été créées, aux XIIème et XIIIème siècles, les universités d'Oxford, Salamanque, Cambridge, Padoue...Au XIVème siècle, il y eut, entre autres, Prague, Cracovie, Heidelberg, Vienne etc.
Selon R.-Y. Ebied et M.-J.-L. Young [74], les universités chrétiennes et arabo musulmanes possédaient de nombreux traits communs :

> Les étudiants '' étaient groupés pour leurs logement selon leur lieux d'origine. A l'université d'Al-Azhar au Caire, il existait des logements distincts pour les étudiants du Maroc, de Haute Egypte, d'Irak... A l'université de Paris, les corps d'étudiants comprenaient la nation anglaise, la nation flamande, et bien d'autres….. Un autre trait de ressemblance se trouvait dans le fait que les professeurs universitaires se mettaient en tenue particulière, la toge, pour les cours et les cérémonies officielles.''

---

[70] Selon Daumas page 54 :'' Le cadastre, dressé en 1084, relève 5684 moulins à eau existant à cette date en Angleterre''.
[71] Soutif page 161.
[72] Djebbar *'Une histoire de la science arabe''* page 84.
[73] Au Xème siècle l'Université de Cordoue renfermait 400 000 livres (MALET & ISAAC : tome 1 ; page 118)
[74] R.-Y. EBIED et M.-J.-L. YOUNG: *les Arabes ont-ils inventé l'université* ? (Le Monde de l'Education 1976)

Annexe IV

Les anciens mathématiciens et physiciens utilisaient des méthodes de résolution qu'ils élaboraient en fonction de l'état d'avancement des connaissances de leur époque. Avant l'invention de l'algèbre, par exemple, les mathématiciens avaient mis au point, dès l'antiquité, des algorithmes arithmétiques dont la méthode de la ''fausse position''. Les mathématiciens arabes l'ont largement utilisée et l'appelaient ''*el khataïn*'', il en est de même des italiens comme Fibonacci, Luca Pacioli etc..

La Méthode de fausse position.

Cette méthode permet de résoudre des problèmes à une inconnue (qui se ramènent à une équation de la forme : $ax = b$) sans utiliser le formalisme de l'algèbre. On attribue à l'inconnue une valeur arbitraire (fausse position), puis on effectue les calculs : on trouve un résultat qui diffère de la donnée du problème. On applique alors la règle de la proportionnalité pour obtenir la valeur exacte de l'inconnue.

***Exercice* III.1. :** Selon la légende, on aurait écrit sur la tombe du mathématicien grec Diophante[75], l'épitaphe suivante :

Passant sous cette tombe où repose Diophante,
Ces quelques vers, tracés par une main savante,
Vont te faire connaître à quel âge il est mort.
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula,
Puis s'étant marié, sa femme lui donna
Cinq ans après un fils, qui, du destin sévère,
Reçut de jours hélas! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.

Traduction de Emile Fourrey : *Récréations mathématiques* Ed. Vuibert

La Méthode de double fausse position.

Cette méthode était utilisée, avant l'invention de l'algèbre, lorsque le problème se ramène à une équation du premier degré de la forme:

$$a x + b = c$$

avec deux coefficients a et b à expliciter. On attribue à l'inconnue une première valeur et on effectue les calculs avec cette première position, on trouve un premier résultat qui présente une différence δ_1 soit par excès soit par défaut. Puis on effectue la même opération avec une deuxième position et on obtient une différence δ_2. A partir de δ_1 et δ_2 on trouve la valeur de l'inconnue.

***Exercice* III.2. :** Arnaud Gazagnes[76] propose comme exemple, le problème suivant, posé au XV^{ème} siècle par le mathématicien italien Lucas Pacioli [77]:

Partager 44 ducats entre 3 personnes de façon que la deuxième ait le double de la première plus 4 et la troisième autant que les deux autres réunis plus 6.

---

[75] Diophante d'Alexandrie : Mathématicien grec du III^{ème} siècle. Voir Ch I § 3.4.

[76] Arnaud GAZAGNES : *Autour des méthodes de fausse position.*
http://www.ac-nancy-metz.fr /enseign/maths/apmep/

[77] Luca Bartolomes **Pacioli** , dit *Luca di Borgo* (1445 - 1517), est un mathématicien italien

Pour avoir la valeur exacte de la part de la première personne, Pacioli propose :
'' *Il suffit de calculer le produit du premier excès par la seconde hypothèse diminué du produit du second excès par la première hypothèse, le tout divisé par la différence des excès*''.[78]
Résoudre ce problème et justifier, géométriquement, le résultat et la méthode de Pacioli en utilisant le théorème de Thalès.

La Méthode des fausses suppositions.

