

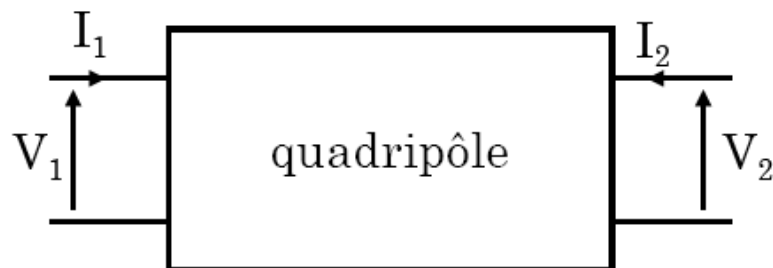
## Chapitre II : Quadripôles passifs et filtres électriques

### II.1. Définition

Un **quadripôle**, est un composant ou un circuit (ensemble de composants) à deux entrées et deux sorties, permettant le transfert d'énergie entre deux dipôles. Les signaux électriques en entrée et en sortie peuvent être de nature différente (tension, courant, puissance).

Les grandeurs d'entrée sont  $V_1$  et  $I_1$ .

Les grandeurs de sorties sont  $V_2$  et  $I_2$ .



On distingue 3 types de quadripôles :

- **Quadripôles passifs** : Un quadripôle passif est constitué uniquement de composants passifs (bobine, résistors, condensateurs, ...)
- **Quadripôles actifs** : Un quadripôle actif comporte au moins un composant actif (transistor, DEL, ...) alimenté par une source de tension continue.
- **Quadripôle linéaire** : Un quadripôle linéaire est un quadripôle qui ne comporte que des dipôles passifs linéaires et dans le cas d'un quadripôle actif, le ou les composants actifs fonctionnent en régime linéaire. Il existe donc pour un quadripôle actif linéaire un domaine de linéarité.

### II.2. REPRÉSENTATION MATRICIELLE

Ils existent 4 représentations matricielles différentes:

- matrices impédances
- matrices admittances
- matrices hybrides
- matrices de transfert

### II.2.1. Matrices impédances

Les équations caractéristiques d'un quadripôle composé uniquement d'éléments linéaires et de sources dépendantes peuvent se mettre sous la forme générale :

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

Ce qui s'écrit encore en utilisant la notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ou} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Où  $[Z]$  est la matrice impédance du quadripôle. Les coefficients de cette matrice s'appellent les paramètres  $Z$  en circuit ouvert, puisqu'ils peuvent être mesurés en ouvrant successivement les circuits d'entrée et de sortie. Ils se définissent comme suit :

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \text{est appelée impédance d'entrée en circuit ouvert (sortie à vide) ;}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{est appelée impédance de transfert inverse en circuit ouvert ;}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \text{est appelée impédance de transfert (direct) en circuit ouvert ;}$$

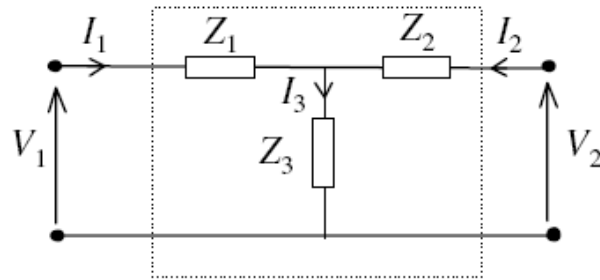
$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{est appelée impédance de sortie en circuit ouvert.}$$

L'unité des impédances  $Z_{ij}$  sont les ohms ( $\Omega$ ). L'indice  $i$  est relatif à la tension et indice  $j$  est relatif au courant.

**Définition 1** : un quadripôle est dit réciproque si les termes de la seconde diagonale sont égaux :  $Z_{12} = Z_{21}$ . Cette propriété est caractéristique des quadripôles composés d'éléments passifs (sans générateur de courant et de tension).

**Exemple 1 :** quadripôle en T

Nous déterminons les paramètres Z du quadripôle de la figure.



Nous appliquons la loi de Kirchhoff aux deux mailles de la figure.

$$V_1 = Z_1 I_1 + Z_3 I_3 = Z_1 I_1 + Z_3 (I_1 + I_2) = (Z_1 + Z_3)I_1 + Z_3 I_2$$

$$V_2 = Z_2 I_2 + Z_3 I_3 = Z_2 I_2 + Z_3 (I_1 + I_2) = Z_3 I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2$$

Nous trouvons :  $Z_{11} = Z_1 + Z_3$ ,  $Z_{22} = Z_2 + Z_3$  et  $Z_{12} = Z_{21} = Z_3$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Ainsi, on a :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

**II.2.2. Matrice admittance**

Si nous exprimons par exemple les courants  $I_1$  et  $I_2$  en fonction des tensions  $V_1$  et  $V_2$ , nous obtenons des coefficients homogènes à des admittances.

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$$

$$\text{Soit : } \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}] \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

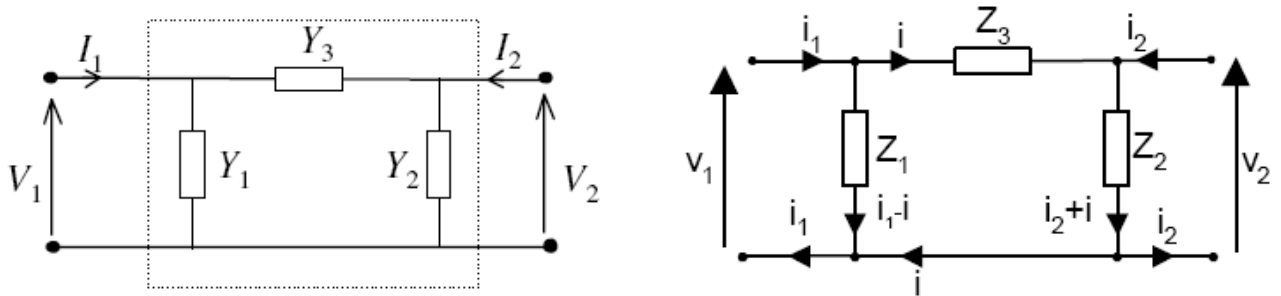
Où  $[\mathbf{Y}]$  représente la matrice admittance du quadripôle.

