الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -
Faculté des Sciences Economiques,
Commerciales et des Sciences de Gestion

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
- البويرة -
كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم السنة الأولى (L.M.D) جذع مشترك :

ملخص محاضرات

الإحصاء 02

مدعمة بأمثلة تطبيقية

من إعداد الفرقة البيداغوجية المكونة من :

العمري علي ، حيدوشي عاشور ، وعيل ميلود

السنة الجامعية (2021-2022

تقديم :

نظرا للظروف التي تمر بها الجزائر وسائر دول العالم جراء إنتشار جائحة كورونا منذ بداية سنة 2020 ، والتي أثرت على سير الأعمال البيداغوجية لجامعتنا، ونظرا لضيق الوقت المقدم لتدريس هذا المقياس والذي لا يتعدى أربعة أسابيع إرتأينا أن نقدم لطلبة السنة الأولى جذع مشترك محاضرات مختصرة تحتوي على أهم المحاور التي سيمتحن فيها الطالب (ة) وسيعتمد عليها أثناء مساره الدراسي، و هذه المحاور هي :

- نظرية المجموعات، التجربة العشوائية ونظرية الاحتمال؛
- المتغيرات العشوائية.

إذ ندعوا طلبتنا إلى تحميل سلاسل التمارين المحلولة الخاصة بهذه المحاور من أجل الفهم أكثر وهي موجودة على الموقع الالكتروني لكلية العلوم الاقتصادية ، التجارية وعلوم التسيير – قسم السنة الأولى جذع مشترك لجامعة البويرة .

عن الفرقة البيداغوجية لمقياس إحصاء 02 :

الأساتذة : حيدوشي عاشور ، وعيل ميلود ، العمري علي

المحور الأول : ملخص قوانين نظرية المجموعات و حساب الاحتمال

أولا : بعض مفاهيم وقوانين نظرية المجموعات

1-1/ تعريف المجموعة : تعرف المجموعة على أنها تجمع بين الأشياء التي تشترك في صفة معينة وقد تكون هذه الأشياء كميات أو أعداد أو أي شيء آخر معرفا تعريفا واضحا وعادة ما يرمز لها بأحد الحروف الهجائية A أو B أو C أو ...إلخ، ويسمى كل عضو من أعضائها بكلمة عنصر ويرمز له غالبا بأحد الحروف التالية : a ، b، c ...إلخ، وقد نصادف في الحياة اليومية هذه التجمعات مثل فريق كرة قدم أو مجموعة طلبة من قسم معين وغيرها.

2-1/ العمليات على المجموعات :

أ- الإتحاد : قاعدة اتحاد مجموعتين تعطى بالعلاقة التالية : $A\cup B=\{x/x\in A$ أو $x\in B\}$

وكقاعدة عامة إذا كانت هناك مجموعات جزئية A_1; A_2...; A_n من المجموعة الكلية S فإن إتحاد هذه المجموعات الجزئية يكتب بالصيغة التالية : $A_1 \cup A_2 \cup \ \dots \ \cup \ An = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$

مثال (01) : لتكن المجموعتان A و B الجزئيتان من المجموعة الكلية (Ω)، حيث :

$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; a ; b ; c \}$

$A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$

$B = \{ a ; b ; 1 ; 3 \}$

المطلوب : حدد المجموعة $A\cup B$ ؟

الحل :

لتحديد المجموعة $A\cup B$ يمكن إستخدام إحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الأولى : إستخدام المجموعات كما هي محددة ، حيث نقوم بإختيار إحدى المجموعات A أو B، ثم نقوم بشطب العناصر المشتركة في المجموعة الثانية ، وبعد ذلك نكتب باقي العناصر في المجموعة الثانية مع عناصر المجموعة الأولى في مجموعة مشتركة هي مجموعة إتحادهما، كما سنوضحه في المخطط الموالي :

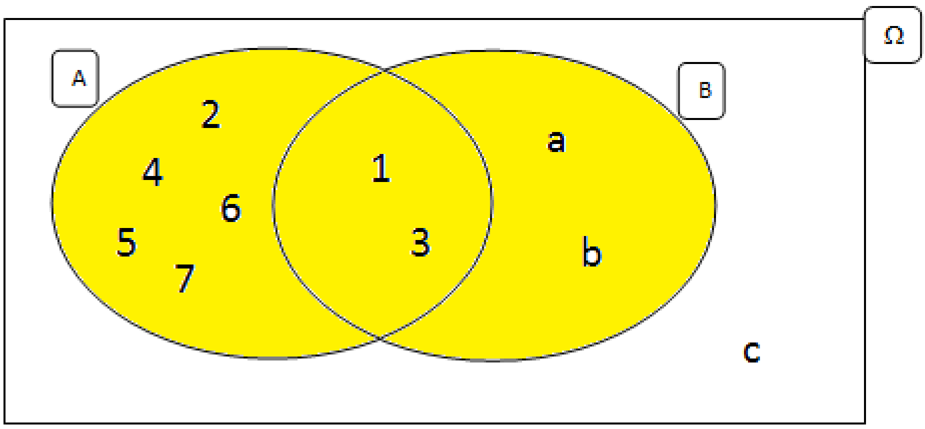
– نختار هذه المجموعة : $A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$

– نشطب العناصر الموجودة هي المجموعة الثانية والتي تكون

قد وجدناها في المجموعة أعلاه كما هو موضح : $B = \{ a ; b ; 1 ; 3 \}$

– نسجل عناصر المجموعة الأولى وباقي عناصر المجموعة الثانية $A \cup B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; a ; b \}$

<u>الطريقة الثانية</u> : هي طريقة تعتمد على الشكل البياني لهذه المجموعات، حيث نضع عناصر المجموعة الكلية Ω في إطار ثم نحدد داخله المجموعتين A و B ، وبعد ذلك نحدد ما هو مطلوب من مجموعات، حيث تظهر أن إتحاد المجموعتين A و B هو العناصر الموجودة في الظل الموضح في الشكل الموالي :



$A \cup B$

ومن خلاله يصبح : $A \cup B = \{ 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 1 ; 3 ; a ; b \}$

<u>ب– التقاطع</u> : قاعدة تقاطع مجموعتين تعطى بالعلاقة التالية : $A \cap B = \{x / x \in A$ و $x \in B\}$

وكقاعدة عامة إذا كانت هناك مجموعات جزئية $A_1 ; A_2 ; \ldots ; A_n$ من المجموعة الكلية S فإن تقاطع هذه المجموعات الجزئية هو العناصر المشتركة في جميع هذه المجموعات الجزئية، ويكتب بالصيغة التالية :

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_n$$

المحور الأول : ملخص قوانين نظرية المجموعات و حساب الاحتمال

مثال (02): نواصل إستخدام معطيات المثال السابق، فالمجموعتان A و B جزئيتان من المجموعة الكلية (Ω)، حيث:

$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; a ; b ; c \}$

$A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$

$B = \{ a ; b ; 1 ; 3 \}$

المطلوب : حدد المجموعة $A \cap B$ ؟

الحل :

