

Cours de Commande Optimale

Ahmed MAIDI

20 mars 2020

@copyright ahmed maidi 2019-2020

Table des matières

1	Programmation dynamique	9
1.1	Principe d'optimalité de Bellman	9
1.2	Équation fonctionnelle de Belman	9
1.2.1	Équation de transition (discrétisation du modèle continu)	10
1.2.2	Discrétisation du critère de performance	10
1.3	Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman	18
2	Commande Optimale des Systèmes Linéaires avec Critère Quadratique (LQ)	23
2.1	Introduction	23
2.2	Solution général	24
2.3	Résolution de l'équation de Ricatti	29
2.4	Robustesse de la comande linéaire quadratique	29
2.5	Exemple d'application	31
3	Commande Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG)	33
3.1	Introduction	33
3.2	Cas des systèmes à état non complètement accessible	33
3.3	Position du problème	34
3.4	Synthèse d'une commande LQG	35
3.4.1	Retour d'état optimale (LQR)	35
3.4.2	Filtre de Kalman	36
3.4.3	Commande LQG	36
3.5	Synthèse de la commande LQG/LTR (Loop Transfert Recovery)	38
3.5.1	Hypothèses d'application	38
3.5.2	Recouvrement en entrée	38
3.5.3	Recouvrement en sortie	38

@copyright ahmed maidi 2019-2020

Liste des tableaux

1.1	Transfert en une seule étape.	15
1.2	Transfert en deux étapes.	16
1.3	Tableau récapitulatif pour un nombre d'étapes allant de 1 jusqu'à 6.	17

@copyright ahmed maïdi 2019-2020

Table des figures

1.1	Principe d'optimalité de Bellman	9
1.2	Equation fonctionnelle de Bellman.	11
1.3	Transfert en une seule étape.	12
1.4	Transfert en deux étapes.	13
2.1	Structure de la commande linéaire quadratique (LQ).	26
2.2	Lieu de Nyquist d'une commande LQ.	30
3.1	Observateur d'état.	34
3.2	Structure de la commande linéaire quadratique gaussienne (LQG).	37

@copyright ahmed maidi 2019-2020

Chapitre 1

Programmation dynamique

La programmation dynamique est une méthode de synthèse de lois de commande optimale basées le principe d'optimalité de **Bellman**. Sous la sa forme discrète, ce principe conduit à la *l'équation fonctionnelle* de **Bellman** tandis que sur sa forme continue, il conduit à l'équation de **Hamilton-Jacobi-Bellman**.

1.1 Principe d'optimalité de Bellman

Si C est un point intermédiaire de la trajectoire optimale allant de l'état A à l'état B (Figure 1.1), la portion terminale CB de cette trajectoire constitue la trajectoire optimale reliant l'état intermédiaire C à l'état final B .

1.2 Équation fonctionnelle de Belman

Le principe de la programmation dynamique consiste essentiellement :

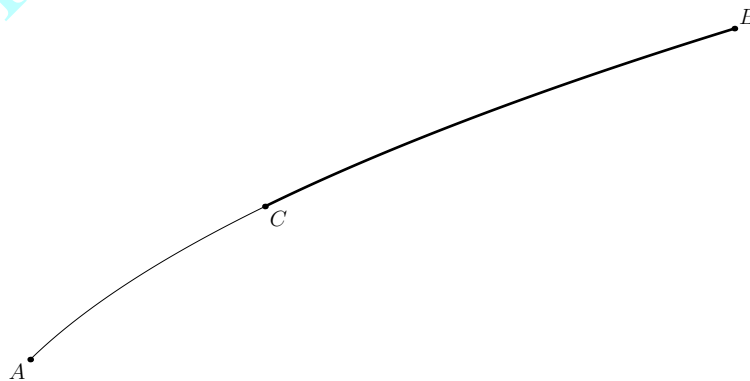


FIGURE 1.1: Principe d'optimalité de Bellman

1. à décomposer le processus de durée T en N_e étapes de durées Δt ($T = N_e \Delta t$) ;
2. à immerger le problème particulier de la trajectoire optimale de $x(0)$ à $x(T)$ ($t_0 = 0$; $t_f = T$) en N_e étapes dans le problème de même nature, mais plus général, de la trajectoire optimale de $x(t)$ à $x(T)$ en k avec $k = 1, 2, \dots, N_e$.

