كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم التجارية

السنة الثانية ليسانس

ملخص مقياس الاحصاء3

الاستاذ: العمري الحاج

الموسم 2022/2021

المحور 1: نظرية المعاينة

تمهيد:

تتمتع نظرية المعاينة بأهمية بالغة في عديد الميادين، وذلك لما **يستحيل أو يتعذر علينا القيام بالمسح الشامل**، كدراسة سلوك نوع معين من الأسماك مثلا، أو دراسة جودة منتوج معين ، لذا يلجأ الباحث إلى اختيار عينة جزئية من المجتمع الاحصائي بالطرق العلمية المعروفة ومن ثم يحاول تعميم النتائج على كل المجتمع الاحصائي، وذلك **وفق الطرق العلمية المعروفة**، ونحن في هذا الفصل سنختصر فقط على المعاينة العشوائية البسيطة، من خلال الحديث عن التوزيع الاحتمالي لكل من متوسط العينة وكذا الانحراف المعياري. والفرق بينهما

1–مفاهيم عامة

1–1–المجتمع الإحصائي

المجتمع الاحصائي، أو مجتمع البحث عبارة عن مجموعة من الوحدات الاحصائية **التي تشترك في صفة معينة**[1] موضوع البحث، وهذه الوحدات الاحصائية تختلف باختلاف موضوع البحث، فمثلا إذا كان الباحث يريد دراسة سلوك نوع معين من الاسماك، فإن الوحدات الاحصائية هي هذا السمك .والمجتمع ينقسم إلى قسمين:

- **مجتمع إحصائي محدود:** هو الذي تكون فيه كل الوحدات الاحصائية معروفة، مثل المسوح الشاملة، كتعداد السكان، ففي هذه الحالة الوحدات الاحصائية الممثلة بالسكان معروفة ومسجلة في شكل قوائم (هذه القوائم تسمى بإطار المعاينة وهي جد مهمة)، ويرمز لحجم المجتمع ب N
- . **مجتمع إحصائي غير محدود:** هو الذي تكون فيه الوحدات الاحصائية غير معروفة كليا، أو غير محصورة مثل مجتمع نوع معين من الأسماك كما أشرنا سابقا، فمن المستحيل معرفة عدد هذه الأسماك بشكل دقيق.

كذلك نقول أن المجتمع الاحصائي هو عبارة عن مجموعة من المتغيرات العشوائية ($X_1, X_2, \dots X_N$) التي تبع نفس التوزيع الاحتمالي، ويتميز هذا المجتمع بما يسمى المعلمات وهي قيمة رقمية مثل المتوسط والتباين ويحسبان كالآتي:

$$\mu = \frac{\sum_1^N X_i}{N} = \frac{\sum_1^N x_i}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

حيث x_i *هي تحقق* X_i *في المجتمع*

1–2– العينة

العينة هي جزء من المجتمع الاحصائي، حجمها n، ويتم سحبها بالطرق العلمية المعروفة من أجل الحكم على الكل، "فبدراسة صفات العينة يتمكن الباحث من وصف خواص المجتمع وذلك بتعميم النتائج التي يحصل عليها من دراسة العينة، ودقة هذا التعميم مرتبطة بحجم العينة وبكيفية اختيار وحداتها". وهذا ما يعرف **بنظريات المعاينة** ويتم اللجوء إلى خيار المسح بالعينة في حالة استحالة القيام بالمسح الشامل .مثل ما أشرنا سابقا إلى دراسة مجتمع الأسماك، أو في حالة تعذر ذلك نظرا لنقص الميزانية أو ضيق الوقت، وغير ذلك من الأسباب.

مع الاشارة إلى أن العينات أو المعاينة تنقسم إلى **معاينة عشوائية** ومعاينة **غير عشوائية**، ولكل منها أنواع مهمة، ولكن في هذا المحور سنتكلم فقط عن **المعاينة العشوائية البسيطة** وهي تتميز عن باقي العينات العشوائية في أن لكل وحدة احصائية **نفس الاحتمال** لتكون ضمن العينة، وكذا كل الوحدات لها **نفس الخصائص**. والعينات العشوائية البسيطة يمكن سحبها:

- بالارجاع ويكون عددها N^n
- ويمكن سحبها بدون ارجاع ويكون عددها $C_n^N = \frac{N!}{(N-n)!n!}$