لتحديد المجموعة $A \cap B$ يمكن إستخدام إحدى الطريقتين التاليتين :

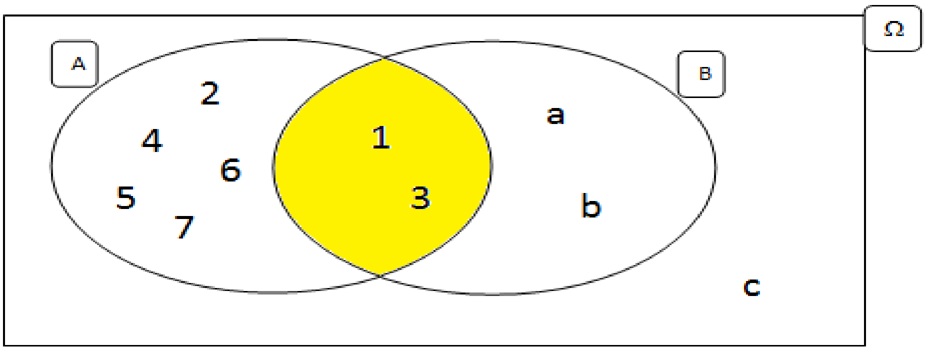
الطريقة الأولى : نقوم بإختيار إحدى المجموعات A أو B، ثم نقوم بتحديد العناصر في المجموعة الثانية المشابهة لها في المجموعة الأولى، وبذلك نحصل على العناصر المتشابهة بين المجموعتين والتي تسمى بمجموعة التقاطع بين المجموعتين A و B ، كل هذا سنوضحه في المخطط الموالي :

$A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$ نختار هذه المجموعة :

$B = \{ a ; b ; 1 ; 3 \}$ نحدد العناصر الموجودة في هذه المجموعة والمشابهة لها في المجموعة أعلاه التي اخترناها

$A \cap B = \{ 1 ; 3 \}$

الطريقة الثانية : هي طريقة تعتمد على الشكل البياني لهذه المجموعات، حيث نضع عناصر المجموعة الكلية Ω في إطار ثم نحدد داخله المجموعتين A و B ، وبعد ذلك نحدد ما هو مطلوب من مجموعات، حيث تظهر أن تقاطع المجموعتين A و B هو العناصر الموجودة في الظل الموضح في الشكل الموالي :



$A \cap B$

المحور الأول : ملخص قوانين نظرية المجموعات و حساب الاحتمال

ج- فرق المجموعات : إن فرق (طرح) المجموعات له عدة طرق ووفق تسميات عديدة هي :

ج-1/ الفرق (طرح) مجموعتين : نرمز لها بـــ: $A-B$ ونعبر عن ذلك رياضيا بالتكافؤ التالي :

$$\{x \in A-B\} \Leftrightarrow \{x \in A \; ; x \notin B\}$$

ملاحظة : عملية الفرق في المجموعات عملية غير تبديلية أي : $A-B \neq B-A$

مثال (03) : نواصل في المثال 01 ، فالمجموعتان A و B الجزئيتان من المجموعة الكلية (Ω)، حيث :

$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; a ; b ; c \}$

$A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$

$B = \{ a ; b ; 1 ; 3 \}$

المطلوب : حدد المجموعات التالية :

- $A-B$
- $B-A$

الحل :

لتحديد المجموعة $A-B$ و $B-A$ يمكن إستخدام إحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الأولى : نختار العناصر الموجودة في المجموعة A وغير موجودة في المجموعة B، فهذه العناصر هي $A-B$ والعكس إذا أردنا حساب الفرق $B-A$ كما سنوضحه في المخطط الموالي :

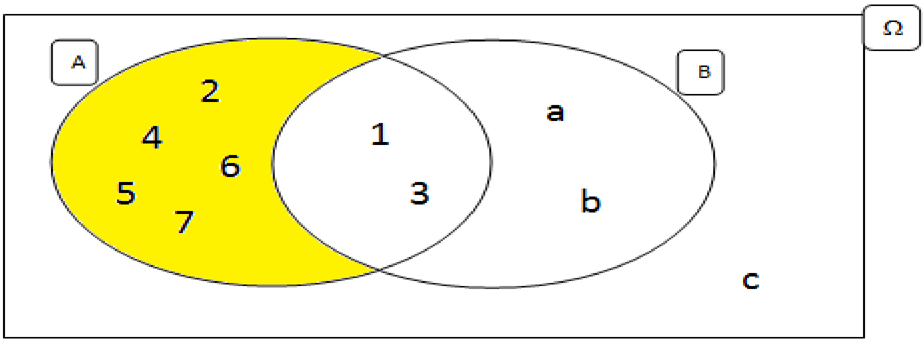
$A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$ $\qquad$ $B = \{ a ; b ; 1 ; 3 \}$

$A-B = \{ 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$

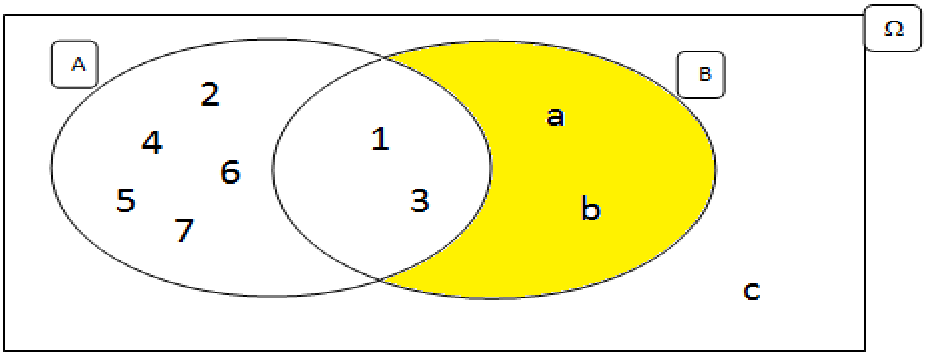
$B = \{ a ; b ; 1 ; 3 \}$ $\qquad$ $A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$

$B-A = \{ a ; b \}$

الطريقة الثانية : هي طريقة تعتمد على الشكل البياني لهذه المجموعات، حيث أن الفرق A-B هو العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A وغير موجودة في المجموعة B ، والعكس بالنسبة للفرق B-A ، كما هو موضح في الشكلين المواليين :



A-B



B-A

ج-2/المتممة : توجد علاقة خاصة في الفرق تسمى بالمتممة و هي إذا كانت B محتواة في A فيصبح الفرق A-B يكتب بالعلاقة التالية : $B \subset A \Leftrightarrow A-B = \overline{B}$ أو بالعلاقة التالية : $\{x \in \overline{B}\} \Leftrightarrow \{x \in A \,;\, x \notin B\}$

مثال (04): نواصل إستخدام معطيات المثال (01)، فالمجموعتان A و B جزئيتان من المجموعة الكلية (Ω)، حيث:

