

# **Chapitre 4**

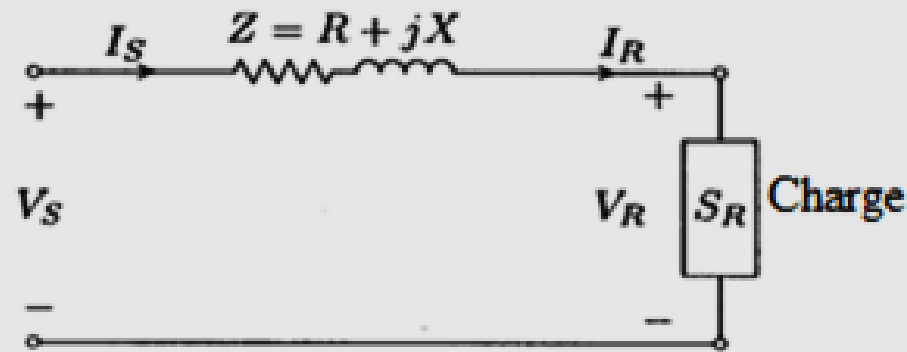
## **LES MODELES DES LIGNES ELECTRIQUES**

### III.1. Modèle d'une ligne courte

La capacité peut souvent être ignorée sans une erreur considérable si les lignes sont d'une longueur de moins de 80 km (60 Hz) ou n'excédant pas 69 kV. Le modèle de la ligne courte (Fig.17) est obtenu par :

$$Z = z.l = (r + j\omega L).l = R + jX$$

Où  $r$ ,  $L$  sont la résistance et l'inductance par phase par unité de longueur respectivement,  $l$  est la longueur de la ligne.



**Fig.17.** Modèle d'une ligne courte.

S: Sending end (émetteur)  
R: Receiving end (destinataire)

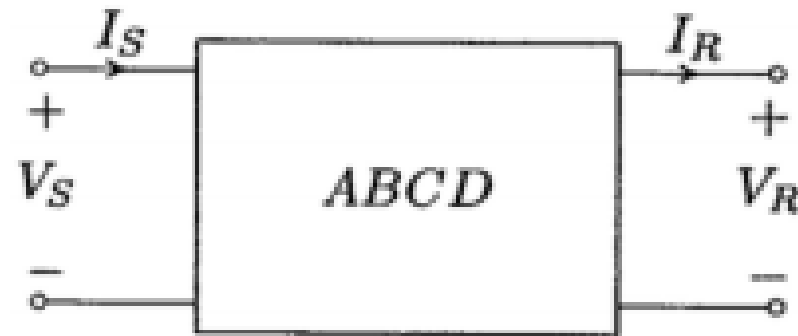
$$I_R = \frac{S_{R(3\phi)}^*}{3V_R^*}$$

$$V_S = V_R + ZI_R$$

$$I_S = I_R$$

$V_S = V_R + ZI_R$  et puisque la capacité shunt es tnégligée, donc  $I_S = I_R$ .

La ligne d etransport peut être représentée par un quadripôle comme le montre la Fig. 18.



**Fig.18.** Représentation à deux ports d'une ligne de transport.

$$\begin{cases} V_S = AV_R + BI_R \\ I_S = CV_R + DI_R \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

Trouver les éléments de la matrice A , B , C , D ?

$$V_S = V_R + ZI_R$$

$$I_S = I_R$$

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

$$A = 1 \quad B = Z \quad C = 0 \quad D = 1$$

S: Sending end (émetteur)

