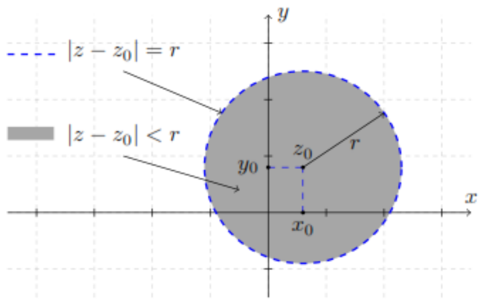
Chapitre 3 : Dérivation dans le domaine complexe

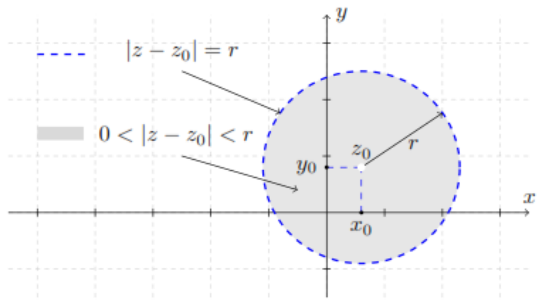
3.1 Domaine dans le plan complexe :

Dans le plan complexe, on appelle :

1. Disque ouvert de centre z_0 et de rayon r, le domaine $D_r(z_0)$ définie par
   $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \; tel \; que \; |z - z_0| < r, r > 0\}$
2. Disque ouvert pointé de z_0 et de rayon r, le domaine $\widetilde{D}_r(z_0)$ définie par
   $\widetilde{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \; tel \; que \; 0 < |z - z_0| < r, r > 0\}$
3. Disque fermé de centre z_0 et de rayon r, le domaine $\overline{D}_r(z_0)$ définie par
   $\overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \; tel \; que \; |z - z_0| \leq r, r > 0\}$



Disque ouvert de centre z_0



Disque ouvert pointé de z_0

Pratiquement, un disque ouvert ne contient pas les points appartenant au cercle entourant les points intérieurs du disque (frontière) contrairement au disque fermé. En plus, le disque ouvert pointé ne contient pas le point z_0 centre du disque.

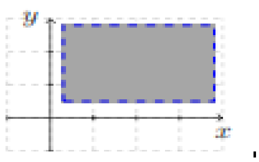
3.2 Ensemble ouvert :

Un Ensemble $E \in \mathbb{C}$ est dit **ouvert** si chaque point z de E peut être entouré par un disque ouvert centré en ce point et tous les points du disque sont contenu dans E.

Evidemment, tous les points qui appartiennent à la frontière ne satisfont pas à cette condition. C'est pour cette raison qu'un disque ouvert ne contient pas les points de la frontière.

Exemple :

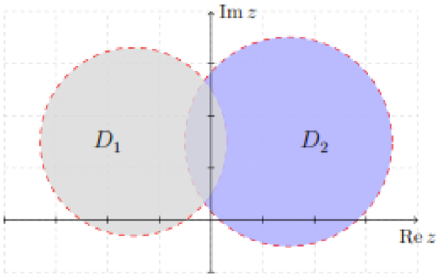
Un rectangle sans arrêtes est un ensemble ouvert.



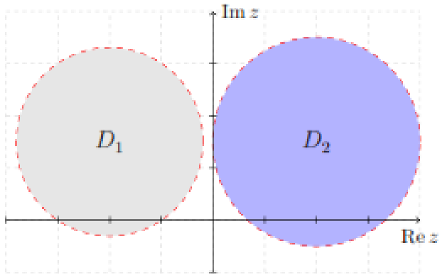
3.3 Ensemble ouvert connexe :

Un Ensemble ouvert S $\in \mathbb{C}$ est dit **connexe** si deux points quelconques de S peuvent être joint par un chemin formé de segments de droites et dont tous les points appartiennent à S.

Intuitivement, un ensemble est connexe s'il n'est pas le résultat de l'union d'ensembles disjoints d'ouverts.