$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; a ; b ; c \}$

$A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$

$B = \{ a ; b ; 1 ; 3 \}$

المطلوب : حدد المجموعة $\overline{B}$ ؟

الحل :

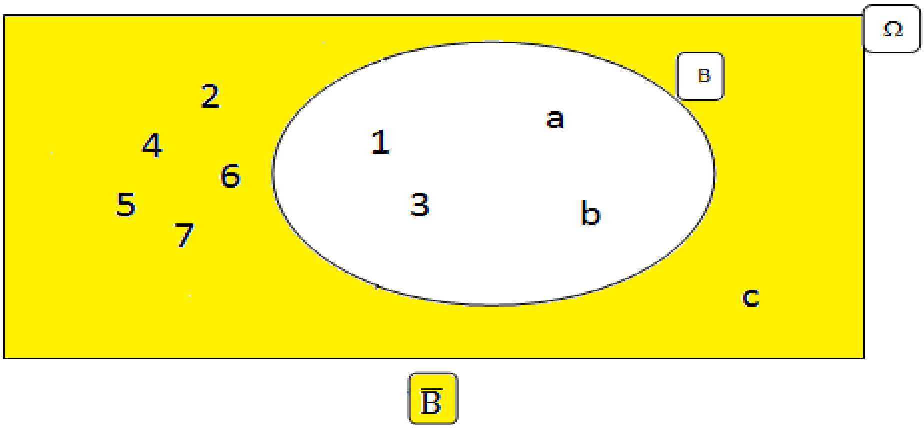
يمكن إستخدام إحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الأولى : بما أن $\overline{B} = \Omega - B$ فسوف نتبع نفس خطوات الفرق، فنختار العناصر الموجودة في المجموعة الكلية Ω وغير موجودة في المجموعة B، فهذه العناصر هي Ω-B ، أي المجموعة $\overline{B}$.

$$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; a ; b ; c\} \qquad B = \{a ; b ; 1 ; 3\}$$

$$\overline{B} = \Omega - B = \{2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; c\}$$

الطريقة الثانية : هي طريقة تعتمد على الشكل البياني لهذه المجموعات، حيث نحذف العناصر الموجودة في المجموعة الكلية Ω المشابهة للعناصر الموجودة في المجموعة B ، وباقي العناصر في المجموعة الكلية Ω هي المجموعة $\overline{B}$ أي المجموعة المتممة أو المكملة لـ المجموعة B في المجموعة الكلية Ω ، وعناصر المجموعة المتممة لـB في Ω ممثلة بالظل الموضح في الشكل الموالي :



ج-3/بعض خواص الفرق و المتممة :

- $\Omega - A = \overline{A}$
- $\overline{\Omega} = \varnothing$
- $\overline{\varnothing} = \Omega$
- $A \cup \overline{A} = \Omega$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A - B = A \cap \overline{B}$
- $\overline{\overline{A}} = A$

- $(\overline{A\cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $(\overline{A\cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$

3–1/ أصلي مجموعة منتهية Cardinality of a Finite Set: نسمي أصلي مجموعة (E) عدد عناصرها ، مثلا المجموعة E تمثل عدد فصول السنة، إذن أصلي مجموعة E هو 4 و نكتب: $Card(E)=4$

خواص أصلي مجموعة : لأصلي مجموعة عدة خواص هي :

- أصلي مجموعة خالية هو الصفر $Card(\varnothing)=0$ ؛
- إذا كانت A و B مجموعتان جزئيتان لمجموعة منتهية :
  - فإن : $Card(A\cup B)= Card(A) + Card(B) - Card(A\cap B)$
  - إذا كانت هاتان المجموعتان لا توجد بينهما عناصر مشتركة فإن :

$$Card(A\cup B)= Card(A) + Card(B) \quad et \quad Card(A\cap B)=0$$

- إذا كانت المجموعة A^c مجموعة مكملة أو متممة للمجموعة A بالنسبة للمجموعة الكلية (S) فإن :
  - أصلي مجموعة تقاطع المجموعتين A و A^c هو : $Card(A\cap A^c)= Card(\varnothing)=0$
  - أصلي مجموعة إتحاد المجموعتين A و A^c هو:

$$Card(A\cup A^c) = Card(\Omega) = Card(A) + Card(A^c)$$

- إذا كانت A و B مجموعتان منتهيتان فإن :
  - $Card(A\times B)= Card(A) \times Card(B)$
  - نتيجة للقاعدة السابقة فإن :

$$Card(A\times A) = Card(A) \times Card(A) = (Card(A))^2$$

  - و كنتيجة عامة للقواعد السابقة فإن : $Card(A^n) = (Card(A))^n$

ثانيا : طرق عد عناصر فراغ عينة

2-1/ التجربة العشوائية و فراغ العينة :

2-1-1/ التجربة العشوائية : هي عمل شيء ما أو ملاحظة شيء ما تحت ظروف معينة وتكون نتيجة التجربة أحد عدة نتائج من غير المؤكد معرفة أي منها سيتحقق، وعدد الحالات التي يمكن أن تأتي بها التجربة تسمى بالحالات الممكنة.

2-1-2/ فراغ العينة: يعرف فراغ (فضاء) العينة على أنه مجموعة لجميع النتائج الممكنة لتلك التجربة ويرمز لها بالرمز (Ω).

2-1-3/ الحدث The Event : هو مجموعة جزئية من فراغ العينة، ففي أي تجربة عشوائية عدد الحالات الممكنة n ، إذا كنا نهتم بتحقق جزء معين من مجموعة النتائج الممكنة و كانت عدد الحالات التابعة لهذا الجزء تساوي m حيث ($n>m$)، إذن عندما تكون نتيجة التجربة أحد هذه الحالات التي عددها m نقول أن الحدث الذي نهتم به قد تحقق .

2-2/ أنواع طرق العد : نعني بطرق العد تحديد عدد عناصر فراغ عينة وعدد عناصر حدث دون اللجوء أو الحاجة إلى كتابة فراغ العينة أو فراغ الحدث ، و هناك طرق معروفة لتحديد عدد عناصر فراغ العينة و هي :

2-2-1/ طريقة الضرب : و تنص هذه القاعدة على أن عدد عناصر فراغ عينة مشكلة من تجارب هو جداء عدد نتائج هذه التجارب، فمثلا إذا كانت تجربتين A عدد نتائجها n و تجربة B عدد نتائجها الممكنة m فإن عدد النتائج الكلية للتجربتين معا ، أي (**A** و **B**) هو ($n\times m$) .

إذن إذا افترضنا وجود التجارب (A_1 ; A_2 ; … ; A_K) و عدد عناصر نتائجها المختلفة هي (n_1 ;n_2 ; … ; n_k)

فإن عدد النتائج الممكنة لهذه التجارب معا هو : $Card(\Omega) = n_1 \times n_2 \times\ldots\times n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$

مثال (05): أرادت مؤسسة تربوية فتح مجال التوظيف لمنصبين في إدارتها هما محاسب و متصرف إداري، فتقدم لإدارتها 3 أشخاص يحملون ملف متصرف و 5 أشخاص يحملون ملف محاسب .

