CORRIGE (EXAMEN + TEST) DE METHODES NUMERIQUES

EXERCICE 1 (6.5)

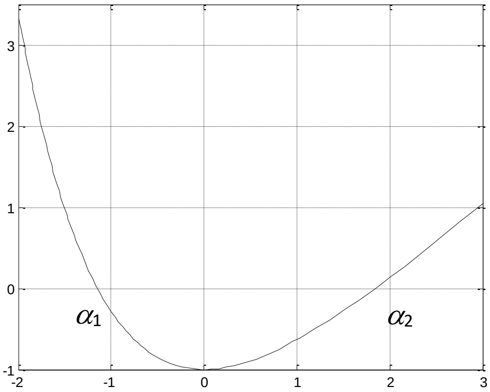
On considère l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = e^{-x} + x - 2$

1. *Séparation des racines* 2

Méthode 1

$f'(x) = -e^{-x} + 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$



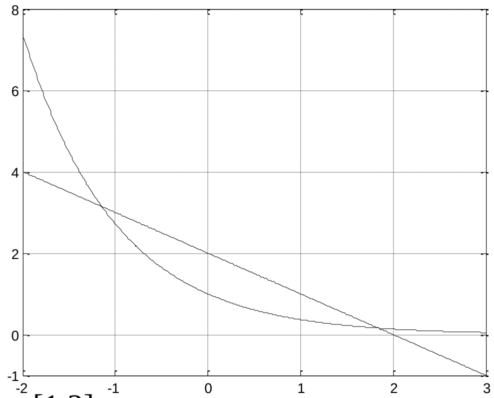
$f(-2) \approx 3.39$; $f(-1) \approx -0.28$; $f(1) \approx -0.63$; $f(2) \approx 0.14$

Le graphe de f possède 2 points d'intersection avec l'axe x, donc l'équation $f(x) = 0$ possède 2 racines $\alpha_1 \in [-2,-1]$, $\alpha_2 \in [1,2]$

Méthode 2

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} + x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{-x} = -x + 2$$
$$\Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$$

Avec $f_1(x) = e^{-x}$
et $f_2(x) = -x + 2$



Les graphes de f_1 et f_2 possèdent 2 points d'intersection, donc l'équation $f(x) = 0$ possède 2 racines $\alpha_1 \in [-2,-1]$, $\alpha_2 \in [1,2]$

2. *2 itérations de la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle [1,2]* 1.5

Nº itr.	a	b	$x_i = (a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_i)$
1	1	2	1.5	- 0.632	0.135	- 0.277
2	1.5	2	1.75	- 0.277	0.135	- 0.076

3. *Approche de la racine à 10^{-2} près par la méthode de Newton avec $x_0 = 2$*

Algorithme de Newton $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$ avec $f'(x_k) = -e^{-x_k} + 1$

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
1	1.8435	0.1565
2	1.8414	$0.0021 \leq 10^{-2}$
3	1.8414	$0.0000 \leq 10^{-4}$

3

Il suffit de faire 3 itérations par la méthode de Newton pour avoir $\Delta x \leq 10^{-4}$.

EXERCICE 2 (6.5)

Valeur exacte de I

$$I = \int_0^{1.2} sin(2x)dx = -\frac{1}{2}cos(2x)\Big|_0^{1.2} = -\frac{1}{2}(cos(2.4) - 1) \approx 0.8687$$ 1