En comparant les équations de la matrice impédance et de la matrice admittance, nous obtenons :

$$[Z] = [Y^{-1}] \quad \text{et} \quad [Y] = [Z^{-1}]$$

**Exemple 2 :**

Prenons le quadripôle en  $\Pi$  de la figure et appliquons les lois de Kirchhoff aux nœuds d'entrée et de sortie, nous obtenons :



Soit  $Y_1 = \frac{1}{Z_1}$ ,  $Y_2 = \frac{1}{Z_2}$  et  $Y_3 = \frac{1}{Z_3}$ ,

Soit  $i$  le courant circulant dans l'admittance  $Y_3$ .

On a  $i = Y_3(v_1 - v_2)$

$$\begin{aligned} I_1 &= V_1 Y_1 + (V_1 - V_2) Y_3 = (Y_1 + Y_3) V_1 - Y_3 V_2 \\ I_2 &= V_2 Y_2 + (V_2 - V_1) Y_3 = -Y_3 V_1 + (Y_2 + Y_3) V_2 \end{aligned}$$

Nous trouvons par identification :

$$Y_{11} = Y_1 + Y_3, \quad Y_{22} = Y_2 + Y_3 \quad \text{et} \quad Y_{12} = Y_{21} = -Y_3$$

La matrice admittance devient :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'interprétation physique de chacun des différents coefficients de la matrice admittance.

$$Y_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2 = 0} \quad Y_{11} \text{ est l'admittance vue de l'entrée lorsque la sortie du quadripôle est en court-circuit (} v_2 = 0 \text{)}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1 = 0} \quad Y_{22} \text{ est l'admittance vue de la sortie lorsque l'entrée du quadripôle est en court-circuit (} v_1 = 0 \text{)}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1 = 0} \quad Y_{12} \text{ est l'admittance de transfert inverse obtenue avec l'entrée du quadripôle en court-circuit (} v_1 = 0 \text{)}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2 = 0} \quad Y_{21} \text{ est l'admittance de transfert directe obtenue avec la sortie du quadripôle en court-circuit (} v_2 = 0 \text{)}$$

### II.2.3. Matrice hybride [h]

Les matrices hybrides sont utilisées en particulier dans l'étude des transistors. On utilise les deux équations suivantes pour décrire le quadripôle :

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$

Dans ce cas, nous exprimons  $V_1$  et  $I_2$  en fonction de  $I_1$  et  $V_2$ .

Sous forme matricielle nous avons :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ou} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Où  $[h]$  est la matrice hybride du quadripôle.

$$h_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2 = 0}$$

$h_{11}$  est l'impédance d'entrée lorsque la sortie du quadripôle est en court-circuit ( $v_2 = 0$ )

$$h_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1 = 0}$$

$h_{12}$  est le gain en tension inverse lorsque l'entrée du quadripôle est ouverte ( $i_1 = 0$ )

$$h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2 = 0}$$

$h_{21}$  est le gain en courant obtenu avec la sortie du quadripôle en court-circuit ( $v_2 = 0$ )

$$h_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1 = 0}$$

$h_{22}$  est l'admittance de sortie lorsque l'entrée du quadripôle est ouverte ( $i_1 = 0$ )

#### II.2.4. Matrice de transfert ou matrice chaîne

Les relations définissant la matrice de transfert T sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

Transfert directe

Ou sous la forme :

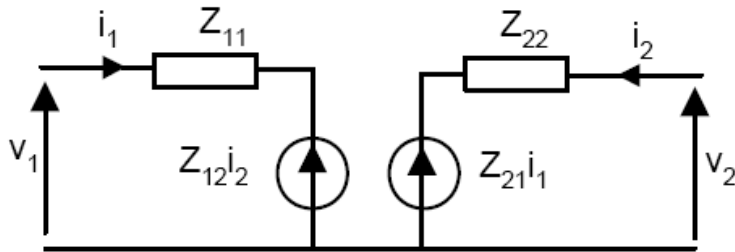
$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{pmatrix}$$

Transfert inverse

**II.3.Schémas équivalents du quadripôle**

C'est la traduction, sous forme de schémas électriques, des équations du quadripôle.

**II.3.1.Paramètres "impédances"**

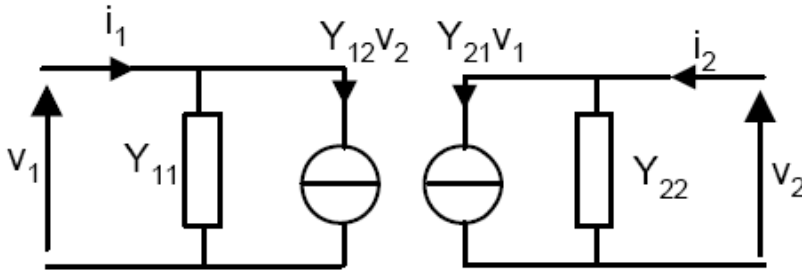


$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

Le circuit équivalent comporte des impédances et des générateurs de tension.

**II.3.2. Paramètres "admittances"**

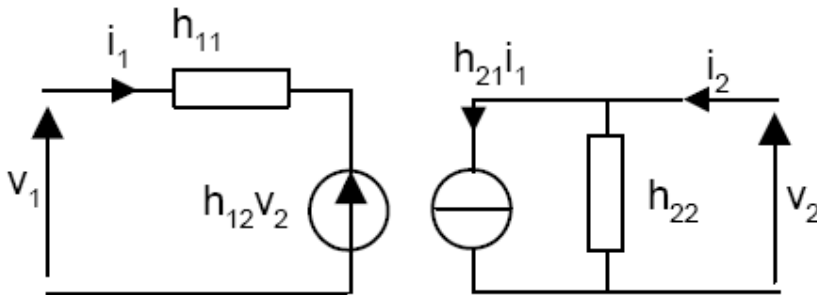


$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$$

Le circuit équivalent comporte des admittances et des générateurs de courant.