المطلوب : تحديد عدد الطرق الممكنة في تعيين الموظفين الجديدين ؟

الحل : إن عدد الطرق الممكنة في تعيين الموظفين الجديدين هو عدد الطرق الممكنة لشغل منصب محاسب وعددها ($n_1=5$) مضروب في عدد الطرق الممكنة لشغل منصب متصرف إداري وعددها ($n_2=3$)، إذن :

$Card(\Omega) = n_1 \times n_2 = 5\times3=15$

وبعض الحالات الممكنة من هذا التوظيف هو :

إذا كان المرشحون لمنصب محاسب هم : محمد (M) وأحمد (A) وفريد (F) وحليم (H) و كريمة (K)

والمرشحون لمنصب متصرف إداري هم : سليم (S) و بسماء (B) و إكرام (I)

$Card(\Omega)=\{(M ,S) ; (M ,B) ; (M ,I) ; (A ,S) ; (A ,B) ; (A ,I) ;......; (K ,I) \}$

2-2-2/ طريقة الجمع: و تنص هذه القاعدة على أن عدد عناصر فراغ عينة مشكلة من تجارب متنافية هو جمع عدد نتائج هذه التجارب، فمثلا إذا كانت تجربتين A عدد نتائجها n و تجربة B عدد نتائجها الممكنة m وكانت هاتين التجربتين متنافيتين فإن عدد النتائج الكلية لإحدى التجربتين (**A أو B**) هو (n+m) .

إذن إذا افترضنا وجود التجارب $(A_1 ; A_2 ; ... ; A_K)$ و عدد عناصر نتائجها المختلفة هي $(n_1 ;n_2 ; ... ; n_k)$ وكانت هذه التجارب متنافية فإن عدد النتائج الممكنة لإحدى هذه التجارب هو :

$$Card(\Omega) = n_1 + n_2 +...+n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

مثال (06): لتكن ثلاث مدن متجاورة هي (A ; B ; C) ، ترتبط هذه المدن ببعضها بمجموعة من الطرق.

المطلوب : تحديد عدد الطرق التي تؤدي من المدينة A إلى المدينتين B و C مع العلم أن A تربطها 3 طرق بـــ B وتربطها 6 طرق بـــ C ؟

الحل : بما أن هناك انفصال بين المدينتين B و C وكل منها لها طرق خاصة بإتجاه المدينة A فإن عدد الطرق التي تؤدي من المدينة A إلى إحدى المدينتين B أو C هو عدد الطرق التي تؤدي من A نحو B زائد عدد الطرق التي تؤدي من A نحو C و نكتب : $Card(\Omega) = n_1 + n_2 = 3+6=9$

3-2-2/ طريقة الترتيبة : طريقة الترتيبة يراد بها سحب مجموعة جزئية مؤلفة من k عنصر من المجموعة الكلية n، حيث أن $n>k$ ، و يتم سحب عنصر بعد الآخر أي على التوالي ، وعدد الإمكانيات الممكنة من هذا السحب يتم إستخراجها وفق القاعدة التالية :

$$A_{n\,;k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال (07): يحتوي صندوق على 3 كرات ، واحدة حمراء (R) و واحدة بيضاء (B) وأخرى سوداء (N) ، والتجربة هي سحب كرتين على التوالي من هذا الصندوق.

المطلوب : تحديد عدد الحالات الممكنة من وراء هذه التجربة مع تحديد هذه النتائج ؟

الحل :

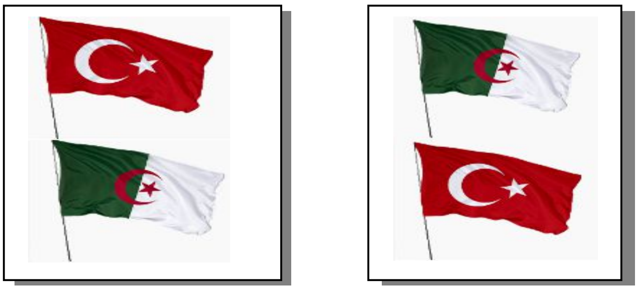
في هذه الحالة بما أن السحب على التوالي و (n>k)، أي عدد الكرات المسحوبة أقل من عدد كرات الصندوق فإننا نستخدم الترتيبة و عدد الطرق الممكنة من وراء هذه التجربة هو :

$$A_{n\,;k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 3\times 2 = 6$$

أما النتائج الممكنة من هذه التجربة هي: $Card(\Omega)=\{ RB \,;\, RN \,;\, BR \,;\, BN \,;\, NB \,;\, NR \}$

2-2-4/ طريقة التبديلة : إن التبديلة هي عبارة عن تنظيم أو ترتيب مجموعة عناصر في أماكنها و هي قاعدة جزئية في الترتيبة، حيث (n=k) ، فعدد الإمكانيات الكلية من هذه التباديل يحسب وفق القاعدة التالية : $P_n = n!$

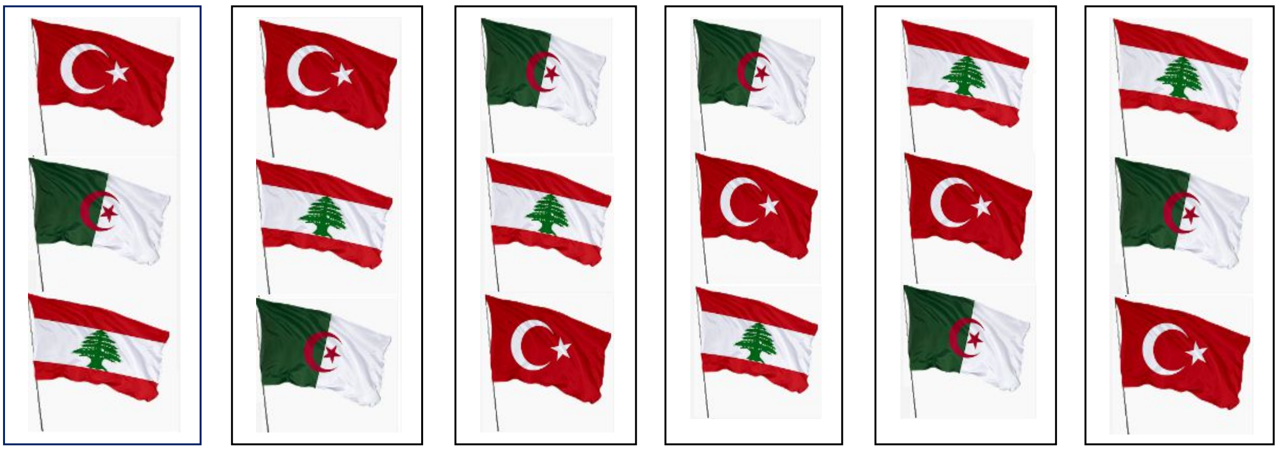
مثال (08): نريد وضع علمين على جدار في مكانين مخصصين لهما فكانت النتائج الممكنة في التمثيل التالي :



نلاحظ أنه لدينا طريقتين فقط في وضع هاذين العلمين إما علم الجزائر في الأعلى و علم تركيا في الأسفل أو العكس.

