CORRIGE DE LA SERIE DE TD Nº 3

EXERCICE 1

Solution analytique d'équations différentielles

1. $\boldsymbol{y'(t)y(t) + t = 0}$

Séparation des variables

$$yy' = -t \Leftrightarrow y\frac{dy}{dt} = -t \Leftrightarrow ydy = -tdt$$

Intégration

$$\int ydy = -\int tdt \Leftrightarrow \frac{y^2(t)}{2} = -\frac{t^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow y^2(t) = -t^2 + C$$

Où C_1 et C sont des constantes avec $C = 2C_1$.

On aura

$$\boldsymbol{y(t) = \pm\sqrt{-t^2 + C}}$$

2. $\begin{cases} \boldsymbol{y'(t) - y(t) = 2} \\ \boldsymbol{y(0) = 0} \end{cases}$

Séparation des variables

$$\frac{dy}{dt} = y + 2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y+2} = dt$$

Intégration

$$\int \frac{dy}{y+2} = \int dt \Leftrightarrow ln(y+2) = t + C_1 \Leftrightarrow y(t) + 2 = e^{t+C_1} = e^{C_1}e^t = Ce^t$$

Où C_1 et C sont des constantes avec $C = e^{C_1}$.

On aura

$$\boldsymbol{y(t) = Ce^t - 2}$$

Déterminons à présent une *solution particulière* vérifiant la condition initiale

$$y(0) = C - 2 = 0 \Rightarrow C = 2$$

D'où

$$\boldsymbol{y(t) = 2(e^t - 1)}$$

EXERCICE 2

4 itérations de la méthode d'Euler avec un pas $\boldsymbol{h = 0.1}$

Algorithme d'Euler pour la résolution d'une équation différentielle de la forme $\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases} \qquad avec\ \ t_o, y_o\ et\ h\ \ donnés$$

1. $\begin{cases} \boldsymbol{y'(t) = t.sin(y(t))} \\ \boldsymbol{y(0) = 2} \end{cases}$

Il faudra calculer les 4 premiers termes de la suite

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h.t_i.sin(y_i) \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

$avec\ \ t_o = 0\ , y_o = 2\ , h = 0.1$

<u>1ère itération</u>

$$\begin{cases} y_1 = y_o + h.t_o.sin(y_o) = 2 + 0.1 \times 0 \times sin(2) = 2 \\ t_1 = t_o + h = 0 + 0.1 = 0.1 \end{cases}$$

<u>2ème itération</u>

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + h.t_1.sin(y_1) = 2 + 0.1 \times 0.1 \times sin(2) = 2.0091 \\ t_2 = t_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2 \end{cases}$$

<u>3ème itération</u>

$$\begin{cases} y_3 = y_2 + h.t_2.sin(y_2) = 2.0091 + 0.1 \times 0.2 \times sin(2.0091) = 2.0272 \\ t_3 = t_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3 \end{cases}$$

<u>4ème itération</u>

$$\begin{cases} y_4 = y_3 + h.t_3.sin(y_3) = 2.0272 + 0.1 \times 0.3 \times sin(2.0272) = 2.0541 \\ t_4 = t_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4 \end{cases}$$

Le tableau ci-dessous résume les résultats précédents.

i	t_i	y_i
1	0.1	2
2	0.2	2.0091
3	0.3	2.0272
4	0.4	2.0541

2. $\begin{cases} \boldsymbol{y'(t) = t^2 + y^2(t) + 1} \\ \boldsymbol{y(1) = 0} \end{cases}$

Algorithme $\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(t_i + y_i^2 + 1) \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$

$avec\ \ t_o = 1\ , y_o = 0\ , h = 0.1$

Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus.

i	t_i	y_i
1	0.1	0.2
2	0.2	0.425
3	0.3	0.6871
4	0.4	1.0033

EXERCICE 3

$$\begin{cases} \boldsymbol{y'(t) = -y(t) + t - 2} \\ \boldsymbol{y(0) = 1} \end{cases}$$

<u>1. Solution analytique</u>

<u>Solution de l'équation homogène</u>

$$y' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = -y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -dt \Leftrightarrow ln(y) = -t + C_1 \Leftrightarrow y(t) = e^{-t+C_1} = e^{C_1}e^{-t} = Ce^{-t}$$

On aura

$y_1(t) = Ce^{-t}$

<u>Solution particulière de l'équation non homogène</u>

On cherche une solution de la forme $y(t) = at + b$ où $a\ et\ b$ sont à déterminer.