**II.3.3. Paramètres "hybrides"**

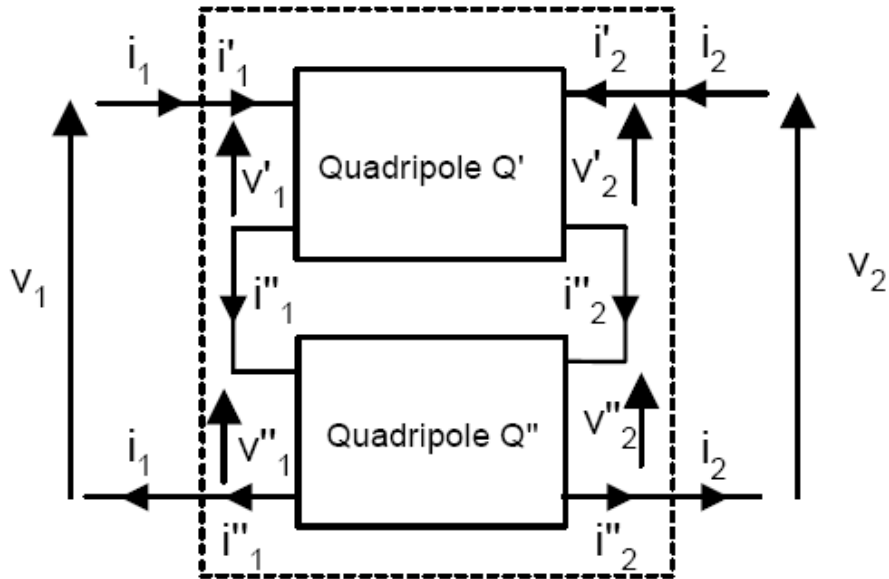


$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$

## II.4. Association de quadripôles

### II.4.1. Association en série de deux quadripôles



On a les relations suivantes :

$$v_1 = v'_1 + v''_1 \quad \text{et} \quad v_2 = v'_2 + v''_2$$

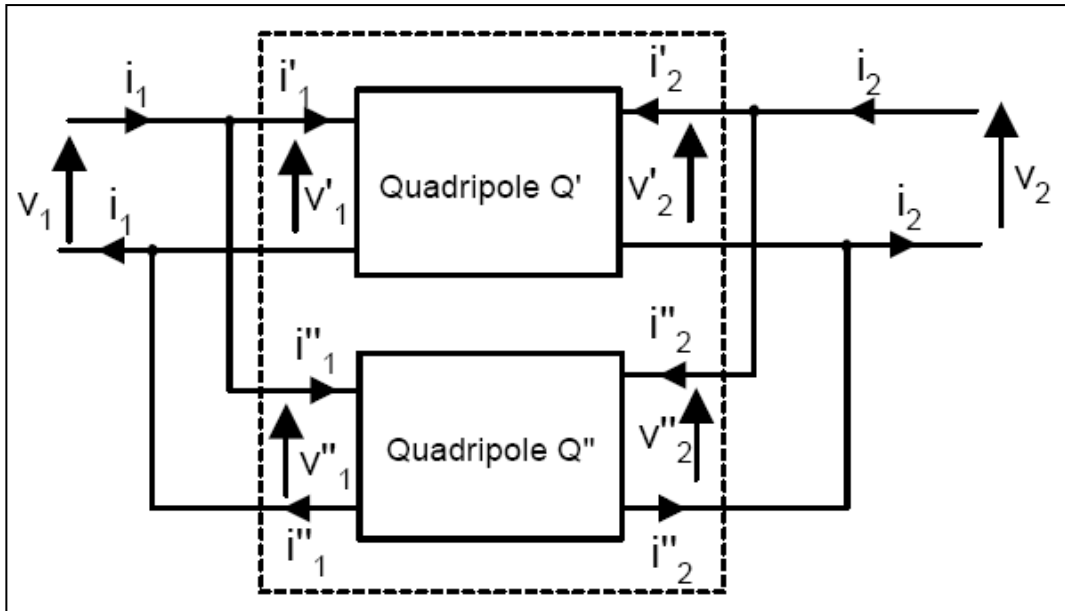
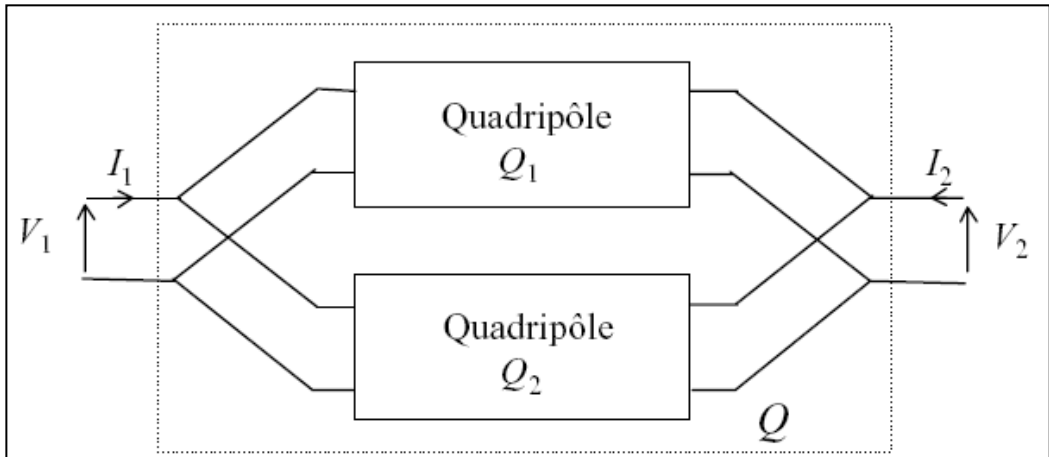
$$\begin{cases} v'_1 = Z'_{11} i'_1 + Z'_{12} i'_2 \\ v'_2 = Z'_{21} i'_1 + Z'_{22} i'_2 \end{cases} \quad Q' \quad \begin{cases} v''_1 = Z''_{11} i''_1 + Z''_{12} i''_2 \\ v''_2 = Z''_{21} i''_1 + Z''_{22} i''_2 \end{cases} \quad Q''$$