ونكتب : $P_n=2$

وإذا أردنا ترتيب 3 أعلام لدول (الجزائر ، تركيا ، لبنان) في أماكن مخصصة من واجهة جدار كانت لنا النتائج الممكنة التالية :



نلاحظ أن هناك ستة طرق لترتيب الأعلام الثلاثة ، ونكتب $P_n=6$

وبالتالي قاعدة التبديلة تكتب كالتالي : $P_n = n!$

$$\left.\begin{array}{l} P_2= 2! = 2\times1= 2 \\ P_3= 3! = 3\times2\times1 =6 \end{array}\right\}$$

5-2-2/ طريقة التوفيقة : هي طريقة يتم من خلالها إختيار k عنصر من مجموع العناصر n حيث (n>k) مع عدم مراعاة الترتيب في كل حالة إختيار، أي يتم إختيار أو سحب العناصر (k) دفعة واحدة (في آن واحد) من مجموع العناصر (n) ، وبالتالي عدد الحالات الممكنة من وراء هذا السحب أو التجربة يتم إستخراجها وفق القاعدة التالية :

$$C_n^K = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال (09): أراد قسم العلوم الاقتصادية في إحدى الجامعات تعيين لجنة من طالبين كممثلين عن أحد الأقسام المكون من 20 طالب ، فكم عدد اللجان التي يمكن تستخرج من هذه الاختيارات ؟

الحل : نلاحظ أن (n>k)، أي عدد الطلبة الممثلين (k=2) أقل من عدد طلبة القسم (n=20)، كذلك الترتيب غير مهم (لا توجد مناصب ترتيبية مثل رئيس ونائب) وبالتالي نستخدم قاعدة التوفيقة ويصبح عدد اللجان الممكنة هو :

$$C_n^K = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20\times19}{2} = 190$$

ثالثا : نظرية الاحتمال :

1-3/ تعريف الاحتمال : إن في كل تجربة عشوائية هناك دوما حالة شك متعلق بالنتيجة التي ستقع و بالتالي ستتحقق أو لا تتحق ، ولأجل ذلك كان من الضروري تعيين عدد محصور بين الصفر و الواحد لإعطاء نسبة لفرصة ظهور أو تحقق هذه الحالة، فمثلا نقول أن نسبة ظهور أو وقوع هذه الحالة هو 100% أي بإحتمال هو 1 ، أو أن نقول أن نسبة وقوع الحادث هو 40% أي بإحتمال 0.4، أما طريقة حساب احتمال الحصول على الحادثة A مثلا و التي عدد مرات حدوثها H مرة مختلفة من بين مجموع N مرة أو إمكانية فإن إحتمال الحصول على هذه الحادثة هو $P(A) = \frac{H}{N}$ ويكتب كذلك وفق القاعدة التالية :

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

مثال (10) : نرمي قطعة نقد ثلاث مرات ، حيث أن الحدث A هو الحصول على الرقم (P) خلال الرمية الثالثة ، والحدث B هو الحصول على الرقم (P) خلال الرمية الأولى والثانية.

المطلوب :

- ما هو عدد الحالات الكلية الممكنة من وراء هذه التجربة ؟
- إستخرج الحدثين A و B ثم أحسب إحتمالهما ؟

الحل :

- عدد الحالات الممكنة من هذه التجربة هو : $Card(\Omega) = 2x2x2 = 2^3 = 8$

$$\Omega = \{FFF \quad , FFP \quad , FPF \quad , FPP \quad , PFF \quad , PFP \quad , PPF \quad , PPP \quad \}$$

- إستخراج الأحداث وحساب إحتمالاتها :

$$A = \{FFP \quad , FPP \quad , PFP \quad , PPP \quad \} \Rightarrow P(A) = \frac{Card \quad (A)}{Card \quad (\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{PPF \quad , PPP \quad \} \quad \Rightarrow P(B) = \frac{Card \quad (B)}{Card \quad (\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

3-2/ بعض خواص الاحتمال :

- ✓ من أجل كل حادثة A من قسم الأحداث الكلية (Ω) فإن: $1 \geq P(A) \geq 0$
- ✓ إحتمال الحادثة الأكيدة والكلية يكون دوما يساوي الواحد لأن :

$$P(\Omega) = \frac{Card(\Omega)}{Card(\Omega)} = 1$$

- ✓ إحتمال الحادثة المستحيلة دوما يساوي الصفر لأن هذه الحادثة لن تقع مطلقا.
- ✓ احتمال المجموعة الخالية يساوي الصفر لأن :

$$P(\emptyset) = \frac{Card(\emptyset)}{Card(\Omega)} = \frac{0}{Card(\Omega)} = 0$$

- ✓ إذا كانت الحادثة $\overline{A}$ هي الحادثة المتممة للحادثة A بالنسبة لـ Ω فإن :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- ✓ إحتمال تقاطع حادثتين A و B من فراغ الاحداث الكلية (Ω) هو: $P(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)}$
- ✓ إذا كانت الحادثتان A و B متنافيتان فإن : $P(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \frac{Card(\emptyset)}{Card(\Omega)} = 0$

✓ إحتمال إتحاد حادثتين $P(A\cup B)$

- إذا كانت A و B كيفيتان من فراغ الأحداث (Ω) فإن : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
- إذا كانت الحادثتان A و B متنافيتان فإن : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = P(A) + P(B)$

مثال (11) : من نتائج المثال (10) والتي كانت كالتالي :

$$\Omega = \{FFF \ , FFP \ , FPF \ , FPP \ , PFF \ , PFP \ , PPF \ , PPP\}$$

$$A = \{FFP \ , FPP \ , PFP \ , PPP\}$$

$$B = \{PPF \ , PPP\}$$

المطلوب : أحسب الاحتمالات التالية : $P(\overline{A})$ ، $P(A\cap B)$ ، $P(A\cup B)$

الحل :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

أو بطريقة أخرى :

$$\overline{A} = \Omega - A = \{FFF \ , FPF \ , PFF \ , PPF\} \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$(A\cap B) = \{PPP\} \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{Card\ (A\cap B)}{Card\ (\Omega)} = \frac{1}{8}$$

$$(A\cup B) = \{FFP \ , FPP \ , PFP \ , PPF \ , PPP\} \Rightarrow P(A\cup B) = \frac{Card\ (A\cup B)}{Card\ (\Omega)} = \frac{5}{8}$$

أو بطريقة أخرى :

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

3-3/ الاحتمالات الشرطية

3-3-1/ تعريف الاحتمالات الشرطية :

ليكن الفضاء الاحتمالي المنته $P(\Omega)$ ، ولتكن الحادثتان A وB حيث $P(A)>0$ ، نسمي إحتمال وقوع الحدث B بعد توفر معلومات عن وقوع الحدث A بالاحتمال الشرطي للحادثة B ويرمز له بالرمز $P(B/A)$ ، حيث :

$$P(B/A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

مثال (12) : يراقب عامل تقني آلتين بمصنع ما لإصلاح أي منهما في حالة أي عطب، فإذا علمت أن إحتمال وقوع عطب في الآلة الأولى هو ($\frac{1}{8}$) و الآلة الثانية هو ($\frac{1}{10}$).

