High School of Sciences and Technology

of Hammam Sousse

Annales des Exercices et Examens Théorie de l'Information et Codage

Proposé par Dr. Hichem Mrabet

Maitre-assistant en Télécommunication

Décembre 2015

Plan du module Théorie de l'Information et Codage

A.U. 2014/2015

Chapitre I : Rappel sur la probabilité

- Réalisation et épreuve
- Probabilité conditionnelle
- Probabilité jointe
- Formule de BAYES
- La notion de la mesure de la quantité d'incertitude
- La notion de la mesure de la quantité d'information
- Exercices sur le chapitre I

Chapitre II : Mesure de l'information

- Quantité d'information intrinsèque
- Information mutuelle de deux événements
- Entropie d'une variable aléatoire discrète
- Entropie et information liées à un couple de variables
- Information mutuelle conditionnelle
- Exercices sur le chapitre II

Chapitre III : Codage source (compression de données)

- Entropie d'une source discrète
- Théorème fondamental de codage source
- Inégalité de Kraft
- Codage source
    - Généralités sur les codes
    - Codage d'une variable aléatoire discrète
    - Codage d'une source
        - ✓ Codes à longueur variable

- ✓ Codes bloc
- ✓ Codage de HUFFMAN

- Exercices sur le codage source

Chapitre IV : Codage canal (code correcteur d'erreur)

- Capacité d'un canal discret
- Codage de canal
- Exercices sur le codage canal

Références bibliographiques

- C. E. SHANNON, A Mathematical Theory of Communication. 1948
- J.G. Proakis, Digital communication. 2001
- Cours Information et codage, Chapitre 8. 2010
- Cours ELE112, bases de transmissions, CNAM. 2013

Exercice 1

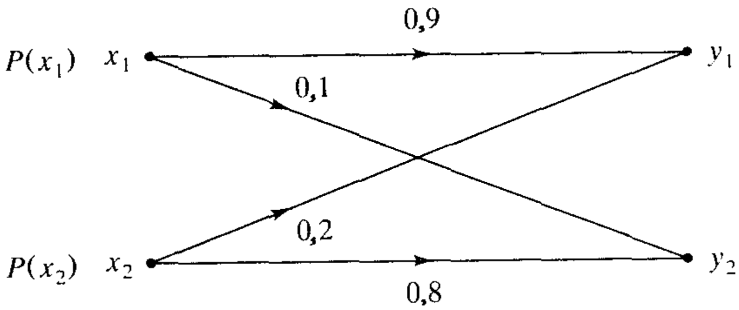
1. Si x_i et x_j sont indépendants, démonter l'égalité suivante :

   $I(x_i,x_j)=I(x_i)+I(x_j)$

2. Illustrer la relation précédente avec une représentation en diagramme de Venn.

Exercice 2

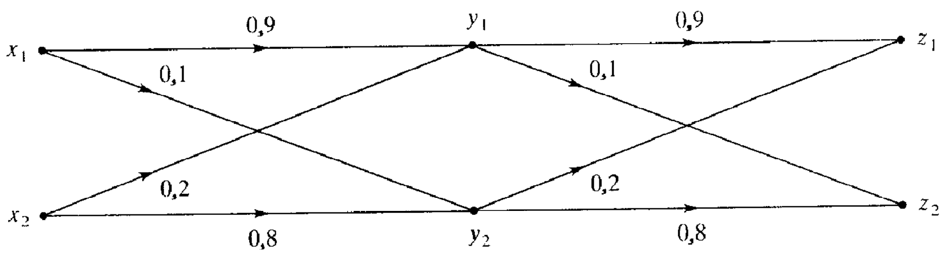
On considère un canal binaire tel que représenté sur la figure suivante :



1. Calculer la matrice de transition du canal de transmission.
2. Calculer P(y1) et P(y2) lorsque P(x1)= P(x2)=0.5 .
3. Calculer les probabilités conjointes P(x1,y2) et P(x2,y1) lorsque P(x1)=P(x2)=0.5 .

Exercice 3

On connecte en série 2 canaux binaires identiques a celui de l'exercice précédent comme le montre le schéma suivant :



1. Calculer la matrice de transition de cet assemblage et en tracer le schéma.
2. Calculer P(z1) et P(z2) lorsque P(x1)= P(x2)=0.5 .

Exercice 1

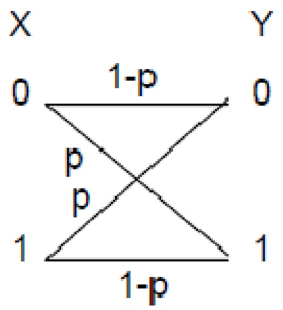
Démontrer les relations suivantes :

1) $H(X) \leq \log(m)$ où m est l'alphabet de la source X.