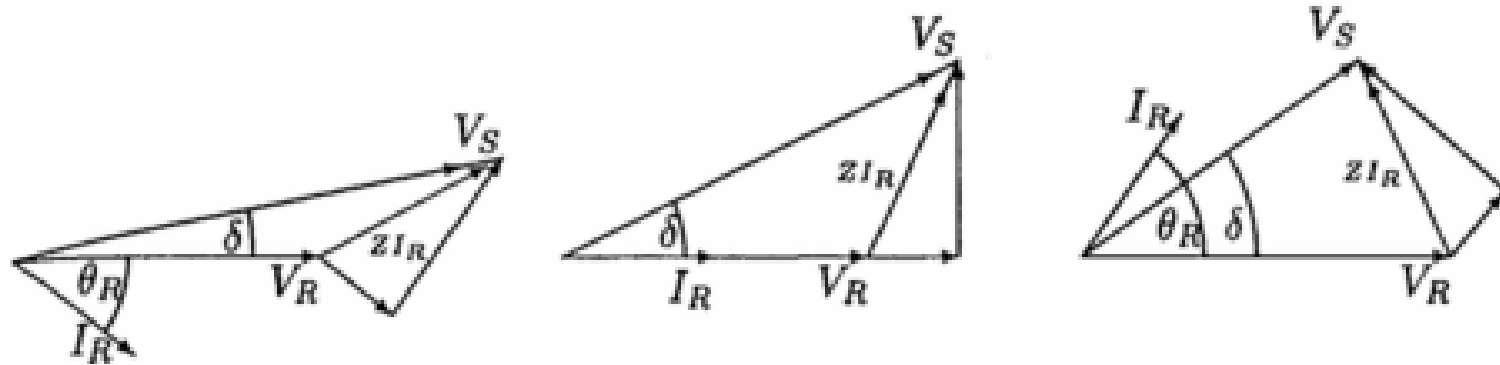
R: Receiving end (destinataire)

## Régulation de tension de la ligne

$$VR = \frac{|V_{R(NoLoad)}| - |V_{R(FullLoad)}|}{|V_{R(FullLoad)}|} \times 100\%$$

A charge nulle  $I_R = 0$  ; donc :  $V_{R(NoLoad)} = \frac{V_S}{A}$ . Pour une ligne courte  $A=1$  et  $V_{R(NoLoad)} = V_S$ .

La régulation de la tension de la ligne dépend du facteur de puissance de la charge. La régulation de la tension sera plus faible pour des Facteurs de puissance en retard faible. Pour des charges capacitives, c.à.d. Fp en avance, la régulation peut devenir négative (Fig. 19).



a) Charge à Fp retard      b) charge à Fp unitaire      c) charge à Fp en avance

**Fig. 19.** Diagramme de phase pour une ligne courte.

Une fois la tension à l'entrée est calculée, la puissance  $S_{S(3\phi)} = 3V_S I_S^*$ , et les pertes totales de la ligne sont données par :  $S_{L(3\phi)} = S_{S(3\phi)} - S_{R(3\phi)}$  et le rendement de la ligne est donnée par :  $\eta = \frac{P_{R(3\phi)}}{P_{S(3\phi)}}$  avec  $P_{R(3\phi)}$  et  $P_{S(3\phi)}$  sont les puissances actives totales à la sortie et à la rentrée de la ligne respectivement.

$$S_{S(3\phi)} = 3V_S I_S^* \quad S_{L(3\phi)} = S_{S(3\phi)} - S_{R(3\phi)} \quad \eta = \frac{P_{R(3\phi)}}{P_{S(3\phi)}}$$

### III.2. Modèle d'une ligne moyenne

L'admittance shunt, habituellement la capacité pure, est incluse dans les calculs pour une ligne de longueur moyenne ( $80\text{km} < l < 250\text{km}$ ). Si l'admittance totale de la ligne est divisée en deux parties égales placées aux extrémités émettrice et réceptrice de la ligne, le circuit est appelé un  **$\pi$  nominal**. Nous nous référons à la Fig. 20 pour dériver des équations.  $Z = (r + j\omega L).l$  et  $Y = (g + j\omega C).l$  sont l'impédance et l'admittance shunt totales de la ligne.

$r$ ,  $l$ ,  $g$  et  $c$  sont la résistance, l'inductance, la conductance et la capacité linéiques de la ligne.