المطلوب : ما هو إحتمال أن يتدخل العامل لإصلاح الآلة الثانية علما أنه لم يتدخل لإصلاح الأولى؟

الحل :

- نسمي وقوع التدخل لإصلاح الآلة الأولى بالحدث A ونسمي وقوع التدخل لإصلاح الآلة الأولى بالحدث B.

من بيانات المثال يظهر أن الآلتين مستقلتين عن بعضهما البعض.

ملاحظة هامة : لقد قلنا بأن الآلتين مستقلتين (أي أن تعطل الآلة الأولى لا يؤدي إلى تعطل الآلة الثانية والعكس كذلك)، حيث توجد قاعدة في الاستقلالية عند حساب الاحتمالات فإذا كان الحدثين A و B مستقلين فإن :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ومنه إذا كانت الحادثة A هي إصلاح الآلة الأولى فإن عدم التدخل لإصلاح هذه الآلة هو $\bar{A}$ وحادثة عدم التدخل لإصلاح الآلة الثانية هو $\bar{B}$ وبالتالي إحتمال أن يتدخل العامل لإصلاح الآلة الثانية مع العلم أنه لم يتدخل لإصلاح الآلة الأولى هو :

$$P\left({}^{B}/_{\bar{A}}\right) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) \times P(\bar{A})}{P(\bar{A})} = P(B) = {}^{1}/_{10}$$

2-3-3/ قانون بايز :

إذا كانت الأحداث (A_1 ; A_2 ;.....A_K) المنفصلة فيما بينها مثنى مثنى و التي إتحادها يعطي فراغ الامكانيات (Ω) وبالتالي فإن حدث واحد سيقع حتما ما بين كل هذه الأحداث .

الشرطان السابقان هما :

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_K = \Omega \\ A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = \dots = A_{k-1} \cap A_K = \emptyset \end{cases}$$

إن قانون بايز يكتب وفق الصيغة التالية :

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i) \times P(A/A_i)}{P(A_1) \times P(A/A_1) + P(A_2) \times P(A/A_2) + \dots + P(A_K) \times P(A/A_K)}$$

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i) \times P(A/A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i) \times P(A/A_i)}$$

مثال (13) : إذا كان لدينا ثلاث صناديق الصندوق الأول فيه (05) كريات بيضاء و (03) كريات سوداء، والصندوق الثاني به (04) كريات بيضاء و (04) كريات سوداء والصندوق الثالث فيه كرة بيضاء و(04) كريات سوداء.

نختار صندوق عشوائيا ونسحب منه كرية.

المطلوب : 1/ ماهو إحتمال أن تكون هذه الكرية من الصندوق الثاني مع العلم أنها بيضاء ؟

2/ ما هو إحتمال أن تكون هذه الكرية سوداء ؟

الحل : نسمي الصناديق الثلاثة بـ A_1 ; A_2 ; A_3

ونسمي سحب الكرة البيضاء بـ (B) ونسمي سحب الكرة السوداء بـ (N)

- حساب إحتمال أن تكون هذه الكرية من الصندوق الثاني مع العلم أنها بيضاء.

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\times P(B/A_2)}{P(A_1)\times P(B/A_1) + P(A_2)\times P(B/A_2) + P(A_3)\times P(B/A_3)}$$

لدينا : $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$

إذن :

$$P(A_2/B) = \frac{(1/3)\times(4/8)}{\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{4}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{5}{12}$$

- حساب إحتمال أن تكون هذه الكرية سوداء .

$$P(N) = P(A_1)\times P(N/A_1) + P(A_2)\times P(N/A_2) + P(A_3)\times P(N/A_3)$$

$$P(N) = \left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{4}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{67}{120}$$

المحور الثاني : ملخص عن المتغيرات العشوائية وقوانين توزيعها

تمهيد :

في الواقع نصادف المتغير العشوائي في مجموعة من الظواهر، ففي الظواهر الكمية مثل دراسة الطول أو الوزن أو عدد الذكور...إلخ يرمز للمتغير بالرمز x ويأخذ قيمه في مجموعة الأعداد الحقيقية ، أما في الظواهر الكيفية (النوعية أو الوصفية) كالمستوى التعليمي أو الجنس(ذكر أو أنثى) فعادة ما يسمى بأعداد معينة مثل عملية تحديد الجنس إذا كان ذكر يرمز لـ x بالواحد (1) و الأنثى بالصفر(0)، أي أن كل تجربة لظاهرة سواءا كمية أو كيفية كل قيم المتغير فيها كمية.

أولا : مفهوم المتغير العشوائي وتحديد أنواعه

1-1/ مفهوم المتغير العشوائي : يعرف المتغير العشوائي على أنه قياس لمتغير ما يأخذ قيم تسمى بقيم المتغير العشوائي والذي هو عبارة عن تطبيق لفراغ الأحداث (Ω) في مجموعة الأعداد الحقيقية التي عادة ما نمثله بـ X وY ، حيث أن هذه القيم تكون مقترن بإحتمالات معينة.

1-2/ أنواع المتغير العشوائي : هناك نوعان من المتغير العشوائي، المتغير العشوائي المنقطع و المتغير العشوائي المستمر.

1-2-1/ المتغير العشوائي المتقطع : هو المتغير الذي يستطيع أن يأخذ عددا من القيم الصحيحة غير الكسرية ضمن مجال تغيره ، و من الأمثلة عن ذلك ما ورد في المثال السابق عندما كانت نتائج المتغير العشوائي جمع الأرقام الناتجة عن تجربة رمي زهرتي نرد مرة واحدة، حيث أن المتغير أخذ أرقام صحيحة، كذلك من الأمثلة الشائعة عن متغير عشوائي متقطع :

- عدد الأفراد في الأسرة.
- عدد الأخطاء المطبعية في صفحة كتاب

1-2-2/ المتغير العشوائي المستمر : هو المتغير الذي يأخذ أي قيمة بين الحد الأدنى و الحد الأعلى لمجال تغيره المحدود أو غير المحدود دون إنقطاع ، و من الأمثلة عن ذلك قياس أطوال أو أوزان فئة معينة حيث أنه مثلا إذا مثلنا المتغير العشوائي بأوزان 20 شخص ولتكن 50.5كلغ و 50.7كلغ و....إلخ فهنا لابد من وضع مجالات محددة لجمع قدر معين من أشخاص لأنه لا يمكن أن نضع كل قيمة من قيم المتغير خاصة بشخص معين، وبالتالي تصبح لدينا مجالات أوفئات.

