Département de Génie Mécanique
L2 Energétique
Matière : **Math04**

Série de TD N°01

Ex01: Trouver les parties réelles et imaginaires, arguments et modules des nombres complexes suivants :

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^6,\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5,\ \frac{2+i}{1-i},\ \frac{2i}{1+i},\ \frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$$

Ex02 : Trouver les points z du plan complexe vérifiant :

$|z|=|z-i|,\ |\bar{z}-4+i|=1,\ Re(1-z)<\frac{1}{2}$

Ex03 : 1. Trouver les solutions de l'équation $z^4=1$.
2. Calculer les racines cubiques de i.

Ex04 : Résoudre l'équation $z^3=1$ en utilisant la forme exponentielle.
2. On note j la solution complexe de partie imaginaire positive.
a) Vérifier que j^2 est aussi solution.
b) Montrer que $j^2=\frac{1}{j}=\bar{j}$.
c) Calculer $1+j+j^2$.

Ex05 : Soit z un nombre complexe vérifiant $|z|=1$. Montrer que

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \operatorname{Im}(z)>0\\ -\frac{\pi}{2} & \operatorname{Im}(z)<0\end{cases}$$

Ex06 : 1. Démonter que

$$1+e^{\frac{i\pi}{5}}+e^{\frac{i2\pi}{5}}+e^{\frac{i3\pi}{5}}+e^{\frac{i4\pi}{5}}=\frac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{5}}}$$

2. En déduire les valeurs des sommes

$$S=\sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right),\quad S'=\sum_{k=0}^{4}\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right),$$

Ex07 : Trouver les lieux géométriques suivants :

1. $|z-z_1|=|z-z_2|$
2. $Re(z)\geq c\ \ et\ Im(z)<c$
3. $0<Re(iz)<1$
4. $Re(z)+Im(z)<1$
5. $|z-2i|\leq 3$
6. $Re\left(\frac{1}{z}\right)=c\ et\ Im\left(\frac{1}{z}\right)=c$
7. $z=t^2+it^4,\ t\in\mathbb{R}$
8. $z=\frac{1}{1+it},\ t\in\mathbb{R}$

Solution

Exo 1 :

1. $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^6 = 64, donc\ Re(z) = 64, Im(z) = 0, |z| = 64\ et \arg(z) = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
2. $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5 = -i^5 = -i, Re(z) = 0, Im(z) = -1, |z| = 1\ et \arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
3. $z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, Re(z) = \frac{1}{2}, Im(z) = \frac{3}{2}, |z| = \frac{\sqrt{10}}{2}\ \ et \arg(z) = \arctan(3) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
4. $z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{2} = 1 + i, Re(z) = 1, Im(z) = 1, |z| = \sqrt{2}, \arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
5. $z = \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}, \theta \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

$$z = \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta - i\sin\theta}\,\frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta + i\sin\theta}$$
$$= \frac{(1 + \cos\theta)^2 - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\,(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$$
$$= \frac{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\,(1 + \cos\theta)}{2(1 + \cos\theta)}$$
$$= \frac{1 + 2\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 + 2i\sin\theta\,(1 + \cos\theta)}{2(1 + \cos\theta)}$$
$$= \frac{2\cos\theta\,(1 + \cos\theta) + 2i\sin\theta\,(1 + \cos\theta)}{2(1 + \cos\theta)}$$
$$= \cos\theta + i\sin\theta \quad puisque\ \theta \neq (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

$, Re(z) = \cos\theta\ , Im(z) = \sin\theta\ , \qquad |z| = 1, \arg(z) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Autre méthode en utilisant la formule d'Euler:

$\cos\theta + i\ \sin\theta = e^{i\theta}, \cos\theta - i\ \sin\theta = e^{-i\theta}$

$$z = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 + e^{-i\theta}} = e^{i\theta}\frac{e^{-i\theta} + 1}{1 + e^{-i\theta}} = e^{i\theta}, puisque\ \theta \neq (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Exo 2 :

posons $z = x + iy$, alors :

1. $|z| = |z - i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$

$\Longrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc tous les points appartenant à la droite $y = \frac{1}{2}$.

2. $|\bar{z} - 4 + i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x - iy - 4 + i} = 1 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 = 1.$
Donc l'ensemble des points est un cercle de centre (4,1) et de rayon 1.

3. $Re(1 - z) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, i.e ce sont les points appartenant au demi-plan $x > \frac{1}{2}$.