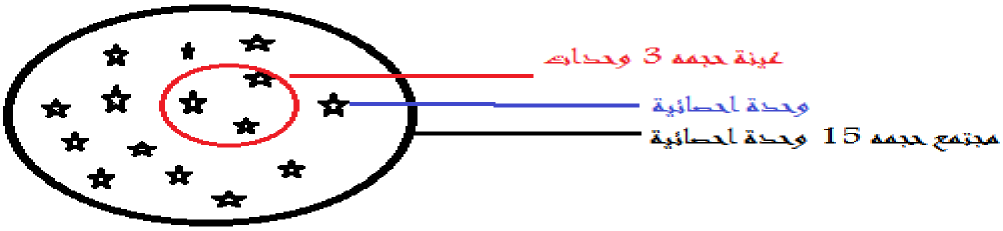
وعلى غرار المجتمع، فإن العينات تميزها قيم رقمية تسمى احصائيات مثل التباين والمتوسط ويحسبان كالاتي:

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$$

حيث دائما الرموز الكبيرة تعني المتغيرات العشوائية والصغيرة تعني تحققها في العينة المختارة.

[1]–الوحدات الإحصائية تشترك في صفة معينة في بعض أنواع العينات فقط، مثل العينة العشوائية البسيطة والمنتظمة، أما باقي العينات مثل عينة الطبقات، فان الوحدات الاحصائية تكون متجانسة داخليا فقط، أي متجانسة داخل كل طبقة، والطبقات تختلف فيما بينها.

الشكل 1: شكل يوضح المجتمع الاحصائي والعينة المسحوبة منه



2–توزيع المعاينة للمتوسط

2–1–حساب المتوسط والتباين

اذا سحبت عينة عشوائية بسيطة $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ من مجتمع ما فانه سنحصل على عدد من المتوسطات عددها مرتبط بطريقة السحب كما أشرنا سابقا (قائمة أو توفيقة) وبالتالي فان هذه المتوسطات تنتهج سلوك متغيرة عشوائية $\bar{X}$ والتي سيكون لها متوسط وتباين يحسبان كما يلي:

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \frac{\sum_1^n x_i}{n} = \bar{x} = \mu،$$

أي أن متوسط المعاينة هو نفسه متوسط المجتمع، وسيتضح ذلك من خلال المثال. أما التباين فيساوي إلى:

$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$	وهذا في حالة السحب بالارجاع
$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$	في حالة السحب بالارجاع
حيث ، $\frac{N-n}{N-1}$ يسمى بمعامل الارجاع	

ملاحظات:

– في الحالة التي لا يذكر فيها كيفية السحب، فان:

$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$	وهذا في حالة $\frac{n}{N} < 0.10$
$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$	في حالة $\frac{n}{N} > 0.10$

– إذا كان تباين المجتمع مجهول، فإنه يعوض بالتباين المحسوب في العينة والمصحح، أي:

$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{S_C^2}{n}$	وهذا في حالة $\frac{n}{N} < 0.10$، أو في حالة السحب بالارجاع
$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{S_C^2}{n}(1 - \frac{n}{N})$	في حالة $\frac{n}{N} > 0.10$، أو في حالة السحب بدون ارجاع
حيث: s_c^2 يسمى التباين المصحح المحسوب في العينة، ويحسب كما يلي: $$s_c^2 = \frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$	

مثال 2–1:

تم سحب عينة عشوائية حجمها 2 مشاهدة من مجتمع حجمه *3* وعناصره هي: $\{1،2، 3\}$، والمطلوب أثبت ما يلي:

- $E(\overline{X}) = \mu$ في حالة السحب بالإرجاع ثم بدون إرجاع.
- $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$ في حالة السحب بالإرجاع.
- $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ في حالة السحب بدون إرجاع.

الحل:

أولا، نقوم بحساب متوسط وتباين المجتمع، أي

$$\mu = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

$$\sigma^2 = \sum \frac{(X_i - \mu)^2}{N} = \frac{+(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2}{3} = 2/3$$

ثانيا، نقوم بحساب متوسط وتباين $\overline{X}$ في حالة السحب بالارجاع: في حالة السحب بالارجاع فان عدد العينات المسحوبة هو $3^2 = 9$، والجدول الاتي يوضحها

	1	2	3
1		$\frac{2+1}{2} = 1.5$	$\frac{3+1}{2} = 2$
2	$\frac{1+2}{2} = 1.5$	$\frac{2+2}{2} = 2$	$\frac{3+2}{2} = 2.5$
3	$\frac{1+3}{2} = 2$	$\frac{2+3}{2} = 2.5$	$\frac{3+3}{2} = 3$

الان، لحساب المتوسط نستخدم الجدول الاتي:

1	1	1*1=1
1.5	2	1.5*2=3
2	3	2*3=6
2.5	2	2.5*2=5
3	1	3*1=3
المجموع	9	18

إذا:

$$\mu_{\overline{X}} = \frac{18}{9} = 2 = \mu$$

ولحساب تباين $\bar{X}$ **نستخدم الجدول الاتي**

1	1	$(1-2)^2*1=1$
1.5	2	$(1.5-2)^2*2=0.5$
2	3	$(2-2)^2*3=0$
2.5	2	$(2.5-2)^2*2=0.5$
3	1	$(3-2)^2*1=1$
المجموع	9	3

إذا:

$$\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}*\frac{2}{2}=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

ثالثا، نقوم بحساب متوسط وتباين $\bar{X}$ في حالة السحب بدون ارجاع: في حالة السحب بدون ارجاع فان عدد العينات المسحوبة هو $3=\frac{3!}{(3-2)!*2!}$، والجدول الاتي يوضحها

	1	2	3
1		$\frac{2+1}{2}=1.5$	$\frac{3+1}{2}=2$
2	/	/	$\frac{3+2}{2}=2.5$
3	/	/	/

الان، لحساب المتوسط نستخدم الجدول الاتي:

1.5	1	1.5*1=1.5
2	1	2*1=2
2.5	1	2.5*1=2.5
المجموع	3	6

إذا:

$$\mu_{\bar{X}}=\frac{6}{3}=2=\mu$$

ولحساب تباين $\bar{X}$ **نستخدم الجدول الاتي**

1.5	1	$(1.5-2)^2*1=0.25$
2	1	$(2-2)^2*1=0$
2.5	1	$(2.5-2)^2*1=0.25$
المجموع	3	0.5

إذا:

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} = \frac{\frac{2}{3}}{2} * \frac{3-2}{3-1} = \frac{2}{6} * \frac{1}{2} = \frac{\sigma^2}{n} * \frac{N-n}{N-1}$$

2-2–التوزيع الاحتمالي ل $\bar{X}$

التوزيع الاحتمالي ل $\bar{X}$ مرتبط بنوع التوزيع الاحتمالي للمجتمع الاحصائي وبحجم العينة وبمعلومية تباين المجتمع، وذلك وفق التفصيل الآتي:

2-2-1–المجتمع الاحصائي موزع توزيع طبيعي

في هذه الحالة التوزيع الاحتمالي ل $\bar{X}$ مرتبط بتباين المجتمع على النحو الآتي:

أولا/ تبيان المجتمع معلوم: أذا كان تباين المجتمع الطبيعي معلوم فإن:

$\bar{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma^2}{n})$	وهذا في حالة $\frac{n}{N} < 0.10$، أو في حالة السحب بالارجاع
$\bar{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma^2}{n} * \frac{N-n}{N-1})$	في حالة $\frac{n}{N} > 0.10$، أو في حالة السحب بدون ارجاع

ثانيا/ تبيان المجتمع مجهول: إذا كان تباين المجتمع الطبيعي مجهول فإن التوزيع الاحتمالي ل $\bar{X}$ مرتبط بحجم العينة على النحو الآتي

هذا في حالة $n \geq 30$	$\bar{X} \sim N(\mu; \frac{S_C^2}{n})$	وهذا في حالة $\frac{n}{N} < 0.10$، أو في حالة السحب بالارجاع
	$\bar{X} \sim N(\mu; \frac{S_C^2}{n}(1-\frac{n}{N}))$	في حالة $\frac{n}{N} > 0.10$، أو في حالة السحب بدون ارجاع
في حالة $n < 30$	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S_C^2/n}} \sim t(n-1)$ حيث $t(n-1)$ هو توزيع ستودنت بدرجة حرية $(n-1)$	وهذا في حالة $\frac{n}{N} < 0.10$، أو في حالة السحب بالارجاع
	حيث: s_c^2 يسمى التباين المصحح المحسوب في العينة، ويحسب كما يلي: $s_c^2 = \frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$	

2-2-2–المجتمع الاحصائي موزع توزيع غير طبيعي

إذا سحبت عينة حجمها n من مجتمع إحصائي متوسطه μ وتباينه σ^2، فإنه بغض النظر عن توزيع المجتمع الاحصائي فان التوزيع الاحتمالي ل $\bar{X}$ هو بالتقريب يتبع التوزيع الطبيعي، وذلك باستخدام نظرية النهاية المركزية. أي:

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}}}} \sim N(0,1)$$

ملاحظة: **في حالة** $\frac{n}{N} > 0.10$، أو في حالة السحب بدون ارجاع، فإن

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$$

2-2-3-حساب الاحتمالات المتعلقة ب $\bar{X}$

تذكير بالتوزيع الطبيعي وتوزيع ستودنت