Comme  $i_1 = i'_1 = i''_1$  et  $i_2 = i'_2 = i''_2$  nous pouvons écrire les relations suivantes pour le quadripôle équivalent :

$$\begin{cases} v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 = (Z'_{11} + Z''_{11}) i_1 + (Z'_{12} + Z''_{12}) i_2 \\ v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 = (Z'_{21} + Z''_{21}) i_1 + (Z'_{22} + Z''_{22}) i_2 \end{cases}$$

Ainsi sous forme matricielle, la matrice impédance du quadripôle équivalent est égale à la somme des matrices impédances :  $[Z] = [Z'] + [Z'']$

II.4.2. Association parallèle



Dans le cas de l'association en parallèle de deux quadripôles \$Q\_1\$ et de \$Q\_2\$, les tensions sont communes aux deux quadripôles, nous utilisons donc les matrices admittances.

On a les relations suivantes :

$$i_1 = i'_1 + i''_1 \quad \text{et} \quad i_2 = i'_2 + i''_2$$

$$\begin{cases} i'_1 = Y'_{11} v'_1 + Y'_{12} v'_2 \\ i'_2 = Y'_{21} v'_1 + Y'_{22} v'_2 \end{cases} \quad Q' \qquad \begin{cases} i''_1 = Y''_{11} v''_1 + Y''_{12} v''_2 \\ i''_2 = Y''_{21} v''_1 + Y''_{22} v''_2 \end{cases} \quad Q''$$

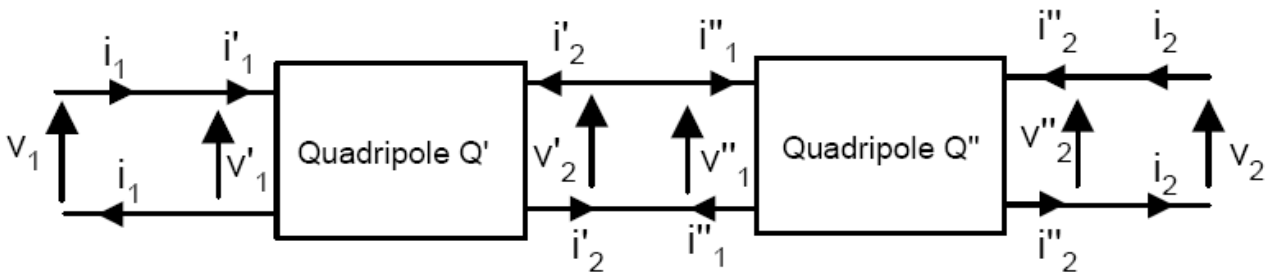
Comme  $v_1 = v'_1 = v''_1$  et  $v_2 = v'_2 = v''_2$  nous pouvons écrire les relations suivantes pour le quadripôle équivalent :

$$\begin{cases} i_1 = Y_{11}v_1 + Y_{12}v_2 = (Y'_{11} + Y''_{11})v_1 + (Y'_{12} + Y''_{12})v_2 \\ i_2 = Y_{21}v_1 + Y_{22}v_2 = (Y'_{21} + Y''_{21})v_1 + (Y'_{22} + Y''_{22})v_2 \end{cases}$$

Ainsi sous forme matricielle, la matrice admittance du quadripôle équivalent est égal à la somme des matrices admittances :

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}'] + [\mathbf{Y}'' ]$$

### II.4.3. Association en cascade



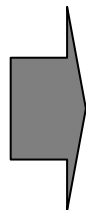
Nous allons chercher à déterminer la matrice de transfert directe du quadripôle résultant de cette association.

Chaque quadripôle est défini par sa matrice de transfert directe :

$$\text{Quadripôle } Q' : \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \quad \text{Quadripôle } Q'' : \mathbf{T}'' = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$$

Dans cette association, nous avons les relations suivantes entre les courants et entre les différences de potentiel :

$$\begin{aligned} i_1 &= i'_1 \\ i''_1 &= -i'_2 \\ i''_2 &= i_2 \\ v_1 &= v'_1 \\ v'_2 &= v''_1 \\ v''_2 &= v_2 \end{aligned}$$



➤ On a donc les relations suivantes pour le premier quadripôle :

$$\begin{aligned} v_1 = v'_1 &= A'v'_2 - B'i'_2 = A'v''_1 + B'i''_1 \\ i_1 = i'_1 &= C'v'_2 - D'i'_2 = C'v''_1 + D'i''_1 \end{aligned}$$

➤ Pour le second quadripôle, nous avons :

$$\begin{aligned} v'_2 = v''_1 &= A''v''_2 - B''i''_2 = A''v_2 - B''i_2 \\ -i'_2 = i''_1 &= C''v''_2 - D''i''_2 = C''v_2 - D''i_2 \end{aligned}$$

D'où :



$$\begin{aligned}v_1 &= A'(A''v''_2 - B''i''_2) + B'(C''v''_2 - D''i''_2) \\i_1 &= C'(A''v''_2 - B''i''_2) + D'(C''v''_2 - D''i''_2)\end{aligned}$$

Ainsi on en déduit les relations entre  $v_1$ ,  $i_1$ ,  $v_2$  et  $i_2$ 

$$\begin{aligned}v_1 &= (A'A'' + B'C'')v_2 - (A'B'' + B'D'')i_2 \\i_1 &= (C'A'' + D'C'')v_2 - (C'B'' + D'D'')i_2\end{aligned} \quad \text{Donc} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} A'A'' + B'C'' & A'B'' + B'D'' \\ C'A'' + D'C'' & C'B'' + D'D'' \end{bmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{T}$  directe du quadripôle Q obtenu par la mise en cascade de deux quadripôles Q' et Q'' est égale au produit matriciel des matrices  $\mathbf{T}'$  et  $\mathbf{T}''$  :

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}'] \cdot [\mathbf{T}'']$$

Si  $\mathbf{T}'$  et  $\mathbf{T}''$  sont des matrices de transfert inverse, la matrice  $\mathbf{T}$  inverse du quadripôle équivalent est égale:  $[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}''] \cdot [\mathbf{T}']$ .