2) $H(X,Y) = H(X/Y) + H(Y) = H(Y/X) + H(X)$

Exercice 2

On considère le canal binaire symétrique suivant :

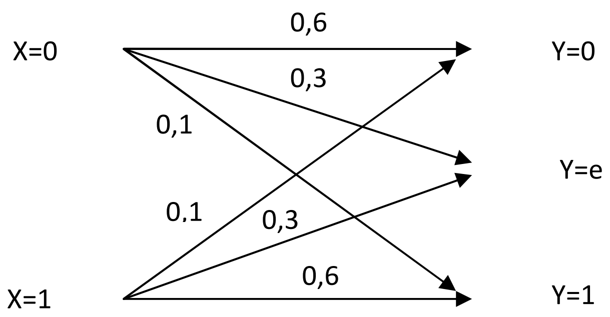


La source X émet des symboles équiprobables $p(X=0)= p(X=1)=1/2$.

Déterminer H(Y), H(Y/X) et $\Delta(X,Y)$ en fonction de p.

Exercice 3

On considère le canal représenté par :



Sachant que $Pr(X=0)=p$ et $Probabilité(X=1)=1-p$.

1. Calculer l'entropie H(X) et l'entropie conditionnelle H(X/Y)
2. En déduire l'information mutuelle $\Delta(X,Y)$.
3. Pour quelle valeur de p, $\Delta(X,Y)$ est maximum.

2-STIC	D.S. Théorie de L'information & codage	A.U. 2014/2015
Enseignant Dr. H.Mrabet	Date 29/11/2014	Durée 1H15

N.B : la clarté des réponses sera prise en considération.

EXERCICE 1

On s'intéresse à faire des expériences avec un dé qui possède 6 faces dont les valeurs possibles de ces faces sont S={1,2,3,4,5,6}. Soit l'expérience qui consiste à avoir 3 valeurs parmi S.

Soit l'événement A qui consiste à avoir les valeurs de sortie 1, 3 et 6 : A={1,3,6}.

Soit l'événement B qui consiste à avoir les valeurs de sortie 1, 2 et 3 : B={1,2,3}.

a) Calculer les probabilités associées aux événements A et B : p(A) et p(B).

b) En déduire les quantités d'information intrinsèques i(A) et i(B).

On définit p(A,B) comme étant la probabilité d'intersection entre les événements A et B notée aussi $p(A \cap B)$.

c) Calculer la probabilité jointe p(A,B).

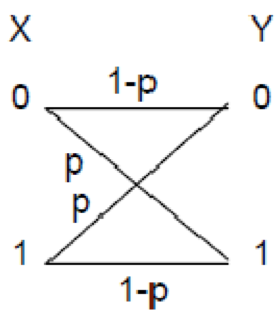
d) En déduire la quantité d'information mutuelle i(A,B).

e) En utilisant la formule de BAYES, déterminer la probabilité conditionnelle p(A/B).

f) En déduire la quantité d'information conditionnelle i(A/B).

EXERCICE 2

On considère le canal binaire symétrique suivant :



La source X émet des symboles équiprobables p(X=0)= p(X=1)=1/2.

a) Déterminer p(Y=0) et p(Y=1).

b) Déterminer H(X) et H(Y).

c) Déterminer la valeur moyenne de l'information mutuelle $\Delta(X,Y)$ en fonction de p.

Bon travail

N.B : la clarté des réponses sera prise en considération.

EXERCICE 1 (4 points)

1. En utilisant la formule de Bayes, démonter l'égalité suivante :
   $i(x_k,y_l)=i(x_k)+i(y_l)-\delta i(x_k,y_l)$
2. Illustrer la relation suivante avec une représentation en diagramme de Venn :
   $\delta i(x_k,y_l)= i(x_k)-i(x_k/y_l)= i(y_l)-i(y_l/x_k)$

EXERCICE 2 (8 points)

Une ville est divisée en deux groupes d'habitants A et B. Il y a des habitants qui disent la vérité, des habitants qui disent des mensonges et d'autres ne disent rien (sans réponses). Une enquête est réalisée sur ces habitants a donné ces résultats :

	V (Vérité)	M (Mensonge)	S.R (Sans Réponse)
A	50%	30%	20%
B	30%	50%	20%

Soit p la probabilité d'appartenir au groupe A et 1-p est la probabilité d'appartenir au groupe B.