ثانيا : المتغير العشوائي المتقطع و قانون توزيعه الاحتمالي

2-1/ مفهوم قانون التوزيع الاحتمالي : من خلال عرضنا لمفهوم المتغير العشوائي خلصنا أنه يأخذ قيم حقيقية ضمن فراغ إمكانياته وكل حادث من الحوادث الممكنة التي تشكل إمكانياته تتحقق بإحتمال معين ، هذا الربط بين الحادث وإحتمال وقوعه يسمى بقانون التوزيع الاحتمالي.

إن قانون التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع يمكن تمثيله في الجدول الموالي :

$X=x_i$	x_1	x_2	……	x_k
$P(X=x_i)=P(x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	……	$P(X=x_i)$

يسمى $P(X=x_i)$ بقانون التوزيع الاحتمالي أو بدالة كتلة الاحتمال لمتغير عشوائي متقطع و ذلك إذا وفقط إذا تحقق شرطان أساسيان هما :

1/ $0 \leq P(X=x_i) \leq 1$

2/ $\sum_{i=1}^{k} P(X=x_i)=1$

مثال (14) : لتكن تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين متتابعتين ، حيث (X) يمثل عدد مرات الحصول على وجه (F) في كل تجربة.

المطلوب : - أوجد الحالات الكلية الممكنة من وراء هذه التجربة ؟

- إستخرج دالة كتلة الاحتمال ؟

الحل : عدد الحالات الممكنة هو : $Card(\Omega) = 2\times2=4$

$\Omega=\{ (FF) ; (FP) ; (PF) ; (PP) \}$

- إيجاد قيم المتغير (X_i)

العينة	FF	FP	PF	PP
X_i	2	1	1	0

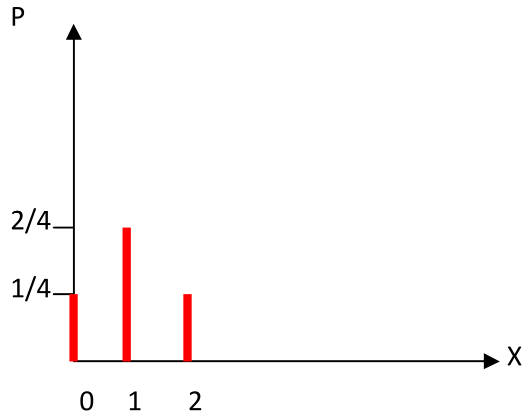
و منه قيم المتغير $X = \{0 ; 1 ; 2\}$ و دالة الكتلة الاحتمالية هي:

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	1/4	2/4	1/4

التمثيل البياني لقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير المتقطع : إذا كان لدينا قانون التوزيع الاحتمالي السابق:

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	1/4	2/4	1/4

فإن التمثيل البياني لقانون التوزيع الاحتمالي أو كما يسمى كذلك بدالة الكتلة الاحتمالية فيكون كالتالي :



2-2/ دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع : إن دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي سواءا كان متقطع أو مستمر هي دالة نطاقها مجموعة الأعداد الحقيقية ($\Re$) و مداها المجال $[0 \quad 1]$ و يرمز لها بالرمز $F(x)$.

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع تكتب بالصيغة التالية :

$$F(x)=P(X\leq x_i)=\sum_x P(X=x_i)$$

$$=\begin{cases} 0 & x<x_1 \\ P(X=x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ P(X=x_1)+P(X=x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \dots\dots. & \\ \dots\dots & \\ 1 & x \geq x_k \end{cases}$$

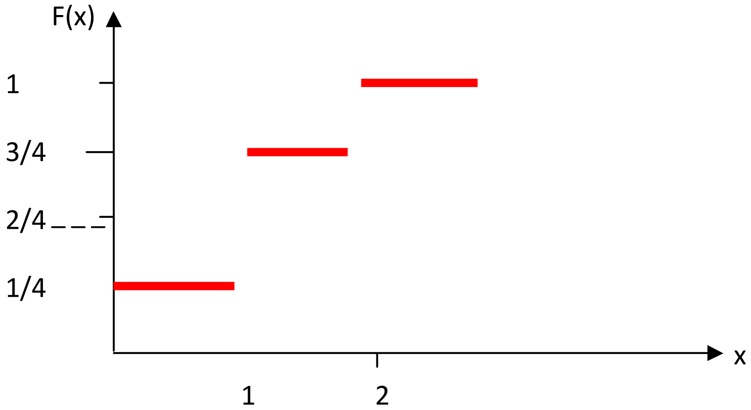
إن دالة التوزيع التراكمي تشبه التكرار التجميعي الصاعد النسبي.

مثال (15) : إنطلاقا من المثال السابق يمكننا تحديد دالة التوزيع التراكمي حيث :

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	1/4	2/4	1/4

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4} & 0\le x<1 \\ \frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4} & 1\le x<2 \\ \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1 & x\ge 2 \end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي : من خلال نتائج المثال السابق يكون التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي:



2-3/ بعض الخصائص العددية لقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سنعرض فيما يلي بعض المقاييس التي ترتبط بالمتغير العشوائي سواءا كانت من مقاييس النزعة المركزية أو مقاييس التشتت أو حتى الشكل.

2-3-1/ التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) : يعتبر التوقع الرياضي مفهوم جد هام في الاحتمالات، أما صيغته الرياضية الخاصة بالمتغير العشوائي المتقطع فهي كالآتي:

$$E(x)=\mu=x_1*P(X=x_1)+x_2*P(X=x_2)+\dots\dots+x_k*P(X=x_k)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}x_iP(X=x_i)$$

2-3-2/ التباين : يقيس التباين تمركز أو تشتت قيم المتغير حول المتوسط (μ) فإذا كانت قيمته صغيرة دل ذلك على تمركز القيم حول المتوسط ، أما إذا كانت قيمه كبيرة فيدل ذلك على أن قيم المتغير مشتتة حول المتوسط (μ)، أما صيغته الرياضية الخاصة بالمتغير العشوائي المتقطع فهي كالآتي :

$$V(X) = \delta^2 = E([x-E(x)]^2) = E[(x-\mu)^2]$$

$$= E(x^2) - \mu^2$$

Et ; $E(X^2) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \,.\, P(X = x_i)$

3-3-2/ الانحراف المعياري : الانحراف المعياري عادة هو الجذر التربيعي للتباين و نكتب :

مثال (16) : إنطلاقا من نتائج المثال السابق رقم (14) المدونة في الجدول الموالي أحسب كل من : التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري ؟

$X=x_i$	0	1	2	المجموع
$P(X = x_i)$	1/4	2/4	1/4	1
$x_i . P(X = x_i)$	0	2/4	2/4	1
$x_i^2 . P(X = x_i)$	0	2/4	1	6/4

- حساب التوقع الرياضي :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = (0)\frac{1}{4} + (1)\frac{2}{4} + (2)\frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

- حساب التباين :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (0^2)\frac{1}{4} + (1^2)\frac{2}{4} + (2^2)\frac{1}{4} - [1^2] = \frac{6}{4} - 1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- حساب الانحراف المعياري :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}7$$

