CHAPITRE 4 – INTERPOLATION POLYNOMIALE

1. INTRODUCTION

L'interpolation consiste à remplacer une fonction qui est soit imparfaitement connue (connue uniquement en un ensemble de points) soit trop compliquée, ce qui rend sa manipulation difficile ou malaisée, par une fonction approchée plus simple à traiter.

2. INTERPOLATION POLYNOMIALE

Soit une fonction dont on ne connaît les valeurs que pour un ensemble de $(n+1)$ points $\{x_o,\ x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n\}$, $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$.

L'interpolation polynômiale consiste à déterminer un polynôme p_n de degré inférieur ou égal à n passant par les points $\left(x_i\ ,\ f(x_i)\right)$, $i = \overline{0,n}$. C'est-à-dire vérifiant $p_n(x_i) = f(x_i)$,$\forall\ i = \overline{0,n}$.

p_n est appelé polynôme d'interpolation de f (ou polynôme interpolant f) basé sur les points $\{x_o,\ x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n\}$.

Existence et unicité du polynôme d'interpolation

Une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité du polynôme d'interpolation p_n est que les abscisses $\{x_o,\ x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n\}$ soient toutes distinctes.

3. DETERMINATION DU POLYNOME D'INTERPOLATION

3.1. METHODE DES COEFFICIENTS INDETERMINES

On cherche à déterminer le polynôme

$$p_n(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

interpolant f aux points x_i , $i = \overline{0,n}$, tel que $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$, sont connues. Le polynôme p_n doit vérifier :

$$p_n(x_i) = y_i \ , \qquad i = \overline{0,n}$$

Ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} a_o + a_1 x_o + a_2 x_o^2 + \cdots + a_n x_o^n = y_o \\ a_o + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_o + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Ecrivons ce système sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & x_o & x_o^2 & \dots & x_o^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_o \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A.\alpha = Y$$

Où $A = \begin{pmatrix} 1 & x_o & x_o^2 & \dots & x_o^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$ est dite matrice de Vandermonde.

$\alpha = \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ Vecteur des coefficients à déterminer.

$Y = \begin{pmatrix} y_o \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ Vecteur de sortie (ou vecteur du second membre).

Le vecteur des coefficients inconnus α peut être obtenu en multipliant l'équation précédente par A^{-1}, matrice inverse de A,

$\alpha = A^{-1}.Y$

Pour que α existe et soit unique, A^{-1} doit exister, donc son déterminant Δ doit être non nul

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 & \dots & x_o^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

C'est un déterminant de Vandermonde. On montre que

$$\Delta = \prod_{i=0}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(x_j - x_i)\right)$$

$\Delta \neq 0$ si et seulement si les x_i , $i = \overline{0, n}$, sont distincts.

Exemples du déterminant de Vandermonde

Pour $n = 1 \rightarrow \Delta = (x_1 - x_o)$.

Pour $n = 2 \rightarrow \Delta = (x_1 - x_o)(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)$.

Pour $n = 3 \rightarrow \Delta = (x_1 - x_o)(x_2 - x_o)(x_3 - x_o)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

EXEMPLE

Soit la fonction f donnée par le tableau suivant

x	$x_o = 1$	$x_1 = 2$
$f(x)$	$y_o = 2$	$y_1 = 6$

Le polynôme d'interpolation de f s'écrit

$p_1(x) = a_o + a_1 x$

Il vérifie

$$\begin{cases} p_1(x_o) = y_o \\ p_1(x_1) = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_o + a_1 x_o = y_o \\ a_o + a_1 x_1 = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_o \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_o \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & x_o \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_o$$

Application numérique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \end{pmatrix} = A^{-1} Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Donc

$p_1(x) = -2 + 4x$

Vérification

$p_1(1) = -2 + 4 = 2$

$p_1(2) = -2 + 8 = 6$

On peut calculer une approximation de $f(1.5)$

$f(1.5) \approx p_1(1.5) = -2 + 4 \times 1.5 = 4$

3.2. METHODE DE LAGRANGE

Définition

On appelle *polynôme caractéristique de Lagrange* d'indice k associé aux points $\{x_o, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ le polynôme suivant

$$L_k(x) = \frac{(x - x_o)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_o)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Remarques

1- Le numérateur de L_k est le produit de tous les facteurs $(x - x_i)$ sauf $(x - x_k)$.

2- Le dénominateur de L_k est le produit de tous les facteurs $(x_k - x_i)$ avec $i \neq k$.