Valeur approchée de I

1. *Méthode des trapèzes composite 4 intervalles* 2

$$I_T = h\left(\frac{f(b) - f(a)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)$$

$$n = 4 ;\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.2}{4} = 0.3$$

$$x_0 = 0 \ ;\ x_1 = 0.3 \ ;\ x_2 = 0.6 \ ;\ x_3 = 0.9$$

$$I_T = h\left(\frac{f(b) - f(a)}{2} + \big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big)\right)$$

$$I_T = 0.3\left(\frac{sin(2.4)}{2} + \big(0 + sin(0.6) + sin(1.2) + sin(1.8)\big)\right) \approx 0.8425$$

$$E_a = |I - I_T| = |0.8687 - 0.8425| = 0.0262 \ ;\ E_r = 3.02\ \%$$ 0.5

2. *Méthode de Simpson composite avec 2 intervalles* 2.5

$$I_S = \frac{h}{6}\left[f(b) - f(a) + 2\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right]$$

$$n = 2 ;\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.2}{2} = 0.6$$

$$x_0 = 0 ;\ x_1 = 0.6 ;\ x_2 = 1.2;\ \frac{x_0 + x_1}{2} = 0.3 ;\ \frac{x_1 + x_2}{2} = 0.9$$

$$I_S = \frac{h}{6}\left[f(b) - f(a) + 2\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + 4\left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)\right]$$

$$I_S = \frac{0.6}{6}\Big(sin(2.4) + 2\big(0 + sin(1.2)\big) + 4\big(sin(0.6) + sin(1.8)\big)\Big) \approx 0.8694$$

$$E_a = |I - I_s| = |0.8687 - 0.8694| = 0.0007 \ ;\ E_r = 0.08\ \%$$ 0.5

EXERCICE 3 (7)

$$\begin{cases} \boldsymbol{y'(t) + 2y(t) = 4t} \\ \boldsymbol{y(0) = 1} \end{cases}$$

1. <u>Vérification que $y(t) = 2e^{-2t} + 2t - 1$ est la solution exacte de l'équation.</u>

$y'(t) + 2y(t) = -4e^{-2t} + 2 + 2(2e^{-2t} + 2t - 1) = -4e^{-2t} + 2 + 4e^{-2t} + 4t - 2 = 4t$

$y(0) = 2 - 1 = 1$ 1

2. <u>Estimation de $y(0.2)$</u>

a) <u>Méthode d'Euler avec un pas $h = 0.1$</u>

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) = y_i + h(4t_i - 2y_i) \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

$avec\ \ t_o = 0\,, y_o = 1$

<u>1ère itération</u>

$$\begin{cases} y_1 = y_o + h(4t_o - 2y_o) = 1 + 0.1(4 \times 0 - 2 \times 1) = 0.8 \\ t_1 = t_o + h = 0 + 0.1 = 0.1 \end{cases}$$ 1

<u>2ème itération</u>

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + h(4t_1 - 2y_1) = 0.8 + 0.1(4 \times 0.1 - 2 \times 0.8) = \mathbf{0.68} \\ t_2 = t_1 + h = 0.1 + 0.1 = \mathbf{0.2} \end{cases}$$ 1

Donc $\boldsymbol{y(0.2)} \approx \mathbf{0.68}$ par la méthode d'Euler avec un pas $h = 0.1$.

b) <u>Méthode RK2 avec un pas $h = 0.2$</u>

$$\begin{cases} K_1 = hf(t_i, y_i) = h(4t_i - 2y_i) \\ K_2 = hf(t_i + h, y_i + K_1) = h\big(4(t_i + h) - 2(y_i + K_1)\big) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

$avec\ \ t_o = 0\,, y_o = 1$

<u>1ère itération</u> 2.75

$$\begin{cases} K_1 = h(4t_o - 2y_o) = 0.2(4 \times 0 - 2 \times 1) = -0.4 \\ K_2 = h\big(4(t_o + h) - 2(y_o + K_1)\big) = 0.2\big(4(0 + 0.2) - 2(1 - 0.4)\big) = -0.08 \\ y_1 = y_o + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 1 + \frac{1}{2}(-0.4 - 0.08) = \mathbf{0.76} \\ t_1 = t_o + h = 0 + 0.2 = \mathbf{0.2} \end{cases}$$

Donc $\boldsymbol{y(0.2)} \approx \mathbf{0.76}$ par la méthode RK2 avec un pas $h = 0.2$.