### Résumé Association de deux quadripôles

- Série  $[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}'] + [\mathbf{Z}'']$
- Parallèle  $[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}'] + [\mathbf{Y}'']$
- Cascade  $[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}'] \cdot [\mathbf{T}'']$  Si  $\mathbf{T}'$  et  $\mathbf{T}''$  directe  
 $[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}''] \cdot [\mathbf{T}']$  Si  $\mathbf{T}'$  et  $\mathbf{T}''$  inverse

## II.5. Relations entre matrices

### ➤ Déterminant d'une matrice

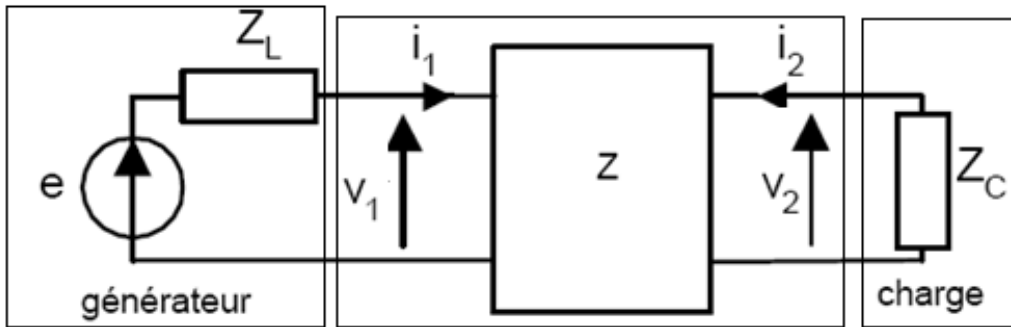
Soit  $[\mathbf{X}]$  une matrice constituée de deux lignes et deux colonnes ; le déterminant de la matrice est obtenu de la façon suivante :

$$[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

Le déterminant est :  $\Delta = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$

	Matrice [Z]	Matrice [Y]	Matrice [h]	Matrice [T]
Matrice [Z]	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\Delta Y} & -\frac{Y_{12}}{\Delta Y} \\ -\frac{Y_{21}}{\Delta Y} & \frac{Y_{11}}{\Delta Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$
Matrice [Y]	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\Delta Z} & -\frac{Z_{12}}{\Delta Z} \\ -\frac{Z_{21}}{\Delta Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta h}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta T}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$
Matrice [h]	$\begin{matrix} \frac{\Delta Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\Delta Y}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta T}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$
Matrice [T]	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & -\frac{1}{Y_{21}} \\ -\frac{\Delta Y}{Y_{21}} & -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta h}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$

## II.6. Grandeurs caractéristiques d'un quadripôle



Les quatre équations qui permettent de déterminer complètement l'état du réseau sont :

$$v_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2 \quad \text{Équation (1)}$$

$$v_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2 \quad \text{Équation (2)}$$

$$e = Z_L i_1 + v_1 \quad \text{Équation (3)}$$

$$v_2 = -Z_C i_2 \quad \text{Équation (4)}$$

Les grandeurs intéressantes sont :

- **Facteur d'amplification en tension du quadripôle.**

$$T_v = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{Ce gain est sans dimension (réel ou complexe)}$$

- **Facteur d'amplification en courant**

$$T_i = \frac{i_2}{i_1}$$

- **Impédance d'entrée**

$$Z_E = \frac{v_1}{i_1}$$

- **Impédance de sortie**

$$Z_S = \frac{v_2}{i_2}$$

Pour étudier le transfert d'énergie d'une part de la source vers le quadripôle et d'autre part du quadripôle vers la charge, il est plus intéressant de calculer les grandeurs caractéristiques du quadripôle non plus en court-circuit ou en circuit ouvert (comme les fournissent les paramètres  $Z$  ou  $Y$ ) mais dans le cas réel qui consiste à connecter le quadripôle aux dipôles de source et de charge.

### II.6.1. Gain en courant

$$T_i = \frac{i_2}{i_1}$$

En combinant les équations (2) et (4), on obtient :

$$-Z_C i_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2$$

D'où :

$$\boxed{T_i = \frac{i_2}{i_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_C + Z_{22}}}$$

Équation (5)

On peut observer que le gain en courant dépend de la charge  $Z_C$

### II.6.2. Gain en tension

$$T_v = \frac{v_2}{v_1}$$



$$T_v = \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_{22} i_2 + Z_{21} i_1}{Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2}$$



$$T_v = \frac{Z_{21} i_1 - Z_{22} \frac{Z_{21}}{Z_C + Z_{22}} i_1}{Z_{11} i_1 - Z_{12} \frac{Z_{21}}{Z_C + Z_{22}} i_1}$$

Après simplification, nous obtenons en posant  $\Delta Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}$  ( $\Delta Z$  est le déterminant de la matrice impédance  $Z$ ):

$$\boxed{T_v = \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_C Z_{21}}{Z_{11} Z_C + \Delta Z}}$$

