Chapitre 2 : Fonctions complexes

2.1 Définition :

Soit $D \subset \mathbb{C}$. Une fonction complexe $f : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ est une application associant pour chaque nombre complexe $z \in D$ un nombre complexe ω tel que $f(z) = \omega$.

S est l'ensemble de définition de f.

Si $\omega = u + iv$ est la valeur de f au point $z = x + iy$, alors on peut écrire :

$$\omega = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Si on note $z = re^{i\theta}$, alors on peut écrire :

$$\omega = f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

u *et* v sont respectivement la partie réelle et imaginaire de f.

Exemple : si $f(z) = z^2$, alors

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$$

Donc

$$u(x,y) = x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(f) \text{ et } v(x,y) = 2xy = \mathrm{Im}(f)$$

2.2 Limite et continuité :

2.2.1 Définition :

Soit D un domaine, et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction à variable complexe.

- On dit que f admet une limite à z_0 de D, que l'on note $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$, si et seulement si :

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

- On dit que f est continue au point z_0 de D, si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. On dira que f est continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Remarques :

1) La limite n'existe pas si on peut trouver deux chemins (directions) où $z \to z_0$ qui donnent deux valeurs différentes à la limite.

2) Lorsque $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, alors $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ si et seulement si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = l_1$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = l_2$.

3) f est continue en z_0 veut dire que f admet une limite en z_0 et qu'elle est définie en z_0.

4) si f et g sont deux fonctions continues en z_0, alors les fonctions :

a) $f+g$, b) fg, c) $f \circ g$, d) $\dfrac{f}{g}$ si $g(z_0) \neq 0$ sont continues en z_0.

5) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est continue en $z_0(x_0, y_0)$ si et seulement si les fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continues en (x_0, y_0).

Exemples :

Limites :

1) $f(z)=az+b$ *avec* $a,b\in\mathbb{C}$, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=az_0+b$, en effet :

$$|f(z)-az_0-b|=|a(z-z_0)|<\varepsilon \Rightarrow |(z-z_0)|<\frac{\varepsilon}{|a|}=\delta$$

2) Si

3) $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ *avec* $f(z)=\frac{\bar{z}}{z}$, alors $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ n'existe pas.

   Soit $z=x+iy$, lorsque $y=0$ *et* $x\to 0$, on a : $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{x+i0}{x-i0}=1.$

   Lorsque $x=0$ *et* $y\to 0$, on a : $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{0+iy}{0-iy}=-1.$

   Donc il existe deux directions de la limite de la fonction en z_0. Donc la fonction n'a pas de limite en z_0.

Continuité :

4) La fonction $f(z)=\bar{z}=x-iy$ est continue sur $\mathbb{C}$ car les fonctions $u(x,y)=x$ *et* $v(x,y)=-y$ sont continues en tout point $z_0(x_0,y_0)\in\mathbb{C}$.

5) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=\begin{cases} z^2\ si\ z\neq i \\ 0\ si\ z=i\end{cases}$. Cette fonction est discontinue car $\lim\limits_{z\to i} f(z)=-1\neq f(i)=0$

6) Les fonctions polynômiales sont continues sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

7) Les fonctions rationnelles sont continues sur leurs domaines de définition.

2.3. Fonctions uniformes et multiformes:

Une fonction uniforme est une fonction pour laquelle, pour chaque valeur de z, ne correspond qu'une seule valeur de ω.

Lorsque plusieurs valeurs de ω correspondent à une seule valeur de z, alors la fonction est multiforme. Ces fonctions multiformes peuvent être traitées comme un ensemble de fonctions uniforme, chaque élément de cet ensemble étant appelé une branche de la fonction multiforme. On choisit habituellement un élément comme branche principale, appelée ainsi détermination principale.

Exemples : La fonction $f(z)=z^2$ prend une seule valeur pour chaque z. C'est une fonction uniforme. Par ailleurs, la fonction $f(z)=z^{\frac{1}{2}}$, est une fonction multiforme puisque pour chaque valeur de z ($z\neq 0$) correspond deux valeurs de $f(z)$. On pourra choisir dans ce cas comme branche principale $\left|z^{\frac{1}{2}}\right|$.

2.4. Fonction inverse:

Pour toute fonction $\omega = f(z)$, on peut associer la fonction $z = g(\omega) = f^{-1}(\omega)$, appelée fonction inverse de f.

Exemple : La fonction $g(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est l'inverse de la fonction $f(z) = z^2$.

2.5 Fonctions usuelles :

2.5.1 Fonctions polynômiales :

Les fonctions polynômiales sont sous la forme :

$$f(z) = P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z^1 + a_0$$

Où $a_n \neq 0,\ a_0, a_1, a_n$ sont des constantes complexes et n un entier positif appelé degré du polynôme $P(z)$.