1. Trouver H(X), si on associe la variable aléatoire X à l'appartenance des habitants aux groupes A ou B.
2. Quelle est l'entropie conditionnelle H(X/Y), si on associe la variable aléatoire Y à la réponse des habitants à une question dont on connait la réponse?
3. Calculer l'entropie conjointe H(X,Y).

EXERCICE 3(8 points)

I.Une source d'information X utilise 3 messages A, B, C avec les probabilités d'apparition : P(A)=0.5 ; p(B)=0.25 ; p(C)=0.25

1. Calculer l'entropie de la source H(X).
2. On encode les messages de la source de la façon suivante :
   A -> 00 ; C -> 11 ; B -> 01
   Calculer la longueur moyenne des mots.

3. Utiliser l'algorithme de Huffman pour encoder efficacement les symboles de la source. Calculer la longueur moyenne des mots ainsi obtenue.

II. On suppose maintenant que les symboles sont corrélés deux à deux avec:

$p(AA)=0.25$; $p(AB)=0.2$; $p(AC)=0.05$; $p(BA)=0.05$; $p(BB)=0.05$; $p(BC)=0.15$; $p(CA)=0.2$; $p(CB)=0$; $p(CC)=0.05$

4. Calculer $H(X)$.
5. Appliquer l'algorithme de Huffman pour trouver le codage optimal de cette source et calculer la longueur moyenne des mots.

RT4-A	**D.S. Théorie de L'information & codage**	**A.U. 2014/2015**
Enseignant Dr. H. Mrabet	**Date 13/03/2015**	**Durée 1H30**

N.B : la clarté des réponses sera prise en considération.

<u>EXERCICE 1</u> (10 POINTS)

Une source X émet les trois symboles a_1, a_2 et a_3 avec les probabilités suivantes : $Pr(X=a_1) = 0.25$, $Pr(X=a_2) = 0.5$ et $Pr(X=a_3) = 0.25$.

Cette source est connectée à un canal de transmission à entrées et sorties discrètes dont les probabilités conditionnelles sont définies comme suit :

$p_{ij} = Pr(Y=a_j|X=a_i) = 0.05$ avec $\forall$ i, j$\in$ {1,2,3}

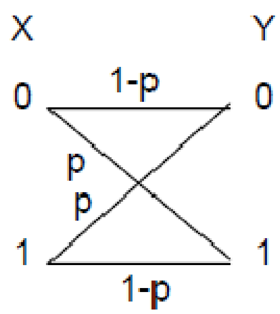
$p_{ii} = Pr(Y=a_i|X=a_i) = 0.9$ avec $\forall$ i, j$\in$ {1,2,3}

(p_{ij} est la probabilité de recevoir a_j lorsque l'on émet a_i)

1. Représenter graphiquement ce canal de transmission.
2. Calculer les probabilités $Pr(Y=a_i)$ pour $i\in\{1,2,3\}$ et les probabilités conditionnelles $Pr(X=a_i \mid Y=a_j)$.
3. Calculer les entropies H(X) et H(Y), l'entropie conjointe H(X,Y) et l'entropie conditionnelle H(Y|X) .
4. Vérifier que H(X,Y)=H(Y|X)+H(X)=H(X|Y)+H(Y).

<u>EXERCICE 2</u> (10 POINTS)

On considère le canal binaire symétrique suivant :



La source X émet des symboles équiprobables p(X=0)= p(X=1)=1/2.

1. Déterminer H(Y), H(Y/X).
2. En déduire $\Delta(X,Y)$ en fonction de p.
3. Quelle est la valeur de p qui maximise $\Delta(X,Y)$.

RT4-A&B	Examen théorie de l'information & codage	A.U. 2014/2015
Enseignant Dr. H. Mrabet	(Session principale)	Durée 2H00

Partie 1(10points)

<u>Exercice 1</u> (5points)

Soit deux sources corrélées $S=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $T=(y_1,y_2,\dots,y_p)$ sont supposées *stationnaire* et sans mémoire.

Démontrer les inégalités suivantes :

1. $H(X) \geq H(X/Y)$
2. $H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$

On considère une troisième source $R=(z_1,z_2,\dots,z_q)$ corrélée avec S et T *stationnaire* et sans mémoire :

3. Montrer que $\mathrm{H}(X,Y,Z) = H(X) + H(Y/X) + H(Z/X,Y)$
4. Montrer que $H(Z/X,Y) \leq H(Z/Y)$

<u>Exercice 2</u> (5points)

Soit un canal discret d'entrée $\mathbf{X} \in \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 \}$, et sortie $\mathbf{Y} \in \{ 0 ; 1 ; 2 \}$.