$$y' + y = t - 2 \Leftrightarrow a + at + b = t - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

D'où $y_2(t) = t - 3$

<u>Solution générale</u>

$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = Ce^{-t} + t - 3$

Détermination de C

$y(0) = C - 3 = 1 \Leftrightarrow C = 4$

Finalement

$\boldsymbol{y(t) = 4e^{-t} + t - 3}$

<u>2. Estimation de $y(0.1)$ par la méthode d'Euler.</u>

Algorithme $\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(-y_i + t_i - 2) \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$

$avec\ \ t_o = 0\ , y_o = 1$

<u>Pour $h = 0.1$</u>

Il suffit de faire une seule itération.

$$\begin{cases} y_1 = y_o + h(-y_o + t_o - 2) = 1 + 0.1(-1 + 0 - 2) = 0.7 \\ t_1 = t_o + h = 0 + 0.1 = 0.1 \end{cases}$$

Valeur exacte : $y(0.1) = 4e^{-0.1} + 0.1 - 3 = 0.7193$

Erreur absolue : $E_a = |0.7193 - 0.7| = 0.0193$

Erreur relative : $E_r = \frac{0.0193}{0.7193} = 0.0268 = 2.68\ \%$

<u>Pour $h = 0.05$</u>

Il faudra faire 2 itérations.

1ère itération

$$\begin{cases} y_1 = y_o + h(-y_o + t_o - 2) = 1 + 0.05(-1 + 0 - 2) = 0.85 \\ t_1 = t_o + h = 0 + 0.05 = 0.05 \end{cases}$$

2ème itération

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + h(-y_1 + t_1 - 2) = 0.85 + 0.05(-0.85 + 0.05 - 2) = \mathbf{0.71} \\ t_2 = t_1 + h = 0.05 + 0.05 = \mathbf{0.1} \end{cases}$$

Erreur absolue : $E_a = |0.7193 - 0.71| = 0.0093$

Erreur relative : $E_r = \frac{0.0093}{0.7193} = 0.0129 = 1.29\ \%$

Pour $h = 0.025$

Il faudra faire 4 itérations. Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus.

i	t_i	y_i
1	0.025	0.925
2	0.05	0.8525
3	0.075	0.7824
4	**0.1**	**0.7147**

Erreur absolue : $E_a = |0.7193 - 0.7147| = 0.0046$

Erreur relative : $E_r = \frac{0.0046}{0.7193} = 0.0064 = 0.64\ \%$

Le tableau suivant récapitule les résultats pour les différentes valeurs du pas d'intégration h.

h	E_a	E_r
0.1	0.0193	2.68 %
0.05	0.0093	1.29 %
0.025	0.0046	0.64 %

Les résultats montrent que plus le pas d'intégration h est petit, plus l'erreur diminue et la méthode est plus précise.

EXERCICE 4

$$\begin{cases} \boldsymbol{y'(t) = y(t) + e^{2t}} \\ \boldsymbol{0 \le t \le 1} \\ \boldsymbol{y(0) = 2} \end{cases}$$

1. Résolution numérique de l'équation

Avec un pas $h = 0.5$ et $0 \le t \le 1$, il faudra donc calculer les valeurs approchées de $y(0.5)$ et $y(1)$, c'est-à-dire faire 2 itérations pour chaque méthode utilisée.

Méthode d'Euler

Algorithme $\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(y_i + e^{2t_i}) \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$

$avec\ \ t_o = 0\,, y_o = 2\,, h = 0.5$

i	t_i	y_i
1	0.5	3.5
2	1	6.6091

Méthode RK2

$$\text{Algorithme}\begin{cases} K_1 = hf(t_i, y_i) = h(y_i + e^{2t_i}) \\ K_2 = hf(t_i + h, y_i + K_1) = h\left(y_i + K_1 + e^{2(t_i+h)}\right) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

$avec\ \ t_o = 0\ , y_o = 2\ , h = 0.5$

1ère itération

$$\begin{cases} K_1 = h(y_o + e^{2t_o}) = 0.5(2+1) = 1.5 \\ K_2 = h\left(y_o + K_1 + e^{2(t_o+h)}\right) = 0.5\left(2 + 1.5 + e^{2(0.5)}\right) = 3.1091 \\ y_1 = y_o + \dfrac{1}{2}(K_1 + K_2) = 2 + \dfrac{1}{2}(1.5 + 3.1091) = \mathbf{4.3045} \\ t_1 = t_o + h = 0 + 0.5 = \mathbf{0.5} \end{cases}$$