c) <u>Valeur exacte et comparaison</u>

Valeur exacte : $y(0.2) = 2e^{-2\times0.2} + 2 \times 0.2 - 1 = 0.7406$

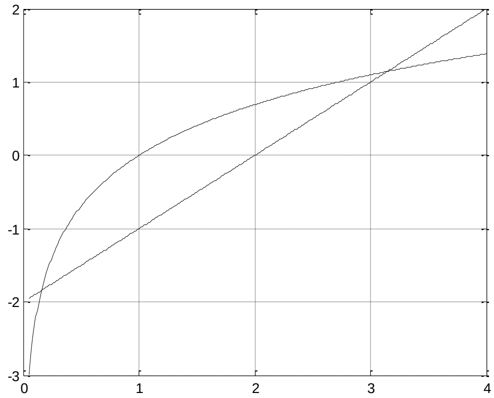
Erreur Euler : $E_a = |0.7406 - 0.68| = 0.0606$; $E_a = 8.18\ \%$ 1.25

Erreur RK2 : $E_a = |0.7406 - 0.76| = 0.0194$; $E_a = 2.62\ \%$

TEST DE TD (20)

On considère la fonction $f(x) = ln(x) - x + 2$

1. Séparation des racines de l'équation $f(x) = 0$ 3



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ln(x) - x + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow ln(x) = x - 2$$
$$\Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$$

Avec $f_1(x) = ln(x)$ et $f_2(x) = x - 2$

$f(0) \to -\infty$; $f(1) \approx 1$
$f(3) \approx 0.1$; $f(4) \approx -0.61$

Les graphes de f_1 et f_2 possèdent 2 points d'intersection, donc l'équation $f(x) = 0$ possède 2 racines $\alpha_1 \in]0,1]$, $\alpha_2 \in [3,4]$

2. 2 itérations de la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle [3,4] 3

N^o *itr.*	*a*	*b*	$x_i = (a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_i)$
1	3	4	3.5	0.099	- 0.614	- 0.247
2	3	3.5	3.25	0.099	- 0.247	- 0.071

2 itérations de la méthode de Newton avec $x_0 = 3$

Algorithme de Newton $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$ avec $f'(x_k) = \frac{1}{x_k} - 1$

k	x_k
1	3.1479
2	3.1462

3

3. Evaluation de $\int_1^4 f(x)dx$ par la méthode des rectangles composite 3 intervalles

$$I_R = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$n = 3\,;\ \ h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1$$

$$x_0 = 1\,;\ x_1 = 2\,;\ x_2 = 3$$

$$I_R = h\big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)\big)$$ 3

$$I_R = ln(2) + ln(3) - (1+2+3) + (2+2+2) \approx 1.7918$$

4. Erreur absolue 3

Valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 (ln(x) - x + 2)dx = \left(xln(x) - x - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_1^4 = \left(x(ln(x)+1) - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^4$$

$$= (4(ln(4)+1) - 8) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \approx 1.0452$$

$E_a = |I - I_R| = |1.0452 - 1.7918| = 0.7466$; $E_r = 71.43\ \%$

Nombre d'intervalles pour que l'erreur absolue soit inférieure à 0.1

$$E_a = |I - I_R| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot \max_{[a,b]} |f'(x)|$$

5

En remplaçant a et b par leurs valeurs et en imposant que $E_a \leq 0.1$ on aura

$$E_a \leq \frac{9}{2n} \cdot \max_{[1,4]} |f'(x)| \leq 0.1 \Rightarrow n \geq 45. \max_{[1,4]} |f'(x)|$$

Déterminons $m = \max_{[1,4]} |f'(x)|$

$$f(x) = ln(x) - x + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

Pour $x \in [1,4] :\ |f'(x)| = 1 - \frac{1}{x}$

Et on aura

$$m = \max_{[1,4]} |f'(x)| = |f'(4)| = 1 - \frac{1}{4} = 0.75$$

D'où l'on déduit que

$$n \geq 45 \times 0.75 = 33.75 \Rightarrow n = 34$$