Ce type de fonctions polynômiales complexes possède n racines complexes (comptées avec leurs multiplicité), de plus :

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} ... (z - z_k)^{n_k}$$

Avec $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ et n_i est la multiplicité de la racine z_i .

Remarque : Les racines de $z^n = 1$ est un cas particulier de ce phénomène.

Exemple : Donner la factorisation complète de $P(z) = z^3 + (2-i)z^2 - 2iz$.

Puisque $z_1 = 0$ est une racine de *P*, la première factorisation est

$$P(z) = z(z^2 + (2-i)z - 2i)$$

Les racines du polynôme du deuxième degré sont :

$$z_{2,3} = \frac{-(2-i) \pm \sqrt{(2-i)^2 - 4(1)(-2i)}}{2} = -2, i$$

Donc

$$P(z) = z(z+2)(z-i)$$

2.5.2 Fonctions exponentielles :

L'exponentielle d'un nombre complexe $z = x + iy$ est une fonction définie par :

$$z \to f(z) = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Propriétés : 1. $\left|e^z\right| = e^x \ et \ \arg(z) = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

3. $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

4. $\forall z \in \mathbb{C},\ \frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

5. $\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall z \in \mathbb{C},\ e^{z+2k\pi i} = e^z$, la fonction exponentielle est périodique de période $2\pi i$.

6. $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

2.5.3 Fonctions trigonométriques et hyperboliques:

A partir de l'exponentielle complexe, les fonctions cosinus et sinus sont définit comme suit

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \; z \in \mathbb{C}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; z \in \mathbb{C}$$

Les fonctions hyperboliques sont définit par

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \; z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; z \in \mathbb{C}$$

Aussi on définit les fonctions suivantes

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}, \; z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}, \; z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \; z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2} \pi i, \; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}, \; z \in \mathbb{C} \setminus \pi i\mathbb{Z}$$

Remarques : 1. On a les relations suivantes

$$\cos(z) = \cosh(iz), \; \sin(z) = -i\sinh(iz), \; z \in \mathbb{C}$$

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), \; z \in \mathbb{C}$$

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \; \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

2. Les fonctions $\cos(z)\, et \sin(z)$ sont $2\pi - périodiques.$

3. Les fonctions $\cosh(z)\, et \sinh(z)$ sont $2\pi i - périodiques.$

2.5.4 Fonctions logarithmiques:

La fonction $f(z) = \log(z), z \neq 0$ est définie comme la fonction inverse de la fonction exponentielle

$$\omega = \log(z) \Leftrightarrow z = e^{\omega}$$

Posons $z = x + iy$ et $\omega = u + iv$, nous aurons :

$$x + iy = e^{u+iv} = e^{u}(\cos v + i\, sinv)$$

$$\Leftrightarrow \{|z| = e^{u} \quad et\ v = Arg(z) + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}\}$$

$Arg(z)$ étant l'argument principal de z.

D'où ω n'est pas unique puisque :

$$\omega = \log z = u + iv = \ln|z| + i(Arg(z) + 2k\pi)\,, \quad k \in \mathbb{Z}, -\pi < Arg\, z \leq \pi$$

Donc la fonction $\log z\,, z \neq 0$ est une fonction multiforme. On peut choisir comme branche principale la fonction :

$$\log z = \ln|z| + i(Arg(z)), \quad -\pi < Arg\, z \leq \pi$$

2.5.5 Fonctions puissance z^{α}:

La fonction z^{α}, $\alpha \in \mathbb{C}$, est définie par :

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$$

De même, si $f(z)\ et\ g(z)$ sont deux fonctions de z, on peut définir

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z) \log f(z)}$$

En général, de telles fonctions sont multiformes.

Exemple : $\boldsymbol{i^{2i} = e^{2i \log i} = e^{2i\left(i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)} = e^{-(4k+1)\pi}}$. Il s'agit d'une fonction multiforme, dont la branche principale peut être choisie comme $\boldsymbol{e^{-\pi}}$.

Remarque : On a $(z^{\alpha})^k = z^{\alpha k}, \alpha \in \mathbb{C}\ et\ k \in \mathbb{Z}$. Mais $(z^{\alpha})^{\beta} \neq z^{\alpha\beta}, \alpha \in \mathbb{C}\ et\ \beta \in \mathbb{C}$.

2.5.6 Fonctions trigonométriques inverses :

$Arcsin\, z = \frac{1}{i} \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$

$Arccos\, z = \frac{1}{i} \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

$Arctg\, z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$

$Arcotg\, z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$

2.5.7 Fonctions hyperboliques inverses :

$Argsh\, z = \log\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$

$Argch\, z = \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

$Argth\, z = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

$Argcoth\, z = \frac{1}{2} \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$