3- Le polynôme L_k est de degré n et vérifie les propriétés suivantes

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 \ si \ i = k \\ 0 \ si \ i \neq k \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{n} L_k(x_i) = 1 \ ; \quad \sum_{k=0}^{n} L_k(x_i) = 1$$

Polynôme d'interpolation de Lagrange

Le polynôme d'interpolation de f aux points $\{x_o,\ x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n\}$ est donnée par

$$\boldsymbol{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k) = L_o(x) f(x_o) + L_1(x) f(x_1) + \cdots + L_n(x) f(x_n)}$$

On peut vérifier que $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$. En effet

$$p_n(x_i) = L_o(x_i) f(x_o) + L_1(x_i) f(x_1) + \cdots + L_i(x_i) f(x_i) + \cdots + L_n(x_i) f(x_n)$$

Mais on sait que $L_o(x_i) = L_1(x_i) = \cdots = L_n(x_i) = 0$ sauf $L_i(x_i) = 1$, d'où

$$p_n(x_i) = 0 \times f(x_o) + 0 \times f(x_1) + \cdots + 1 \times f(x_i) + \cdots + 0 \times f(x_n) = f(x_i)$$

Donc le polynôme p_n défini par la formule précédente est effectivement le polynôme d'interpolation de f aux points $\{x_o,\ x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n\}$.

Remarque

Lorsque on a plusieurs fonctions à interpoler et qui sont définies sur les mêmes abscisses x_i (ils diffèrent uniquement sur les y_i), les polynômes caractéristiques de Lagrange sont calculés une fois pour toute car ils ne dépendent que des x_i .

Exemple

Considérons la fonction f donnée par le tableau suivant

x	$x_o = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$
$f(x)$	$f(x_o) = 2$	$f(x_1) = 6$	$f(x_2) = -2$

1- Déterminons le polynôme de Lagrange de degré 1 passant par les 2 premiers points.

$$L_o(x) = \frac{x - x_1}{x_o - x_1} = -x + 2 \quad ; \quad L_1(x) = \frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = x - 1$$

$$p_1(x) = L_o(x) f(x_o) + L_1(x) f(x_1) = 2(-x + 2) + 6(x - 1) = 4x - 2$$

2- Déterminons le polynôme de Lagrange de degré 2 passant par les 3 points.

$$L_o(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_o - x_1)(x_o - x_2)} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_o)(x - x_2)}{(x_1 - x_o)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(1)(-1)} = -(x^2 - 4x + 3)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_o)(x - x_1)}{(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(2)(1)} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$$

$p_2(x) = L_o(x)f(x_o) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$

$\quad = (x^2 - 5x + 6) - 6(x^2 - 4x + 3) - (x^2 - 3x + 2)$

$p_2(x) = -6x^2 + 22x - 14$

Vérification

$p_2(1) = -6 + 22 - 14 = 2$

$p_2(2) = -24 + 44 - 14 = 6$

$p_2(3) = -54 + 66 - 14 = -2$

3.3. METHODE DE NEWTON

Définition

Soit une fonction f connue en $(n+1)$ abscisses distinctes $\{x_o,\ x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n\}$.

On définit les *différences divisées* (d.d) de f par les relations suivantes :

$f[x_i] = f(x_i) \quad d.d\ d'ordre\ 0\ de\ f\ au\ point\ x_i$

$f[x_i\,, x_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad d.d\ d'ordre\ 1\ de\ f\ aux\ points\ x_i\,, x_{i+1}$

$f[x_i\,, x_{i+1}\,, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}\,, x_{i+2}] - f[x_i\,, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \quad d.d\ d'ordre\ 2\ de\ f\ aux\ points\ x_i\,, x_{i+1}\,, x_{i+2}$

D'une façon générale, on définit les d.d d'ordre p de f aux points $x_i\,, x_{i+1}\,, \ldots, x_{i+p}$ par

$$f\left[x_i\,, x_{i+1}\,, \ldots, x_{i+p-1}\,, x_{i+p}\right] = \frac{f\left[x_{i+1}\,, \ldots, x_{i+p}\right] - f\left[x_i\,, \ldots, x_{i+p-1}\right]}{x_{i+p} - x_i}$$

Remarques

1- Les d.d d'ordre k sont calculées à partir des d.d d'ordre $k-1$.

2- Les d.d sont invariantes par toute permutation des x_i .

Exemple

Méthode pratique pour le calcul des d.d : ***Table des d.d***

x	$x_o = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$
$f(x)$	$f(x_o) = 0$	$f(x_1) = 2$	$f(x_2) = 6$	$f(x_3) = -2$

x_i	$f(x_i) = f[x_i]$	$f[x_i\ , x_{i+1}]$	$f[x_i\ , x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i\ , x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
$x_o = 0$	$f(x_o) = 0$			
		$f[x_o\ , x_1] = \frac{2-0}{1-0} = 2$		
$x_1 = 1$	$f(x_1) = 2$		$f[x_o\ , x_1, x_2] = \frac{4-2}{2-0} = 1$	
		$f[x_1\ , x_2] = \frac{6-2}{2-1} = 4$		$f[x_o\ , x_1, x_2, x_3] = \frac{-6-1}{3-0} = \frac{-7}{3}$
$x_2 = 2$	$f(x_2) = 6$		$f[x_1\ , x_2, x_3] = \frac{-8-4}{3-1} = -6$	
		$f[x_2\ , x_3] = \frac{-2-6}{3-2} = -8$		
$x_3 = 3$	$f(x_3) = -2$			

Polynôme d'interpolation de Newton

La forme de Newton du polynôme d'interpolation d'une fonction f aux points $\{x_o,\ x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n\}$ est donnée par

$$p_n(x) = a_o + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_o)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

On peut vérifier que p_n est un polynôme de degré n.