Exo 3 :

1. Solutions de l'équation $z^4 = 1$.

$z^4 = 1 = 1(cos(0) + i\,sin(0)) \Leftrightarrow z_k = (cos(2k\pi) + i\,sin(2k\pi))^{\frac{1}{4}}$, en appliquant la formule de Moivre les racines de l'équation sont : $z_k = cos(\frac{2k\pi}{4}) + i\,sin(\frac{2k\pi}{4})\,, k = 0,1,2,3.$

Donc :

$$z_0 = 1$$
$$z_1 = cos(\frac{\pi}{2}) + i\,sin(\frac{\pi}{2}) = i$$
$$z_2 = cos(\pi) + i\,sin(\pi) = -1$$
$$z_3 = cos(\frac{3\pi}{2}) + i\,sin(\frac{3\pi}{2}) = -i$$

2. Les racines cubique de i, $z^3 = i$

On a : $z^3 = i = 1\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,sin(\frac{\pi}{2})\right) \Leftrightarrow$

$$z_k = \left(cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right), k = 0,1,2.$$
$$z_0 = cos(\frac{\pi}{6}) + i\,sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$z_1 = cos(\frac{5\pi}{6}) + i\,sin(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$z_2 = cos(\frac{3\pi}{2}) + i\,sin(\frac{3\pi}{2}) = -i$$

Exo 4 :

1. $z^3 = 1 = 1(cos(0) + i\,sin(0))$

Les racines de l'équation sont :

$$z_k = \left(cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right), k = 0,1,2.$$
$$z_0 = 1$$
$$z_1 = \left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = e^{\frac{2\pi}{3}i}$$
$$z_2 = \left(cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

2.

$$sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2},$$
$$sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2\,cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

On déduit que $j = e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

a. $j^2 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$ donc c'est une solution.

b. On a $j^3 = e^{2\pi i} = 1, j^2 j = 1 \iff j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j} = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

c. $1 + j + j^2 = 1 + j + \bar{j} = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$

Exo 5 :

Soit $z = x + iy$,

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{x-1+iy}{x+1+iy}\,\frac{x+1-iy}{x+1-iy}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1) + y^2 + iy(x+1) - iy(x-1)}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + i\,\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = arctan\,\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right)$$

puisque $|z| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1\ et\ x^2 + y^2 - 1 = 0$, donc

$$arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = arctan\left(\frac{2y}{0}\right) = \begin{cases} arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} & y = Im(z) > 0 \\ arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} & y = Im(z) < 0 \end{cases}$$

Exo 6 :

1. Nous remarquons que

$$\sum_{k=0}^{4} e^{i\frac{k\pi}{5}} = \sum_{k=0}^{4}\left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^k = \frac{1-e^{i5\frac{\pi}{5}}}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}\ (somme\ partielle\ d'une\ série\ numérique)$$

2. $\sum_{k=0}^{4} e^{i\frac{k\pi}{5}} = \sum_{k=0}^{4}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)\right) = \sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right) + i\sum_{k=0}^{4}\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)$

D'autre part ,

$$\sum_{k=0}^{4} e^{i\frac{k\pi}{5}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{2}{1-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$= \frac{2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)}{2-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = 1 + i\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

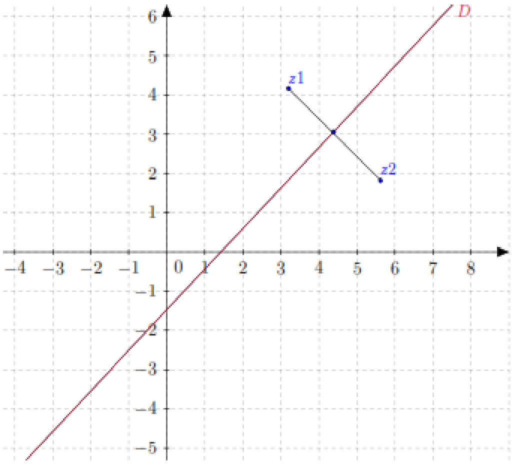
Donc,

$$\sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right) = 1$$

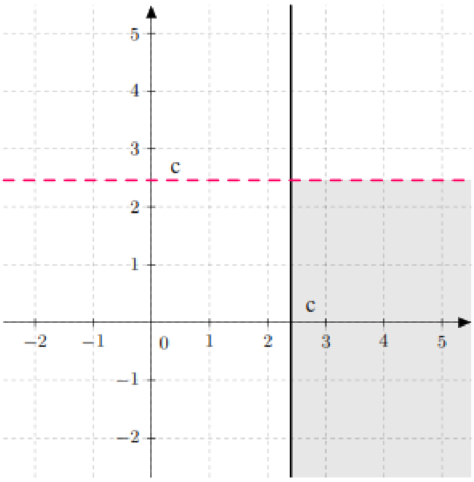
$$\sum_{k=0}^{4}\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