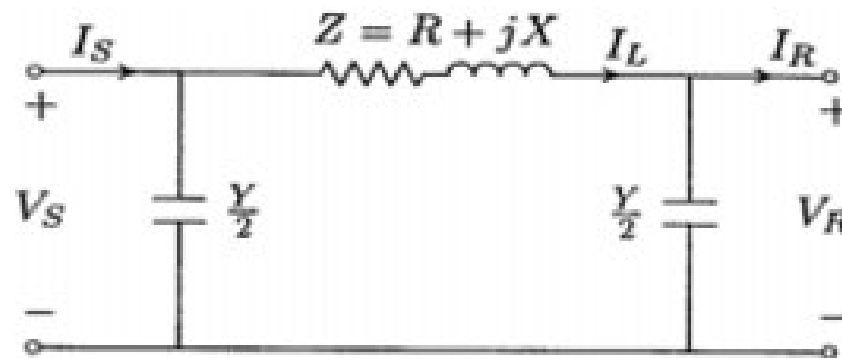
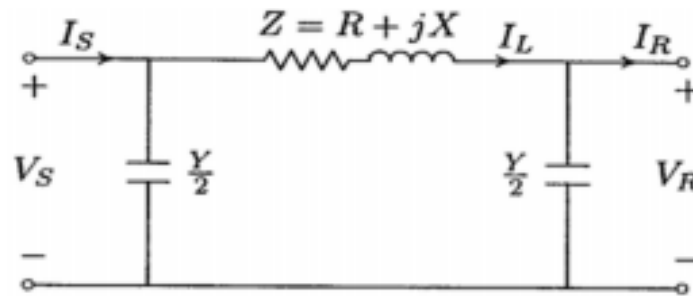


Fig.20. Modèle en  $\pi$  nominal d'une ligne de longueur moyenne.



**Fig.20.** Modèle en  $\pi$  nominal d'une ligne de longueur moyenne.

Par application des lois de Kirchhoff en courant KCL et en tension KVL :

$$\begin{cases} I_L = I_R + \frac{Y}{2}V_R \\ V_S = V_R + ZI_L \end{cases} \Rightarrow V_S = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right)V_R + ZI_R$$

Le courant à l'extrémité émettrice est :  $I_S = I_L + \frac{Y}{2}V_S$ , en substituant pour  $I_L$  et  $V_S$  :

$$I_S = Y \left(1 + \frac{ZY}{4}\right)V_R + ZI_R$$

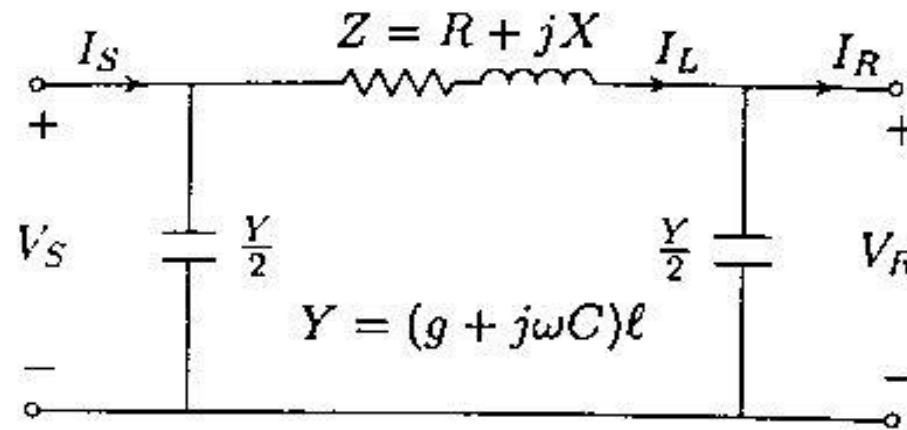
Pour une écriture en quadripole ABCD pour le modèle  $\pi$  nominal, nous avons :

$$A = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right); \quad B = Z; \quad C = Y \left(1 + \frac{ZY}{4}\right); \quad D = A = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right)$$

Le déterminant du système matriciel  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  est égal à 1 :  $AD - BC = 1$

Donc, on peut écrire pour la deuxième extrémité :  $\begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} \quad (*)$

Modèle d'une ligne moyenne  
pour  $l > 80$  km



$$I_L = I_R + \frac{Y}{2} V_R$$

$$V_S = V_R + Z I_L$$

$$V_S = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right) V_R + Z I_R$$

$$I_S = I_L + \frac{Y}{2} V_S$$

$$V_S = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right) V_R + Z I_R$$

$$I_S = Y \left(1 + \frac{ZY}{4}\right) V_R + \left(1 + \frac{ZY}{2}\right) I_R$$

$$A = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right) \quad B = Z$$

$$C = Y \left(1 + \frac{ZY}{4}\right) \quad D = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix}$$

### III.3. Modèle d'une ligne longue

Pour les lignes courtes et moyennes, des modèles raisonnablement exacts sont obtenus en assumant que les paramètres de la ligne sont à constantes localisés. Pour les lignes  $\geq 250\text{km}$  et pour une solution plus exacte, l'effet exact des paramètres distribués doit être considéré. Dans cette section, les expressions des tensions et des courants en chaque point sur la ligne sont dérivées. Puis en se basant sur ces équations un modèle en  $\pi$  équivalent est obtenu pour la ligne longue. Le fig. 21 montre une phase d'une ligne distribuée de longueur  $l$  km.