### II.6.3. Impédance d'entrée

$$Z_E = \frac{v_1}{i_1}$$

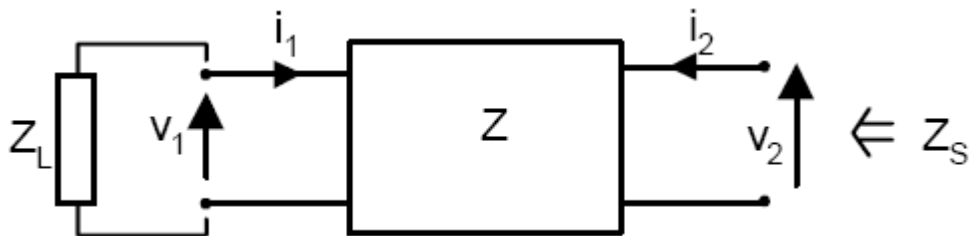
$$(1) \Rightarrow v_1 = Z_{11}i_1 - Z_{12} \frac{Z_{21}}{Z_C + Z_{22}} i_1 = \frac{Z_{11}(Z_C + Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}}{Z_C + Z_{22}} i_1$$

$$Z_E = \frac{v_1}{i_1} = \frac{Z_C Z_{11} + \Delta Z}{Z_C + Z_{22}}$$

### II.6.4. Impédance de sortie

$$Z_S = \frac{v_2}{i_2}$$

C'est l'impédance vue de la sortie du quadripôle obtenue en annulant le générateur à l'entrée du quadripôle. Pour déterminer cette impédance, il convient d'annuler le générateur.



$$(1) \text{ et } (3) \Rightarrow v_1 = -Z_L i_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 \quad \Rightarrow \quad i_1 = -\frac{Z_{12}}{Z_{11} + Z_L} i_2$$

$$(2) \Rightarrow v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 = -\frac{Z_{21} Z_{12} i_2}{Z_{11} + Z_L} + Z_{22} i_2 = \left( \frac{-Z_{21} Z_{12} + Z_{11} Z_{22} + Z_L Z_{22}}{Z_{11} + Z_L} \right) i_2$$

$$Z_S = \frac{v_2}{i_2} = \frac{Z_L Z_{22} + \Delta Z}{Z_{11} + Z_L}$$

## II.7. FILTRES ELECTRIQUES


En régime sinusoïdal permanent, les impédances des bobines et des condensateurs dépendent de la fréquence. Par conséquence, les coefficients des différentes matrices de définition des quadripôles (matrice impédance  $\mathbf{Z}$ , admittance  $\mathbf{Y}$ , hybride  $\mathbf{H}$  ou de transfert  $\mathbf{T}$ ), les fonctions de transfert ( $\mathbf{T}_V$  et  $\mathbf{T}_I$ ) et les impédances d'entrée  $\mathbf{Z}_E$  et de sortie  $\mathbf{Z}_S$  sont aussi dépendantes de la fréquence. Nous allons utiliser cette dépendance pour construire des filtres.

### II.7.1. Définitions

Un filtre est un circuit électronique qui réalise une opération de traitement du signal. Il atténue certaines composantes d'un signal et en laisse passer d'autres. *Le filtre ne modifie pas les fréquences contenu dans le signal d'entrée ( $V_e$ ) ; il agit principalement sur l'amplitude.*

### II.7.2. Fonction de transfert du premier ordre d'un quadripôle linéaire

Soit un réseau linéaire (quadripôles) excité par une entrée sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . L'entrée notée  $e(t)$  qui peut être un courant ou une tension, provoque une réponse forcée. Nous notons  $s(t)$  cette réponse.

$$e(t) = E \sin(\omega t) \text{ et } s(t) = S \sin(\omega t + \phi)$$


Compte tenu des deux grandeurs électriques habituelles, nous pouvons définir quatre transmittances ou fonctions de transfert :

$$\frac{V_2}{V_1}, \quad \frac{I_2}{I_1}, \quad \frac{I_2}{V_1}, \quad \frac{V_2}{I_1}$$

qui représentent respectivement : l'amplification en tension, l'amplification en courant, la trans-admittance et la trans-impédance. D'une façon générale ces fonctions de transfert s'écrivent sous forme complexe :

$$H(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega)$$

Où  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation des signaux électriques et  $f$  leur fréquence.

Les fonctions de transfert s'écrivent également sous une autre forme équivalente :

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} = A(\omega)[\cos(\phi) + j \sin(\phi)]$$

$$A(\omega) = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan(\phi) = \frac{b}{a}$$

$A(\omega)$  est appelé le module de la fonction de transfert et  $\phi(\omega)$  est l'argument ou déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

$$\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| e^{j \arg(\underline{H}(j\omega))} = G(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

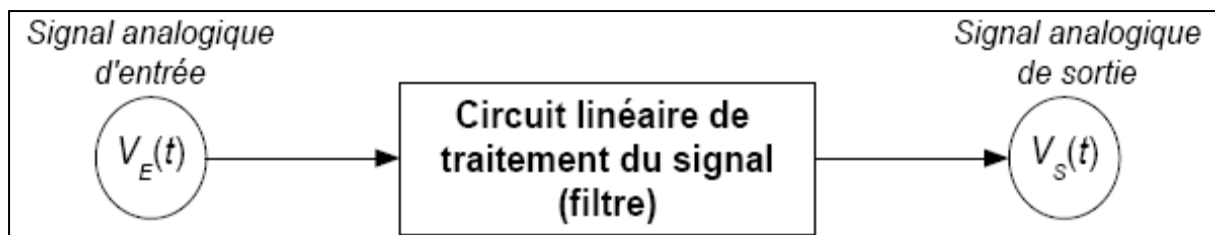
$G(\omega)$  : gain du quadripôle.  
 $\phi(\omega)$  : avance de phase de la sortie sur l'entrée.

Un système est dit du premier ordre si sa fonction de transfert ne contient que des constantes et la première puissance de  $\omega$ .

Un quadripôle est dit linéaire lorsqu'il est constitué uniquement de dipôles et élément de circuit linéaire.

### II.7.3. Diagramme de Bode

Considérons un filtre linéaire.