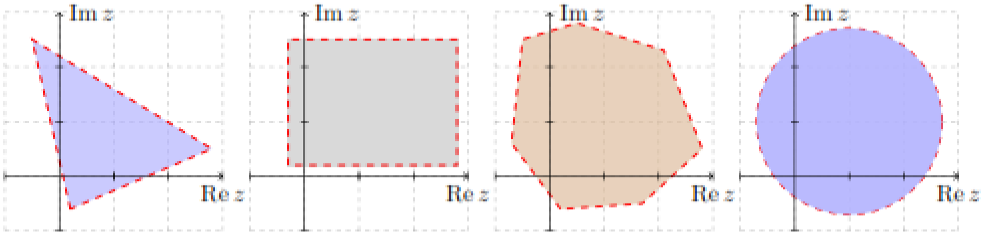
L'ensemble $E = D_1 \cup D_2$ est connexe



L'ensemble $E = D_1 \cup D_2$ n'est pas connexe

3.4 Domaine :

Un **domaine** dans le plan complexe est un ensemble connexe ouvert.
Par exemple, les triangles, les polygones et les disques ouverts sont des domaine.



3.5 Fonctions holomorphes :

3.5.1 Dérivée :

Par analogie avec les fonctions réelles, on définit la dérivée d'une fonction complexe.

Définition 1 :

Soit D un domaine dans le plan complexe. Soit f une fonction de D dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in D$. f est dite dérivable (au sens complexe) au point z_0 si et seulement si la limite suivante

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et est finie. On note souvent

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad h = z - z_0$$

Généralement, la dérivée en un point z s'écrira :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Exemples :

1. $f(z) = z^2$

Est dérivable dans $\mathbb{C}$. En effet :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - {z_0}^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0, \forall z_0 \in \mathbb{C}$$

2. $f(z) = \bar{z}$ n'est pas dérivable. En effet, posons $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x - iy)-(x_0 - iy_0)}{(x + iy)-(x_0 + iy_0)} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x - x_0)-i(y - y_0)}{(x + x_0) + i(y - y_0)}$$

Fixons $y = y_0$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)}{(x + x_0)} = 1$$

Fixons $x = x_0$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{-i(y - y_0)}{i(y + y_0)} = -1$$

Donc la limite n'existe pas et la fonction n'est pas dérivable.

3.5.2 Fonctions holomorphes :

Définition 2 :

f est dite **holomorphe** dans un domaine D si elle est dérivable en tout point de D.

Définition 3 :

Une fonction f est dite **entière** si elle est holomorphe sur le plan complexe tout entier.

Exemples :

1. La fonction $f(z) = z^2$ est dérivable dans $\mathbb{C}$, donc elle est **holomorphe** sur tout $\mathbb{C}$, elle est donc entière. En général, les fonctions polynômiales $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ sont entières.
2. La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est **holomorphe** sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, elle n'est donc pas **entière.** En effet :

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^2 - {z_0}^2}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{-(z - z_0)}{zz_0(z - z_0)} = \lim_{z\to z_0} \frac{-1}{zz_0}$$

$$= \begin{cases} -\infty, z_0 = 0, donc\ la\ limite\ n'est\ pas\ finie\ et\ la\ fonction\ n'estpas\ dérivable. \\ \frac{-1}{{z_0}^2}, \qquad \forall\, z_0 \neq 0, donc\ la\ limite\ existe\ et\ est\ finie\ donc\ la\ fonction\ est\ dérivable. \end{cases}$$

3.5.3 Conditions de Cauchy-Riemann :

Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$ et $f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction de D un dans $\mathbb{C}$. Si f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ de D, alors les fonctions u et v admettent en (x_0, y_0) des dérivées partielles première et satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

D'une manière générale, si f est holomorphe sur D, alors les dérivées partielles de u et v existent et satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann en tout point de D. Réciproquement si les dérivées partielles de u et v existent et satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann en tout point de D, alors f est holomorphe.

Proposition 1 :

Si D un domaine dans $\mathbb{C}$ et si $f = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe dans D alors la dérivée de f est donnée par

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}, z \in D$$

Preuve : La dérivée de f au point z est donnée par :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z},\ avec\ \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i\,v(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - i\,v(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

La limite existe indépendamment de la manière dont Δz tend vers 0. Ainsi :

1) En mettant $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + i\,v(x+\Delta x, y) - u(x,y) - i\,v(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} i\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

2) En mettant $\Delta x = 0, \Delta z = \Delta y$

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + i\,v(x, y+\Delta y) - u(x,y) - i\,v(x,y)}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} i\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Exemple : $f(z) = z^2$. On a $f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, donc $u(x,y) = x^2 - y^2\ et\ v(x,y) = 2xy$, alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

La fonction f est donc holomorphe dans $\mathbb{C}$, et $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2iy = 2z = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$

Remarques 1 :

1. En multipliant la deuxième condition de Cauchy-Riemann par i et en sommant avec la première, ces condition peuvent être réécrites comme

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

2. En sachant que $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy \Rightarrow x = \frac{z+\bar{z}}{2}\ et\ x = \frac{z-\bar{z}}{2i}$,

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+i\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right]$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+i\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

3. En utilisant les remarque 1 et 2, les conditions de Cauchy-Riemann peuvent être écrites sous la forme
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$$

Exemple : $f(z)=Re(z)=x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\bar{z}}{2}\right)=\frac{1}{2}\neq 0$ donc f n'est pas holomorphe en aucun domaine de $\mathbb{C}$.