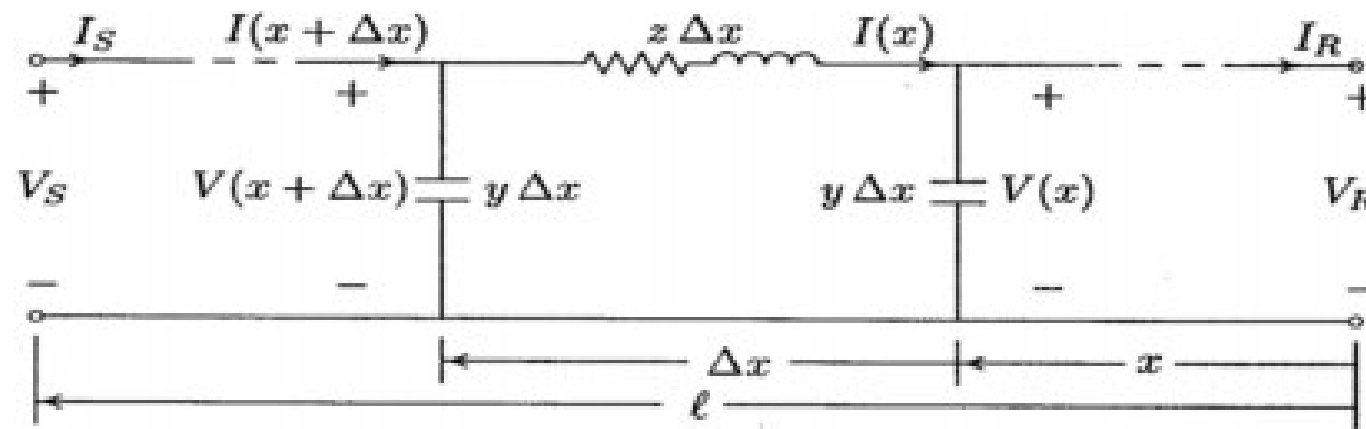


Fig.21. Ligne longue à paramètres distribués.

$z = (r + j\omega L)$  et  $y = (g + j\omega C)$  sont l'impédance et l'admittance shunt de la ligne/km ou m.

Par application des lois de Kirchhoff en tension KVL :

$$V(x + \Delta x) = V(x) + z\Delta x \cdot I(x) \Rightarrow \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} = z \cdot I(x)$$

En posant  $\Delta x \rightarrow 0$ :  $\frac{dV(x)}{dx} = z \cdot I(x)$  (\*)

De même, Par application des lois de Kirchhoff en tension KVL :

$$I(x + \Delta x) = I(x) + y\Delta x \cdot V(x + \Delta x) \Rightarrow \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = y \cdot V(x + \Delta x)$$

En posant  $\Delta x \rightarrow 0$ :  $\frac{dI(x)}{dx} = y \cdot V(x)$ , en dérivant la 1ere équation et en substituant par la 2ème :

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = z \frac{dI(x)}{dx} = zy \cdot V(x), \quad \text{mettons: } \gamma^2 = zy \Rightarrow \frac{d^2V(x)}{dx^2} - \gamma^2 \cdot V(x) = 0$$

La solution de cette équation est de la forme :  $V(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}$  (\*\*), où  $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{zy} = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)}$  est la constante de propagation,  $\alpha$  est la constante d'atténuation, et  $\beta$  est la constante de phase mesurée en radian par unité de longueur.

$$\text{à partir de (*): } I(x) = \frac{1}{z} \cdot \frac{dV(x)}{dx} = \frac{\gamma}{z} (A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}) = \sqrt{\frac{\gamma}{z}} (A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x})$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_c} (A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}) \quad (***) \Rightarrow Z_c = \sqrt{\frac{z}{y}}$$