A partir de la fonction de transfert de ce filtre linéaire (notée  $H(j\omega)$ ), on définit :

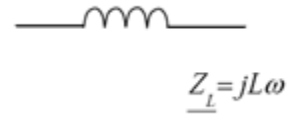
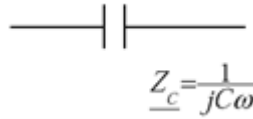
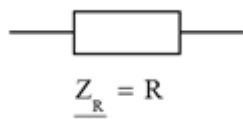
- Le gain en décibels  $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|)$   
(La fonction log désigne ici le logarithme de base 10).
- Le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée :  $\phi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$

Le diagramme de Bode du filtre est la représentation du gain  $G_{dB}(\omega)$  et du déphasage entrée/sortie  $\Phi(\omega)$  en fonction de la pulsation  $\omega$ . En abscisse, les pulsations  $\omega$  sont portées en échelle logarithmique ( $\log_{10}(\omega)$ ). Un diagramme de Bode est en réalité constitué de deux diagrammes : **le diagramme de gain, et le diagramme de phase.**

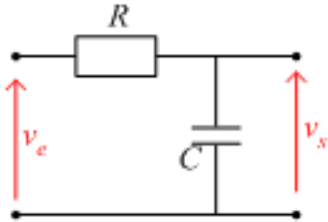
- On commence tout d'abord par déterminer les asymptotes de  $G_{dB}(\omega)$  et  $\Phi(\omega)$  lorsque  $\omega$  tend vers 0, puis lorsque  $\omega$  tend vers l'infini. Pour cela, on cherche un équivalent (ou une limite) de la fonction de transfert  $H(j\omega)$ .

### ➤ IMPEDANCE COMPLEXE

On définit :  $\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}}$



#### • Exemple : circuit R, C



Source :  $v_e = V_e \cos(\omega t + \varphi)$

Charge : circuit ouvert ( $i_s = 0$ )

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \quad (\text{diviseur de tension})$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}. \text{ On pose } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\text{Donc } \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\text{Ainsi, } G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

#### • Diagramme de Bode :

En basse fréquence ( $\omega \ll \omega_0$ ) :

En basse fréquence ( $\omega \ll \omega_0$ ) :

$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) = 1$  donc  $\lim_{\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \rightarrow -\infty} G_{\text{dB}} = 0$ . On a donc une asymptote horizontale en  $-\infty$ .

$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = 0$  donc  $\lim_{\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \rightarrow -\infty} \varphi(\omega) = 0$ . On a aussi une asymptote horizontale.

En haute fréquence ( $\omega \gg \omega_0$ ) :

$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$  donc le module de  $H(j\omega)$  devient un infiniment petit lorsque  $\omega$  tend vers  $+\infty$ .

Dans cette condition, nous pouvons écrire une expression équivalente à  $H(j\omega)$  :

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{j\omega}$$

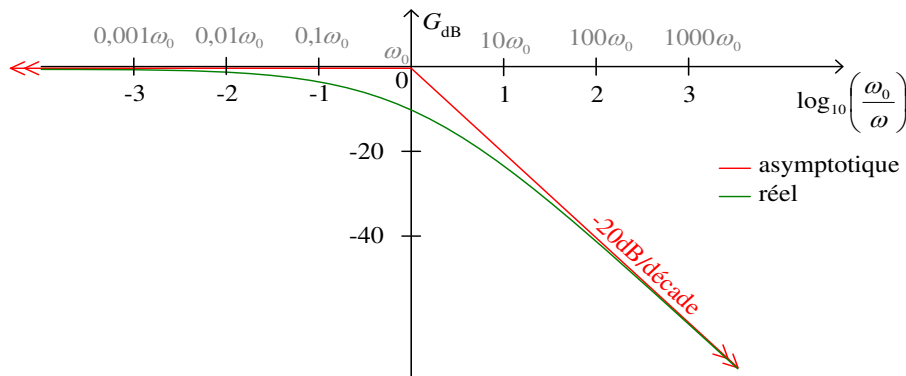
En calculant le module de cette expression approchée de  $H(j\omega)$ , on en déduit que :

$$G_{dB}(\omega) \approx 20 \cdot \log(\omega_0) - \underbrace{20 \cdot \log(\omega)}_x$$

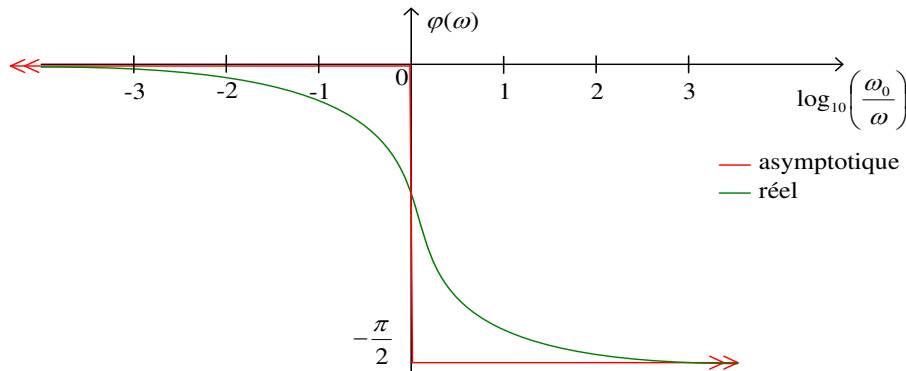
En posant  $x = \log(\omega)$   $Y(x) \approx 20 \cdot \log(\omega_0) - 20 \cdot x$

La droite asymptotique croît en fonction de la pulsation avec une pente de  $-20\text{dB/décade}$ .

$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ . On a donc une asymptote horizontale en  $+\infty$



$$G(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{dB}(\omega_0) = -3\text{dB}$$



$$\varphi(\omega_0) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$$

### II.7.4. Différentes types de filtres

Il existe différentes catégories de filtres selon l'allure de leur courbe de réponse en fréquence :

#### a) Le filtre passe haut

Le filtre passe haut laisse passer les hautes fréquences. Le filtre passe haut atténue les basses fréquences.

