1.1. L'ensemble des nombres complexes

Question : Trouver un nombre réel solution de l'équation algébrique $x^2 + 1 = 0$.

Réponse : Il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

Pour donner des solutions à cette équation et à des équations semblables, on introduit un ensemble plus grand que celui des nombres réels. On appelle cet ensemble les nombres complexes.

Définition

Un nombre complexe z s'écrit sous la forme dite algébrique :

$$z = x + iy \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des nombres réels,}$$

et i est appelé l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$.

- Le nombre x est appelée la partie réelle de z, on note $x = \mathrm{Re}\,(z)$.
- Le nombre y est appelée la partie imaginaire de z, on note $y = \mathrm{Im}\,(z)$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque

a) Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si

$$\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z') \text{ et } \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z').$$

b) Si $y = 0$ on dit que z est réel, si $x = 0$ on dit que z est un **imaginaire pur**.

c) Le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelé le conjugué de z.

1.2. Opérations sur les nombres complexes

- Addition : $(x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)\,i$.
- Soustraction : $(x + yi) - (u + vi) = (x - u) + (y - v)\,i$.
- Multiplication : $(x + yi)\,(u + vi) = xu + xvi + yui + yvi^2 = xu - yv + (xv + yu)\,i$.
- Division : $\dfrac{x + yi}{u + vi} = \dfrac{x + yi}{u + vi} \cdot \dfrac{u - vi}{u - vi} = \dfrac{xu - xvi + yui - yvi^2}{u^2 + v^2} = \dfrac{xu + yv}{u^2 + v^2} + \dfrac{yu - xv}{u^2 + v^2} i$.

Remarque

Soient z et w deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

(1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ **(2)** $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ **(3)** $\overline{\overline{z}} = z$ **(4)** $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$ **(5)** $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}\,(z)\,i$.

1.3. Valeur absolue (ou module)

Définition

La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est définie par

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemple

$|-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$ ∎

Si z et w sont deux nombres complexes, on a les propriétés suivantes :

(1) $|zw| = |z|\,|w|$ **(2)** $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},\ w \neq 0$ **(3)** $|\overline{z}| = |z|$ **(4)** $z\,\overline{z} = |z|^2$.

(5) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (inégalité triangulaire) **(6)** $|z - w| \geq |z| - |w|$.

Remarque

On a les propriétés suivantes :

(1) $\sqrt{x^2} = |x|$ et $x^2 = |x|^2$ si $x \in \mathbb{R}$ **(2)** $z^2 \neq |z|^2$ si $\mathrm{Im}\,(z) \neq 0$.

(3) $|z| = 0 \iff z = 0$ **(4)** $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

Remarque

Si z et w sont deux nombres complexes tels que $w \neq 0$, alors on a :

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{z\,\overline{w}}{|w|^2}.$$

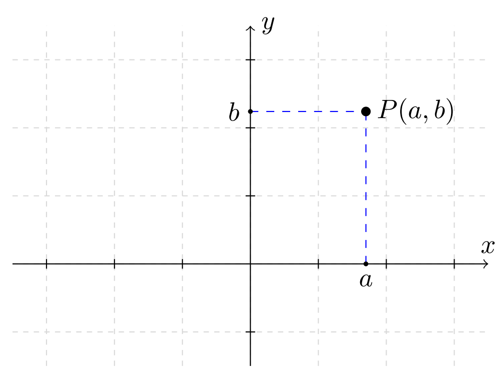
Exemple

$\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)\,(1+2i)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{-4}{5} + \frac{7}{5}i.$

1.3. Représentation graphique des nombres complexes

Un nombre complexe $a + ib$ pouvant être considéré comme un couple ordonné de nombres réels, nous pouvons représenter de tels nombres par des points d'un plan des xy appelé **plan complexe**.

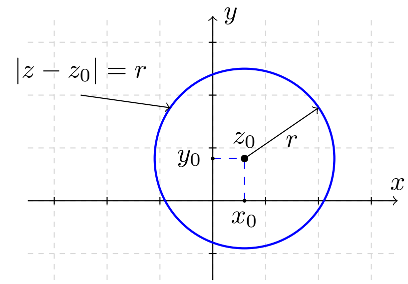
À chaque nombre complexe $z = a + ib$ correspond un point $P\,(a, b)$ du plan.