Le canal est tel que : **Y = X + Z (mod 3)**

où $\mathbf{Z} \in \{ 0 ; +1 \}$ est aléatoire, avec les probabilités respectives **P_Z = { 2/3 ; 1/3 }**

Note modulo: on a 1 (mod 3) = 1 ; 3 (mod 3) = 0 ; 4 (mod 3) = 1 ; …

1) Donner le diagramme de transition de ce canal de transmission.

2) Donner la matrice de transition du canal [P(Y/X)], Pour des entrées équiprobables.

3) Calculer l'information mutuelle moyenne Δ(X,Y).

4) Déterminer la capacité de ce canal qui maximise Δ (X,Y).

Partie 2(10points)

<u>Exercice 3</u> (5points)

On considère une source discrète sans mémoire X produisant les symboles xi avec i={1,2,3,4} . Le tableau suivant propose 4 codages binaires possibles :

xi	Code A	Code B	Code C	Code D
x1	00	0	0	0
x2	01	10	11	100
x3	10	11	100	110
x4	11	110	110	111

1. Donner l'arbre binaire pour chaque codage.
2. Monter que les codes A, C et D satisfont à l'inégalité de *Kraft* et que le code B ne satisfait pas.
3. Monter que le code A et D sont *déchiffrables* d'une façon unique tandis que les codes B et C ne le sont pas.

Exercice 4 (5points)

Une source discrète sans mémoire X produit cinq symboles équiprobables.

1. Construire un code de *Shannon-Fano* relatif à cette source et calculer l'efficacité.
2. Construire un autre code de *Shannon-Fano* relatif à cette source et comparer les résultats obtenus.
3. Construire un code de *Huffman* relatif à cette source et comparer les résultats.

RT4-A&B	**Examen Théorie de L'information & codage**	**A.U. 2014/2015**
Enseignant Dr. H. Mrabet	**(Session de rattrapage)**	**Durée 2H00**

N.B : la clarté des réponses sera prise en considération.

EXERCICE 1(6 POINTS)

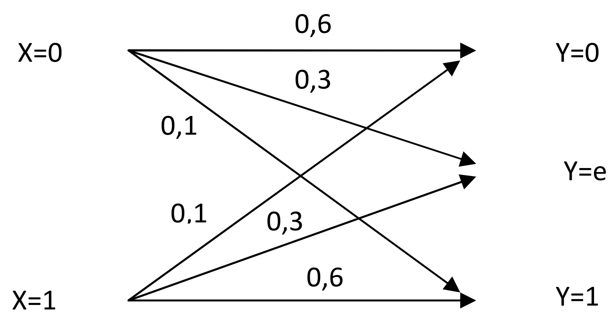
On sait que deux personnes sur 100 en moyenne sont atteintes par une certaines maladies. On utilise pour reconnaitre les maladies une réaction déterminée, qui est toujours positive quand le sujet est malade, mais qui est aussi souvent négative que positive quand il est sain.

Soit Y l'expérience qui consiste à déterminer si le sujet est sain ou non et X est l'expérience qui consiste à déterminer le résultat de la réaction indiquée.

a) Représenter graphiquement les résultats de l'expérience.
b) Quelle sera l'entropie H(Y) de l'expérience Y ?
c) Quelle sera l'entropie conditionnelle H(Y/X) de l'expérience Y sachant la réalisation de X ?

EXERCICE 2(6 POINTS)

On considère le canal représenté par :



Sachant que Pr(X=0)=p et Probabilité(X=1)=1-p.

4. Calculer l'entropie H(X) et l'entropie conditionnelle H(X/Y)
5. En déduire l'information mutuelle Δ(X,Y).
6. Pour quelle valeur de p, Δ(X,Y) est maximum.

EXERCICE 3(8 POINTS)

Soit la source $M=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)$. Les éléments de la source M sont émis d'une façon indépendante avec les probabilités d'apparition : $p(a_1)=0.4$; $p(a_2)=0.2$; $p(a_3)=0.1$; $p(a_4)=0{,}1$; $p(a_5)=0{,}07$; $p(a_6)=0{,}06$; $p(a_7)=0{,}04$; $p(a_8)=0{,}03$.

6. Calculer l'entropie de la source H(X).
7. Utiliser l'algorithme de Huffman pour encoder d'une façon optimale les symboles de la source.
8. Calculer la longueur moyenne des mots ainsi obtenue.
9. Trouver la redondance de la source.
10. Comment peut-on améliorer l'efficacité de ce codage ? Justifier la réponse.

Bon travail