Exo 7 :

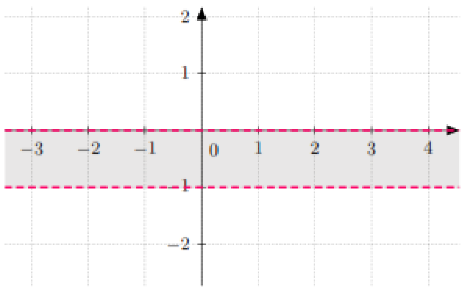
1. Les lieux géométriques de l'équation $|z - z_1|$ sont tous les points équidistant des points z_1, z_2, c'est-à-dire tous les points appartenant à la médiane *D* du segment $[z_1, z_2]$.



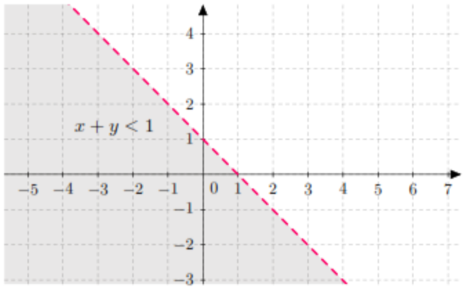
2. $Re(z) \geq c \quad et \; Im(z) < c$. L'ensemble des points sont tous les points appartenant à l'intersection des deux demi-plans $x \geq c \quad et \; y < c$ (En gris).



3. On a : $iz = i(x + iy) = -y + ix$, donc
$$0 < -y < 1 \; et \; x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 < y < 0 \; et \; x \in \mathbb{R}$$
Ce sont tous les points appartenant à la bande comprise entre les droites $y = 0$ et $y = -1$. (En gris)



4. $Re(z) + Im(z) < 1 \Longrightarrow x + y < 1$, l'ensemble des points est le demi-plan $x + y < 1$. (En gris)



5. $|z-2i| \leq 3 \Longrightarrow |x+(y-2)i| = \sqrt{x^2+(y-2)^2} \leq 3 \Longrightarrow x^2+(y-2)^2 \leq 9$, c'est le disque fermé de centre $(0,2)$ et de rayon 3.
6. $Re\left(\frac{1}{z}\right) = c \; et \; Im\left(\frac{1}{z}\right) = c$

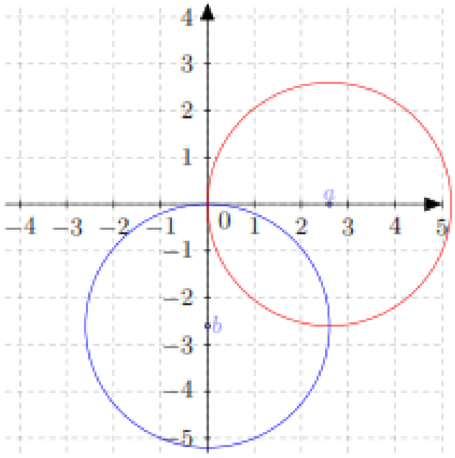
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

Donc,

$Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = c \Longrightarrow \left(x-\frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2}$ un cercle de centre $(\frac{1}{2c}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2c}$.

$Im\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = c \Longrightarrow x^2 + \left(y-\frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}$ un cercle de centre $(0, \frac{1}{2c})$ et de rayon $\frac{1}{2c}$.

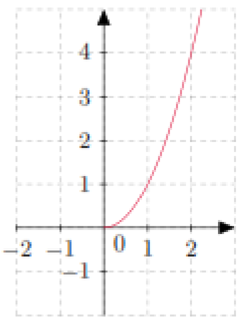
Les points qui satisfont aux deux conditions sont les deux points d'intersection des deux cercles.



7. $z = t^2 + it^4, t \in \mathbb{R}$, mettant

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases} \; nous \; aurons : y = x^2$$

Les points appartiennent à la parabole d'équation $y = x^2$ avec $x \geq 0$.



8. $z = \frac{1}{1+it}, t \in \mathbb{R}$

$$z = \frac{1}{1+it} = \frac{1-it}{1+t^2} \Rightarrow x = \frac{1}{1+t^2}, y = \frac{t}{1+t^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} = x$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = x$$

$$\Longrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

L’ensemble des points d’un cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.