2ème itération

$$\begin{cases} K_1 = h(y_1 + e^{2t_1}) = 0.5(4.3045 + e^{1}) = 3.5114 \\ K_2 = h\left(y_1 + K_1 + e^{2(t_1+h)}\right) = 0.5(4.3045 + 3.5114 + e^{2}) = 7.6025 \\ y_2 = y_1 + \dfrac{1}{2}(K_1 + K_2) = 4.3045 + \dfrac{1}{2}(3.5114 + 7.6025) = \mathbf{9.8614} \\ t_2 = t_1 + h = 0.5 + 0.5 = \mathbf{1} \end{cases}$$

i	t_i	y_i
1	0.5	4.3045
2	1	9.8614

Méthode RK4

$$\text{Algorithme}\begin{cases} K_1 = hf(t_i, y_i) = h(y_i + e^{2t_i}) \\ K_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right) = h\left(y_i + \frac{K_1}{2} + e^{2\left(t_i + \frac{h}{2}\right)}\right) \\ K_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right) = h\left(y_i + \frac{K_2}{2} + e^{2\left(t_i + \frac{h}{2}\right)}\right) \\ K_4 = hf(t_i + h, y_i + K_3) = h\left(y_i + K_3 + e^{2(t_i+h)}\right) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

$avec\ \ t_o = 0\ , y_o = 2\ , h = 0.5$

1ère itération

$$\begin{cases} K_1 = h(y_o + e^{2t_o}) = 0.5(2+1) = 1.5 \\ K_2 = h\left(y_o + \dfrac{K_1}{2} + e^{2\left(t_o + \frac{h}{2}\right)}\right) = 0.5\left(2 + \dfrac{1.5}{2} + e^{2\left(\frac{0.5}{2}\right)}\right) = 2.1994 \\ K_3 = h\left(y_o + \dfrac{K_2}{2} + e^{2\left(t_o + \frac{h}{2}\right)}\right) = 0.5\left(2 + \dfrac{2.1994}{2} + e^{2\left(\frac{0.5}{2}\right)}\right) = 2.3742 \\ K_4 = h\left(y_o + K_3 + e^{2(t_o+h)}\right) = 0.5\left(2 + 2.3742 + e^{2(0.5)}\right) = 3.5462 \\ y_1 = 2 + \dfrac{1}{6}(1.5 + 2(2.1994 + 2.3742) + 3.5462) = \mathbf{4.3656} \\ t_1 = \mathbf{0.5} \end{cases}$$

2^ème^ itération

$$\begin{cases} K_1 = h(y_1 + e^{2t_1}) = 0.5(4.3656 + e^{2\times 0.5}) = 3.5419 \\ K_2 = h\left(y_1 + \frac{K_1}{2} + e^{2\left(t_1+\frac{h}{2}\right)}\right) = 0.5\left(4.3656 + \frac{3.5419}{2} + e^{2\left(0.5+\frac{0.5}{2}\right)}\right) = 5.3091 \\ K_3 = h\left(y_1 + \frac{K_2}{2} + e^{2\left(t_1+\frac{h}{2}\right)}\right) = 0.5\left(4.3656 + \frac{5.3091}{2} + e^{2\left(0.5+\frac{0.5}{2}\right)}\right) = 5.7509 \\ K_4 = h\left(y_1 + K_3 + e^{2(t_1+h)}\right) = 0.5\left(4.3656 + 5.7509 + e^{2(0.5+0.5)}\right) = 8.7528 \\ y_2 = 4.3656 + \frac{1}{6}(3.5419 + 2(5.3091 + 5.7509) + 8.7528) = \mathbf{10.1014} \\ t_2 = \mathbf{1} \end{cases}$$

i	t_i	y_i
1	0.5	4.3656
2	1	10.1014

2. Comparaison des résultats obtenus avec les valeurs exactes

Valeurs exactes

$y(0.5) = e^{0.5}(1 + e^{0.5}) = 4.3670$

$y(1) = e^1(1 + e^1) = 10.1073$

Le tableau ci-dessous donne les erreurs relatives obtenues pour les 3 méthodes.

i	t_i	E_r $Euler$	E_r RK_2	E_r RK_4
1	0.5	19.85 %	1.43 %	0.03 %
2	1	34.61 %	2.43 %	0.06 %

Classement des méthodes par ordre de précision croissante : Euler, RK2, RK4.