Corrigé type (Examen 22.01.17)

Ondes et vibrations

2016 / 2017

EXO1 (5 pts)

1- $x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$

avec : $\delta = \dfrac{\alpha}{2m}$

$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ 2,0

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ pulsation propre.

A et φ 2 constantes d'intégration qui sont déterminées des C.I.

2- $\dfrac{\omega_a}{\omega_0} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{\omega_0^2 - \delta^2}{\omega_0^2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$ 1,0

$\delta = 10\,s^{-1} \Rightarrow \boxed{\alpha = 4\,N.s\,m^{-1}}$

3-a $Q = \dfrac{1}{2\xi_0} = \dfrac{\omega_0}{2\delta} = \boxed{1}$ 1,0

b- L'amplitude à t_1 :

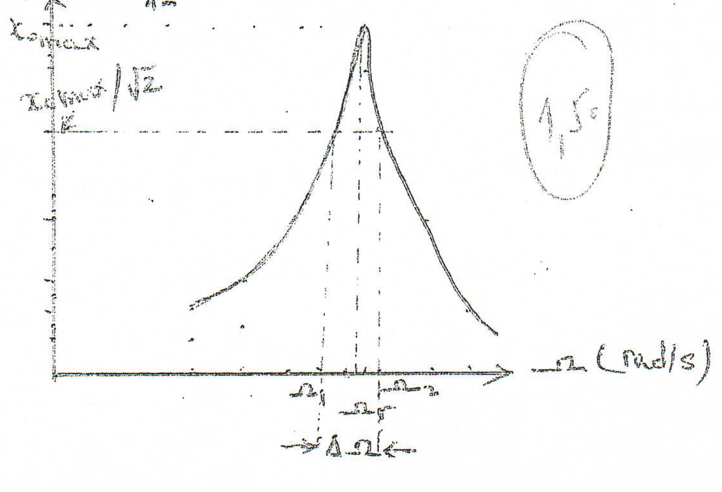
$x_1 = A e^{-\delta t_1}$

l'amplitude à $t_1 + 10T_a$ 1,0

$x_{10} = A e^{-\delta(t_1 + 10T_a)}$

donc : $\dfrac{x_{10}}{x_1} = e^{-\delta(10T_a)} = \boxed{0{,}69}$

EXO2 : (5 pts)



1,5

2- Le graphe représente la courbe de résonance du système. 0,5

de ce graphe on tire :

$\boxed{\Omega_r = 20{,}11\ \text{rad/s}}$ 0,5

Ω_r : pulsation de résonance 0,5

3-a- $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$

Ω_2 et Ω_1 les 2 pulsations de coupure qui correspondent à :

$x_0 = \dfrac{x_{0max}}{\sqrt{2}} = 1{,}6$ cm d'où on tire (du graphe) :

$\Omega_1 = 17{,}8$ rad/s 1,0

$\Omega_2 = 21{,}7$ rad/s

donc : $\boxed{\Delta\Omega = 3{,}9\ \text{rad/s}}$

b- On sait que :

$\Delta\Omega = 2\delta = 2\xi_0\omega_0$

$\Omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi_0^2}$ 1,0

les 2 relations donnent :

$$\boxed{\begin{aligned}\xi_0 &= 0{,}098\\ \omega_0 &= 19{,}92\ \text{rad/s}\end{aligned}}$$

EXO3 : (7 pts)

1- Equation différentielle du mouvement

$s = 1 \Rightarrow$ le système est un système à 1 degré de liberté car :

pour le disque (1 seule rotation) 0,5

$\Rightarrow \theta$

pour la masse : $y = R\theta + y_0$

donc la coordonnée généralisée est $q(t) = \theta(t)$

$\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = T - U$ (0,5)

$T = T_m + T_d = \frac{1}{2} m R^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\dot\theta^2$

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}M\right)R^2\dot\theta^2}$ (0,5)

$U = U_m + U_k$

$-\frac{dU_m}{dy} = mg \Rightarrow U_m(y) - U_m(y_0) = -mg(y - y_0)$

$y - y_0 = R\theta \Rightarrow$

$\boxed{U_m(\theta) = -mgR\theta + U_m(0)}$ (0,5)

$-\frac{dU_k}{dx_k} = -k(\Delta l + x_k)$

$\Delta l = R.\gamma$ allongement du ressort à l'équilibre et γ c'est l'angle correspondant.

x_k : allongement / à la position d'équilibre (du mvt)

$\Rightarrow U_k(x_k) = \frac{1}{2}k(\Delta l + x_k)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + U_k(0)$

sachant que $x_k = a\theta$ (0,5)

alors :

$\boxed{U_k(\theta) = \frac{1}{2}k r^2\theta^2 + k(\Delta l).\theta + U_k(0)}$

Donc :

$U(\theta) = (-mgR + k\Delta l)\theta + \frac{1}{2}kr^2\theta^2 + \overbrace{U_m(0) + U_k(0)}^{c}$ (0,5)

à l'équilibre nous avons :

$\left.\frac{dU(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow k\Delta l - mgR = 0$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{mgR}{kr}}$ (0,5)

c.à.d. c'est un angle $\gamma > 0$.

l'expression de U sera :

$\boxed{U(\theta) = \frac{1}{2}kr^2\theta^2 + c}$ (0,5)

d'où : $\boxed{\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}M\right)R^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}k\ldots}$

L'équation de Lagrange pour un système à 1 degré de liberté :

$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$ (0,5) $\Rightarrow$

$\boxed{\ddot\theta + \frac{kr^2}{\left(m + \frac{1}{2}M\right)R^2}\theta = 0}$ (0,5)

2 – L'équation précédente admet une solution sinusoïdale de pulsation : $\omega_0 = \sqrt{\frac{kr^2}{\left(m + \frac{1}{2}M\right)R^2}}$ (0,5)

A.N : $\boxed{\omega_0 = 6{,}54\ \text{rad/s}}$

donc :

$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$

C.I : $\theta(t=0) = 5°$ $\Rightarrow$ $\theta_0\cos\varphi = \ldots$

$\dot\theta(t=0) = 0$ $\quad -\theta_0\omega_0\sin\varphi \ldots$

$\Rightarrow \theta_0 = 5°$ $\Rightarrow$ (1,00)

$\varphi = 0$

$\boxed{\theta(t) = 5\cos 6{,}54t}$

Question de cours : (3 pts)

le mode propre est un mvt sinusoïdal des éléments du système avec la même pulsation ω_1 ou ω_2 alors : (0,5)

$\bar{\theta}_1(t) = \bar{\theta}_{01} e^{j\Omega t}$ 0,5

$\bar{\theta}_2(t) = \bar{\theta}_{02} e^{j\Omega t}$

On injecte les 2 expressions ds les 2 équations différentielles on trouve :

$$\left(\frac{g}{l} - \Omega^2\right) \bar{\theta}_{01} = \frac{1}{2} \Omega^2 \bar{\theta}_{02}$$ 0,5

$$\left(g/l - \Omega^2\right) \bar{\theta}_{02} = \Omega^2 \bar{\theta}_{01}$$ 0,5

∃ une solution non-nulle si :

$$\left(g/l - \Omega^2\right)^2 = \frac{1}{2} \Omega^4$$ d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} \Omega_1^2 &= (2 - \sqrt{2})\, g/l \\ \Omega_2^2 &= (2 + \sqrt{2})\, g/l \end{aligned}}$$

0,5

0,5

fin