1.3.1. Courbes dans le plan complexe

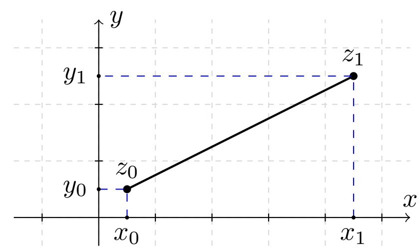
Cercle

Le cercle de rayon r et de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ est défini par l'équation $|z - z_0| = r$.



Segments

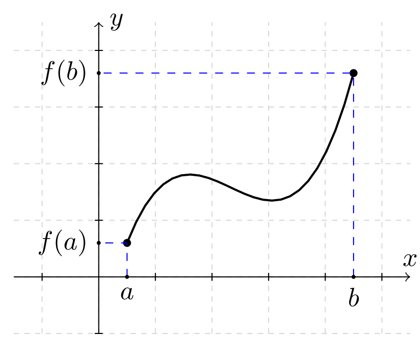
Le segment de droite reliant deux points complexes z_0 et z_1 est l'ensemble des points
$\{z \in \mathbb{C} \ \ / \ \ z = (1-t)\, z_0 + t z_1,\ \ t \in [0,1]\}$.



Courbes

En général, une courbe $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ où f est une fonction continue, correspond à l'ensemble de points

$$\{z \in \mathbb{C} \ \ / \ \ z = x + if(x) = (x, f(x)),\ \ x \in [a,b]\}.$$

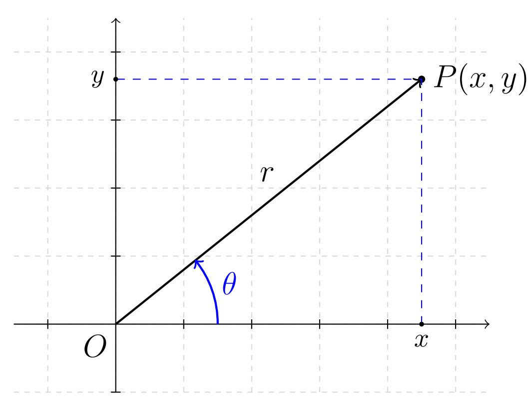


1.4. Forme polaire des nombres complexes

Si $P(x,y)$ désigne un point du plan complexe correspondant au nombre complexe $z = x + iy$, nous voyons que

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

où $r = \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy|$ est le module ou la valeur absolue de $z = x + iy$, et θ est appelé l'amplitude ou l'argument de $z = x+iy$, noté $\arg z$, est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec le demi-axe positif Ox.



On en tire

$$z = x + iy = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,,$$

qui est appelée la **forme polaire** ou **forme trigonométrique** du nombre complexe z.

Si $-\pi < \theta \leq \pi$, alors l'angle θ est appelé l'**argument principal**, noté par $\operatorname{Arg}\theta$. On a

$$\arg z = \operatorname{Arg}\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

1.4.1. Formule de De Moivre

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}, \tag{1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}.$$

Une généralisation de (1) conduit à

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 ... r_n \{\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)\},$$

ce qui, si $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$, conduit à

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n\{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\},$$

qui est appelée formule de De Moivre.

4.2 Racines d'un nombre complexe

Un nombre z est appelé racine n-ième d'un nombre complexe $a + ib$ si $z^n = a + ib$, et nous écrivons $z = (a + ib)^{\frac{1}{n}}$ ou $z = \sqrt[n]{a + ib}$. D'après la formule de De Moivre

$$\begin{aligned} z &= (a + ib)^{\frac{1}{n}} = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{\frac{1}{n}} \\ &= r^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\left(\tfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right\},\ k = 0, 1, 2, ...n - 1. \end{aligned}$$

D'où il résulte qu'il y a n racines n-ièmes différentes de $a + ib$ pourvu que $a + ib \neq 0$.

Exemple

Calculer les racines quatrièmes de 1.

On a $\sqrt[4]{1} = \{\cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi)\}^{\frac{1}{4}} = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{2k\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Pour $k = 0$, $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$; $\quad k = 1$, $z_1 = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i$;

$k = 2$, $z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$; $\quad k = 3$, $z_3 = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2} = -i$.