Dans l'enseignement, Les méthodes de résolution de problèmes enseignées, sont conçues en fonction du niveau des connaissances déjà acquises par l'apprenant. Avant l'introduction de l'algèbre au lycée, l'élève, à l'école primaire, ne peut utiliser que l'arithmétique. Voici la méthode des fausses suppositions qui était enseignée jusqu'à la fin des années soixante.

***Exercice* III.3. :** Une ménagère achète des pommes de terre à 30 dinars le Kg et des oignons à 15 dinars le Kg. L'ensemble (pommes de terre et oignons) fait 8 Kg et a coûté 195 DA
Combien de Kg d'oignons a-t-elle achetés ? Même question pour les pommes de terre.

***Exercice* III.4 :** La masse d'un bijou, mesurée à l'aide d'une balance de précision est m = 172, 2 gr et son volume V = 10 cm^3. Sachant qu'il est constitué d'un alliage d'or et de cuivre, calculer les pourcentages d'or et de cuivre utilisés. Les masses volumiques sont : 8,9 gr/ cm^3 pour le cuivre et 19,3 gr/cm^3 pour l'or.
Utiliser la méthode des fausses suppositions, puis donner la solution algébrique.

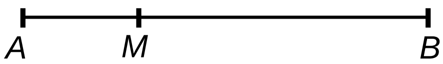
Le nombre d'or

Le nombre d'or

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\,,$$

qui apparaît lors de l'étude de la suite de Fibonacci, est connu depuis l'antiquité. On le retrouve également en géométrie, en algèbre, en botanique etc..En voici quelques exemples :

Dans ''la divine proportion''.



Lorsqu'on divise un segment de droite *AB* en deux parties inégales *AM* et *MB*, on dit que la proportion est divine[79], si le rapport entre la grande partie *MB* et la petite *AM* est le même que le rapport entre le tout *AB* est la grande partie *MB* :

$$\frac{MB}{AM} = \frac{AB}{MB}$$

[78] Les anciens mathématiciens justifiaient cette méthode par des considérations géométriques d'aires proportionnelles.
[79] Le terme ''divine proportion'' est dû au mathématicien italien Luca Pacioli que nous avons cité à la page précédente.

Si $AM = 1$ et $MB = x$ alors $AB = 1 + x$ et $\frac{x}{1} = \frac{1+x}{x}$

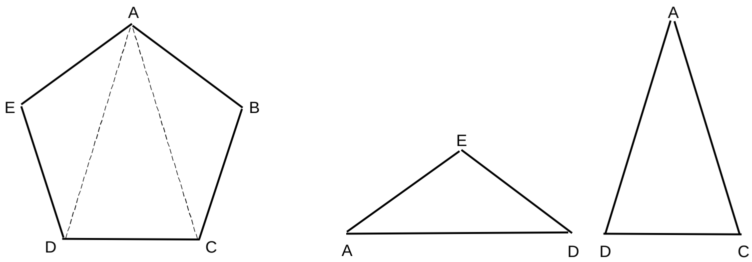
A partir de ce rapport, on obtient l'équation du second degré

$$x^2 - x - 1 = 0$$

dont la racine positive est φ.
La divine proportion est traitée par Euclide dans le livre VI des ''*Eléments*'' (partage d'un segment de droite en *extrême et moyenne raison*).

En algèbre, il constitue l'une des deux solutions de l'équation du second degré écrite plus haut.

En géométrie : Si on calcule, dans un pentagone régulier, le rapport d'une diagonale sur un coté, AD/AE par exemple, on trouve que ce rapport est égal à φ.



Les triangles isocèles EAD, BAC et ADC sont des *triangles d'or*. On appelle ainsi un triangle isocèle dont le rapport d'un côté sur la base (ADC), ou l'inverse (EAD) est égal à φ.

***Exercice* III.5 :** Montrer que, dans le pentagone régulier ABCDE, le rapport , AD/AE = φ, et dans les triangles d'or EAD et ADC, on a respectivement AD/AE = φ et AD/DC = φ .

Un *rectangle d'or* est un rectangle dont le rapport de la longueur sur la largeur est égal à φ.

En outre, le nombre d'or a des propriétés remarquables : Si on lui ajoute 1, on obtient son carré et on lui retranche 1, on trouve son inverse.

***Exercice* III.6 :** Montrer que : $\varphi + 1 = \varphi^2$ et $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.

Le nombre d'or a intrigué les botanistes et fasciné les architectes.
Le nombre de pétales de certaines fleurs est soit 3, 5, 8, ou 13 c'est-à-dire des nombres de la suite de Fibonacci qui est reliée au nombre d'or.
Dès l'antiquité, les architectes et les artistes se sont inspirés du nombre d'or pour réaliser leurs œuvres.