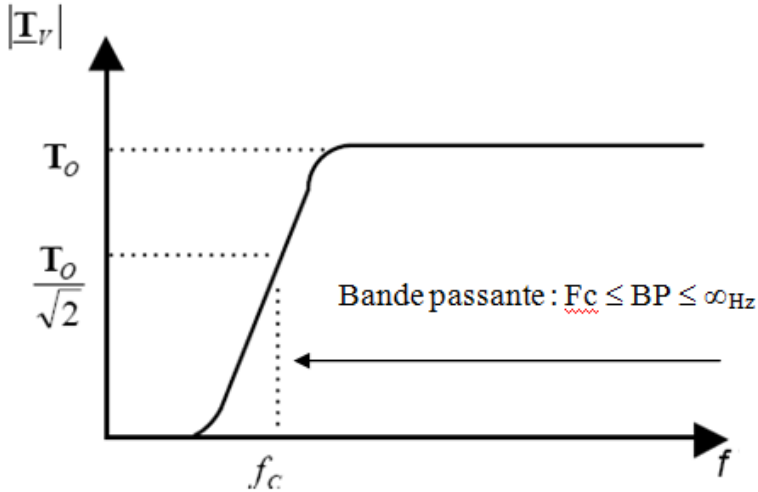
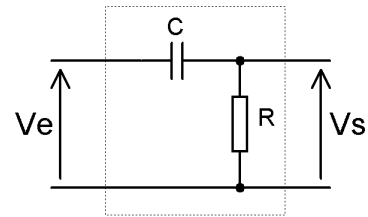


Schéma électrique :



#### b) Le filtre passe bas

Le filtre passe bas laisse passer les basses fréquences. Le filtre passe bas atténue les hautes fréquences.

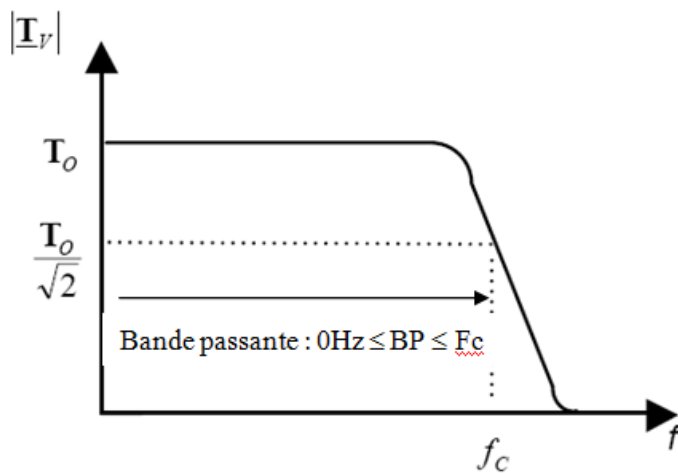
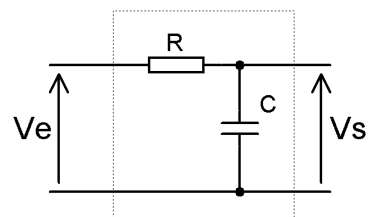
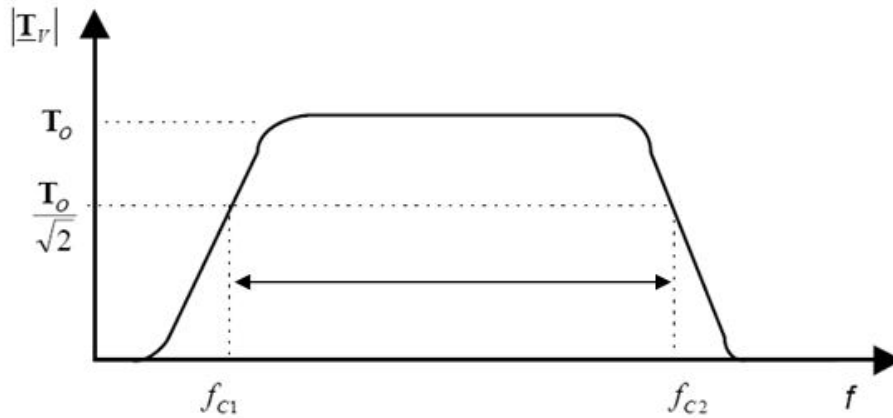


Schéma électrique :



### c) Le filtre passe bande

Ce filtre laisse passer la bande de fréquences entre  $F_{c1}$  et  $F_{c2}$ . Le gain maximum se fait à  $F = F_0$ .

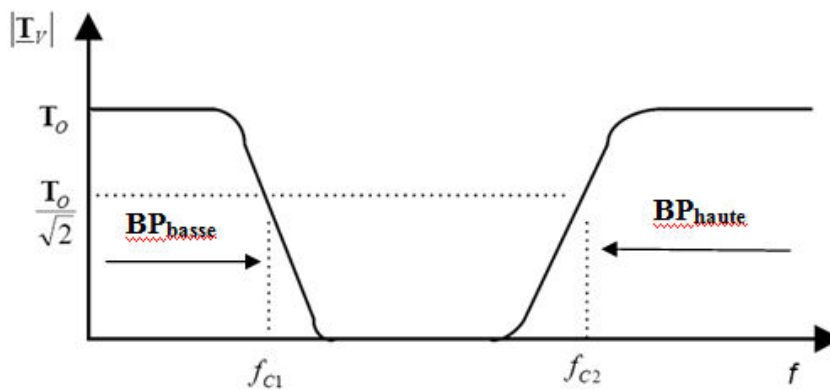


$F_{c1}$  : Fréquence de coupure basse  
 $F_{c2}$  : Fréquence de coupure haute

Bande passante :  $F_{c1} \leq BP \leq F_{c2}$

### d) Filtre coupe-bande

Ce filtre laisse passer les fréquences basses inférieures à  $F_{c1}$  et les fréquences hautes supérieures à  $F_{c2}$ . Le gain minimum se fait à  $F = F_0$ .



$F_{c1}$  : Fréquence de coupure basse

Bande passante :  $0\text{Hz} \leq BP_{\text{basse}} \leq F_{c1}$

$F_{c2}$  : Fréquence de coupure haute

et  $F_{c2} \leq BP_{\text{haute}} \leq \infty\text{Hz}$