Pour trouver  $A_1$  et  $A_2$ , nous notons que lorsque  $x = 0$ ,  $V(x) = V_R$ ,  $I(x) = I_R$ , à partir de (\*\*) et (\*\*\*) :

$$A_1 = \frac{V_R + Z_c I_R}{2} \quad ; \quad A_2 = \frac{V_R - Z_c I_R}{2} \quad , \text{ en substituant dans (**) et (**), nous avons:}$$

$$V(x) = \frac{V_R + Z_c I_R}{2} e^{\gamma x} + \frac{V_R - Z_c I_R}{2} e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{\frac{V_R}{Z_c} + I_R}{2} e^{\gamma x} - \frac{\frac{V_R}{Z_c} - I_R}{2} e^{-\gamma x}$$

Les équations de la tension et du courant peuvent être réarrangées sous forme :

$$V(x) = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} V_R + Z_c \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} I_R = \cosh \gamma x V_R + Z_c \sinh \gamma x I_R$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_c} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} V_R + \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} I_R = \frac{1}{Z_c} \sinh \gamma x V_R + \cosh \gamma x I_R$$

En mettant  $x = l$ ,  $V(l) = V_S$ ,  $I(l) = I_S$ , les équations de tension et du courant deviennent :

$$\begin{cases} V(l) = \cosh \gamma l V_R + Z_c \sinh \gamma l I_R & (* 1) \\ I(l) = \frac{1}{Z_c} \sinh \gamma l V_R + \cosh \gamma l I_R & (* 2) \end{cases} \Rightarrow A = \cosh \gamma l, B = Z_c \sinh \gamma l, C = \frac{1}{Z_c} \sinh \gamma l, \text{ et } D = A$$

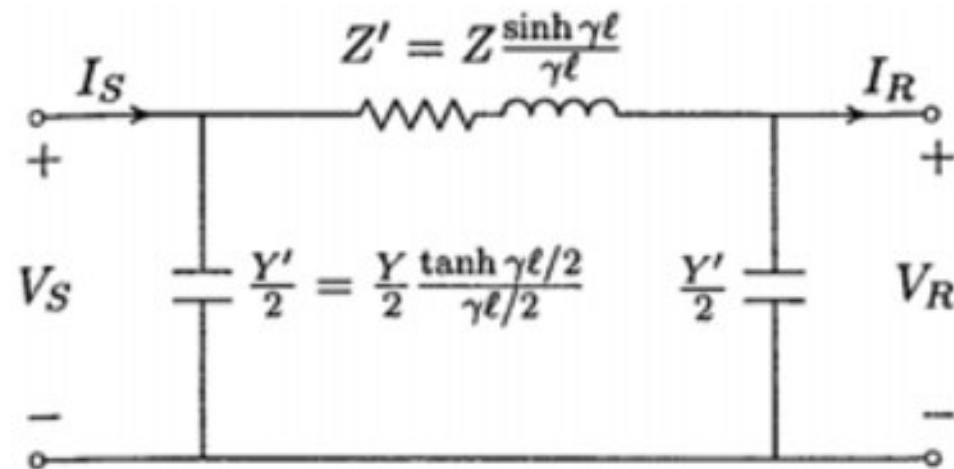
Il est maintenant possible de trouver un modèle  $\pi$  équivalent exact, montré en Fig.22, pour remplacer les constantes ABCD du quadripôle. D'une façon similaire aux expressions d'une ligne moyenne obtenues pour le modèle en  $\pi$  nominal, pour le modèle  $\pi$  équivalent, nous avons :

$$V_S = \left(1 + \frac{Z'Y'}{2}\right) V_R + Z' I_R$$

$$I_S = Y' \left(1 + \frac{Z'Y'}{4}\right) V_R + Z' I_R$$

En comparant ces deux équations avec (\* 1) et (\* 2) et en notant que  $\tanh \frac{\gamma l}{2} = \frac{\cosh \gamma l - 1}{\sinh \gamma l}$ , nous avons :

$$Z' = Z_c \sinh \gamma l = Z \frac{\sinh \gamma l}{\gamma l}; \quad \frac{Y'}{2} = \frac{1}{Z_c} \tanh \frac{\gamma l}{2} = \frac{Y \tanh \gamma l / 2}{2 \gamma l / 2}$$



**Fig.22.** Modèle en  $\pi$  équivalent pour une ligne longue.