On cherche à déterminer les coefficients $a_o,\ a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n$ tel que $p_n(x_i) = f(x_i)\ ,\ i = \overline{0,n}$

Pour $i = 0$

$$p_n(x_o) = f(x_o) \Leftrightarrow a_o = f(x_o) = f[x_o] \qquad d.d\ d'ordre\ 0\ de\ f\ en\ x_o$$

Pour $i = 1$

$$p_n(x_1) = f(x_1) \Leftrightarrow a_o + a_1(x_1 - x_o) = f(x_1) \Leftrightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - a_o}{x_1 - x_o} = \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o} = f[x_o\ , x_1]$$

$$d.d\ d'ordre\ 1\ de\ f\ en\ x_o\ , x_1$$

De la même façon, on montre que

$a_2 = f[x_o\ , x_1\ \ , x_2]$

$\vdots$

$a_n = f[x_o\ , x_1\ \ , \dots, x_n]$

Exemple

Considérons la fonction f donnée par le tableau suivant

x	$x_o = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$
$f(x)$	$f(x_o) = 2$	$f(x_1) = 6$	$f(x_2) = -2$

Déterminons le polynôme de Newton de degré 2 passant par les 3 points.

$$\begin{array}{lllll}
x_o = 1 \quad f(x_o) = 2 = \boldsymbol{a_o} & & & & \\
 & f[x_o\,, x_1] = \frac{6-2}{2-1} = 4 = \boldsymbol{a_1} & & & \\
x_1 = 2 \quad f(x_1) = 6 & & f[x_o\,, x_1, x_2] = \frac{-8-4}{3-1} = -6 = \boldsymbol{a_2} & & \\
 & f[x_1\,, x_2] = \frac{-2-6}{3-2} = -8 & & & \\
x_2 = 3 \quad f(x_2) = -2 & & & &
\end{array}$$

$p_2(x) = a_o + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)(x - x_1)$

Avec $a_o = f(x_o) = 2$

$a_1 = f[x_o\,, x_1] = 4$

$a_2 = f[x_o\,, x_1\,, x_2] = -6$

Donc

$p_2(x) = 2 + 4(x-1) - 6(x-1)(x-2) = 2 + 4x - 4 - 6x^2 + 18x - 12 = -6x^2 + 22x - 14$

Si on rajoute un 4$^{\text{ème}}$ point, il suffit de compléter la table des d.d.

Déterminons le polynôme de Newton de degré 3 passant par les 4 points.

x	$x_o = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$
$f(x)$	$f(x_o) = 2$	$f(x_1) = 6$	$f(x_2) = -2$	$f(x_3) = 8$

Pour cela, complétons la table des d.d précédente.

$$\begin{array}{llll}
x_o = 1 \quad f(x_o) = 2 = \boldsymbol{a_o} & & & \\
 & 4 = \boldsymbol{a_1} & & \\
x_1 = 2 \quad f(x_1) = 6 & & -6 = \boldsymbol{a_2} & \\
 & -8 & & \frac{\mathbf{9-(-6)}}{\mathbf{4-1}} = \mathbf{5} = \boldsymbol{a_3} \\
x_2 = 3 \quad f(x_2) = -2 & & \frac{\mathbf{10-(-8)}}{\mathbf{4-2}} = \mathbf{9} & \\
 & \frac{\mathbf{8-(-2)}}{\mathbf{4-3}} = \mathbf{10} & & \\
\boldsymbol{x_2 = 4} \quad \boldsymbol{f(x_3) = 8} & & &
\end{array}$$

Le polynôme de Newton s'écrit alors

$p_3(x) = a_o + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)(x - x_1) + a_3(x - x_o)(x - x_1)(x - x_2)$

Avec $a_o = 2\,;\; a_1 = 4\,;\; a_2 = -6\,;\; a_3 = 5$

$p_3(x) = -6x^2 + 22x - 14 + 5(x-1)(x-2)(x-3)$

$p_3(x) = -6x^2 + 22x - 14 + 5(x^2 - 3x + 2)(x-3)$

$p_3(x) = 5x^3 - 36x^2 + 77x - 44$

Vérification

$p_3(1) = 5 - 36 + 77 - 44 = 2$

$p_3(2) = 5 \times 8 - 36 \times 4 + 77 \times 2 - 44 = 6$

$p_3(3) = 5 \times 27 - 36 \times 9 + 77 \times 3 - 44 = -2$

$p_3(4) = 5 \times 64 - 36 \times 16 + 77 \times 4 - 44 = 8$

3.4. MAJORATION DE L'ERREUR

On suppose que la fonction f est $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.

On montre que

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \quad avec \quad M_{n+1} = \max_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Où $f^{(n+1)}$ est la dérivée d'ordre $(n+1)$ de f.