Proposition 2 : Si *f* est holomorphe dans un domaine *D*, alors *f',f'',…* sont également holomorphe dans *D*, *i.e.* les dérivées de tous les ordres existent dans *D*.

3.5.4 Opérateurs différentiels complexes :

On définit les opérateurs ∇ $(nabla) et$ $\overline{\nabla}$ par
$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}=2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$
$$\overline{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}=2\frac{\partial}{\partial z}$$

Soit $h(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ une fonction complexe différentiable de x et y. En utilisant les coordonnées conjuguées z et $\bar{z}$, on peut écrire
$$h(x,y)=B\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=B(z,\bar{z})$$

1. **Gradient :** Le gradient d'une fonction complexe $h=u+iv$ est définit comme

$$grad\ h=\nabla h=\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)=2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

En particulier, si la fonction B est dérivable de z, les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées et donc $\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}=0$, ce qui veut dire que le gradient est nul.

2. **Divergence :** La divergence d'une fonction complexe est définit par
$$div\ h=Re(\overline{\nabla}h)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=2Re\left(\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}\right)$$

3. **Rotationnel :** La rotationnel d'une fonction complexe est définit par
$$rot\ h=Im(\overline{\nabla}h)=\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2Im\left(\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}\right)$$

4. **Laplacien :** On définit l'opérateur de Laplace (ou Laplacien) par

$$\nabla^2 = Re(\nabla\bar{\nabla}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

3.5.5 Fonctions harmoniques :

Définition 4 : Soit $D \in \mathbb{R}^2$ un domaine et $u : D \longrightarrow \mathbb{C}$. La fonction u est harmonique dans D si elle y admet des dérivées partielles d'ordre deux $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})$ continues qui satisfont l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Remarque : Le Laplacien peut être représenté par $\Delta u = \nabla^2 u$.

Exemple : La fonction $u : (x, y) \longrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy$ est harmonique puisque

$$\Delta u(x, y) = \nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 2 - 2 = 0.$$

3.5.6 Fonctions Analytiques :

Définition 5 : Une fonction f est dite analytique en un point si elle est dérivable dans un voisinage de ce point.

Exemple : $f : z \longrightarrow |z|^2$ est dérivable seulement en *0*, et elle n'est analytique en aucun point

$$f(z) = |z|^2 = z\bar{z} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Proposition 3 : Si les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées (elle n'est pas holomorphe) en un point z ∈ D alors la fonction n'est pas analytique.

Définition 6 : Une fonction f est ℂ-analytique sur un domaine D si et seulement si

$$\forall z_0 \in D, \exists R > 0, \exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \ \ telle\ que$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, avec\ |z - z_0| \leq R.$$

Remarque : Soit D un domaine ℂ et $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$. Si u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann en tout point de D (*i.e.* f est holomorphe sur D) ⇔ f est analytique dans D.

Exemple : $z \to e^z$ est analytique sur ℂ puisque sa dérivée $\frac{d}{dz}e^z = e^z$ existe ∀z∈ℂ. On peut utiliser la définition 6 pour démontrer que cette fonction est ℂ-analytique. En effet, nous savons que l'exponentielle peut être développée en série comme

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Donc, $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $\exists R > 0$ tel que $|z - z_0| \leq R$, et $e^{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} \Longrightarrow e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z - z_0)^n$ donc $\exists \left\{a_n = \frac{e^{z_0}}{n!}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$.

Une autre méthode consiste à vérifier les conditions de Cauchy-Riemann :

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i\, e^x \sin y$, alors $u = e^x \cos y$ et $v = e^x \sin y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = \frac{\partial v}{\partial x}$
Les conditions sont vérifiées$\forall z \in \mathbb{C}$, donc la fonction est holomorphe dans $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ la fonction est $\mathbb{C}$-analytique.