ثالثا : المتغير العشوائي المستمر و قانون توزيعه الاحتمالي

1-3/ قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر : يقال أن للمتغير العشوائي X توزيعا متصلا (مستمرا) إن وجدت دالة غير سالبة f(x) معرفة على الخط الحقيقي R بحيث أنه لأي فترة $A \subseteq R$ يكون :

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

و من الأمثلة الخاصة بالمتغير العشوائي المستمر هي :

- الأوزان و الأطوال
- الفترة الزمنية لاستغراق عملية جراحية وغيرها

أما قانون توزيعه الاحتمالي أو دالة كثافته الاحتمالية f(x) فهي معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية ، و تكون كذلك إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Re$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

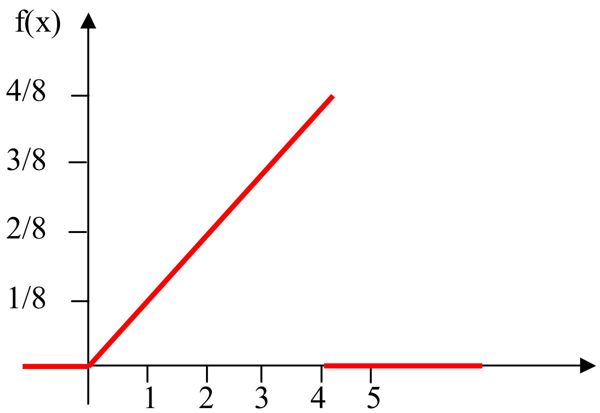
ونعرف إحتمال أن يأخذ المتغير العشوائي (X) قيم محصورة بين a و b أي في المجال [a b] كمايلي:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير المستمر : ليكن المتغير العشوائي المستمر ذو الدالة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8} & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية يكون كالآتي :



3-2/ دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي مستمر : هي دالة متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية و تعرف كمايلي : $F(x) = P(X \le x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

و مع إفتراض أن الدالة $F(x)$ قابلة للاشتقاق فإن دالتها المشتقة هي دالة الكثافة الاحتمالية و نكتب :

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x)$$

مثال (17) : نعود إلى المثال السابق سنقوم بتحديد دالة التوزيع التراكمي، حيث دالة الكثافة الاحتمالية كانت كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & 0 \le x \le 4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

البحث عن الدالة $F(x)$:

- عندما يكون $(x < 0)$ فإن :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dx = 0$$

- عندما يكون $(0 \le x < 4)$ فإن :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} (0)\, dx + \int_{0}^{x} \left(\frac{x}{8}\right) dx$$

$$= \left|\frac{x^2}{16}\right|_0^x = \frac{x^2}{16}$$

- عندما يكون $(4 \le x < +\infty)$ فإن:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} (0)dx + \int_{0}^{4} \left(\frac{x}{8}\right) dx + \int_{4}^{+\infty} (0)\, dx = \int_{0}^{4} \left(\frac{x}{8}\right) dx$$

$$= \left|\frac{x^2}{16}\right|_0^4 = \frac{1}{16}(4)^2 = 1$$

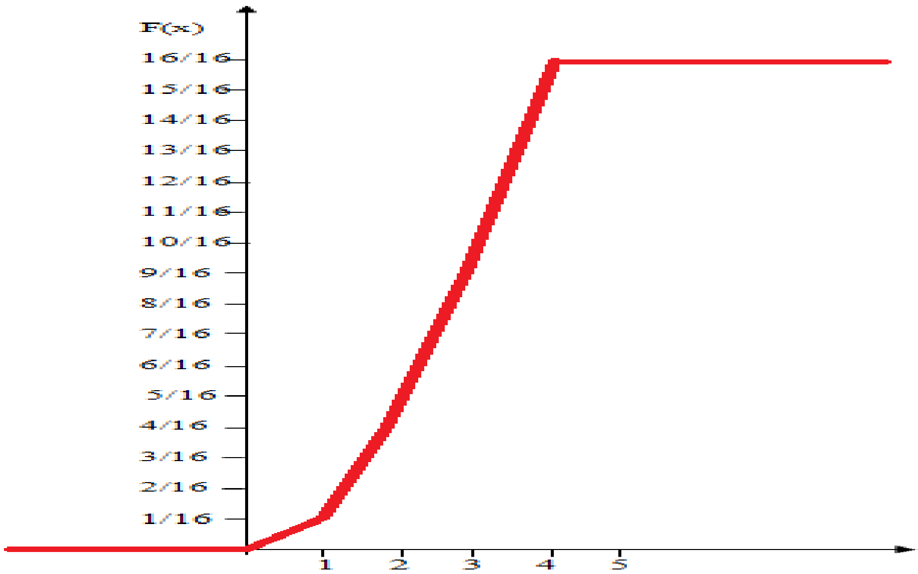
و منه $F(x)$ هي :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & 0 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي للمتغير المستمر :إن التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي مستمر يختلف عن التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي لمتغير متقطع ، و لتوضيح ذلك نعود إلى المثال السابق حيث وجدنا أن دالة التوزيع التراكمي هي :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x^2}{16} & 0 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

أما تمثيلها البياني فيكون كالتالي :



3-3/ بعض الخصائص العددية لقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر : سنعرض بعض المقاييس التي ترتبط بالمتغير العشوائي المستمر سواءا كانت من مقاييس النزعة المركزية أو مقاييس التشتت أو حتى الشكل.

3-3-1/ التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) : إن التوقع الرياضي أو الأمل الرياضي لمتغير عشوائي مستمر يكتب بالصياغة الرياضية التالية :

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

3-3-2/ التباين : إن التباين لمتغير عشوائي مستمر يكتب بالصياغة الرياضية التالية :

$$V(x) = \delta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2\, f(x)dx$$

مثال (18) : لتكن دالة الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & 0 \le x \le 4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

المطلوب : أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري ؟

الحل :

- حساب التوقع الرياضي :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x(0)dx + \int_{0}^{4} x\left(\frac{x}{8}\right)dx + \int_{4}^{+\infty} x(0)dx$$

$$= \int_{0}^{4}\left(\frac{x^2}{8}\right)dx = \frac{1}{8}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{4^3}{3} - 0\right) = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$$

- حساب التباين :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

نحسب : $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2(0)dx + \int_{0}^{4} x^2\left(\frac{x}{8}\right)dx + \int_{4}^{+\infty} x^2(0)dx$$

$$= \int_{0}^{4}\left(\frac{x^3}{8}\right)dx = \frac{1}{8}\left|\frac{x^4}{4}\right|_0^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{4^4}{4} - 0\right) = \frac{256}{32} = 8$$

إذن التباين يحسب كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 8 - \left[\left(\frac{8}{3}\right)^2\right] = \frac{72 - 64}{9} = \frac{8}{9} = 0,89$$

- حساب الانحراف المعياري :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,89} \approx 0,94$$