1.2.1 Équation de transition (discrétisation du modèle continu)

Si nous désignons alors par $x(k)$ l'état du système à l'instant $(T - k \Delta t)$, l'équation de transition discrète du système est obtenue par discrétisation du modèle continu (??) en utilisant la méthode d'**Euler** comme suit :

$$\frac{x(k-1) - x(k)}{\Delta t} = f(x(k), u(k), k)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + f(x(k), u(k), k) \Delta t \\ x(k+1) &= F_{\Delta}(x(k), u(k), k) \end{aligned} \quad (1.1)$$

1.2.2 Discrétisation du critère de performance

La critère intégrale J donné par la relation (??) prend la forme :

$$\begin{aligned} J &= \psi(N_e \Delta t) + \sum_{k=1}^{N_e} \phi(x(k), u(k), k) \Delta t. \\ J &= \psi_{\Delta}(N_e) + \sum_{k=1}^{N_e} \phi_{\Delta}(x(k), u(k), k). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Désignons par $J^*(x(k))$ le coût minimal de $x(k)$ à $x(0)$ en k étapes et considérons que $\psi_{\Delta}(N_e) = 0$.

Supposons alors connue la fonction $J^*(x(k-1))$ et cherchons à déterminer $J^*(x(k))$. Si nous quantifions les variables de commande comme nous avons quantifié le temps, nous avons à partir de l'état $x(k)$, et compte tenu des contraintes sur les variables d'état et de commande, le choix entre un nombre fini de vecteurs de commande. Faisons, pendant les premières des k étapes restantes, $u(k)$. Cette première étape nous coûte donc $\phi_{\Delta}(x(k), u(k), k)$. D'autres part, elle conduit au nouvel état :

$$x(k+1) = F_{\Delta}(x(k), u(k), k). \quad (1.3)$$

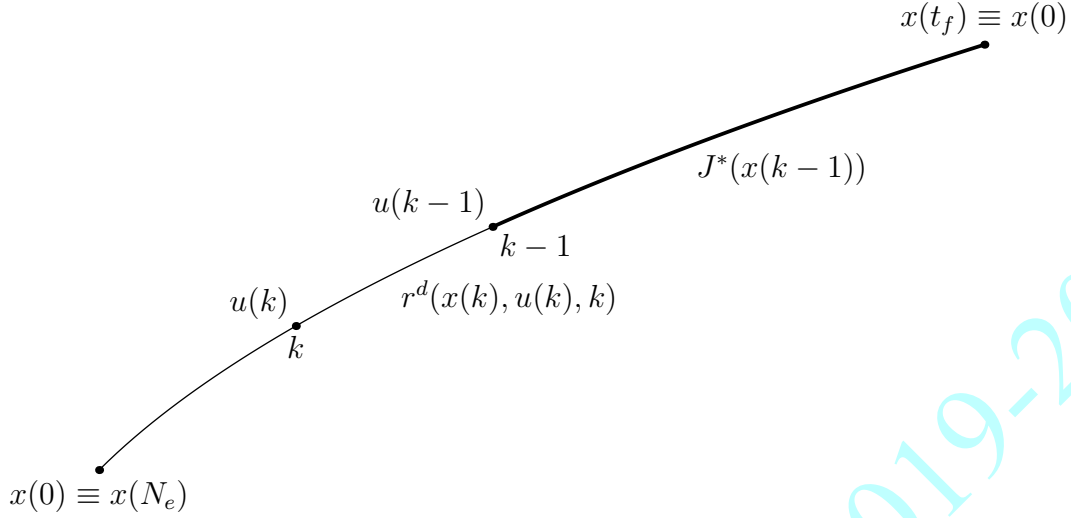


FIGURE 1.2: Equation fonctionnelle de Bellman.

Ce nouvel état, qui résulte de l'application de $u(k)$ pendant la première étape, conduit à son tour à $x(0)$ en $k-1$ étapes, avec le coût minimal

$$J^*(x(k-1))$$

Le coût total du processus considéré est (Figure 1.2)

$$J(x(k)) = \phi_{\Delta}(x(k), u(k), k) + J^*(x(k-1))$$

Il est clair que le coût minimal recherché $J^*(x(k))$ est le minimum de $J(x(k))$ par rapport à $u(k) \in U$, ce qui s'écrit :

$$J^*(x(k)) = \min_{u(k)} [\phi_{\Delta}(x(k), u(k), k) + J^*(x(k-1))]$$

Comme $x(k-1)$ est la conséquence de l'application de la commande $u(k)$, alors on peut écrire :

$$J^*(x(k)) = \min_{u(k)} [\phi_{\Delta}(x(k), u(k), k) + J^*(F_{\Delta}(x(k), u(k), k)))] \quad (1.4)$$

A condition de connaître $J^*(k-1)$, cette équation de récurrence permet de déterminer $u^*(k)$ en fonction de l'état courant $x(k)$ et du nombre k des étapes restantes.

L'équation donnée par la relation (1.4) est l'équation fonctionnelle de **Bellman** ou équation de la *programmation dynamique*. Dans cette équation, $u(k)$ représente la première décision d'un processus à k étapes qui produit la variation $\Delta x(k)$ de $x(k)$ ($x(k-1) = x(k) + \Delta x(k)$).

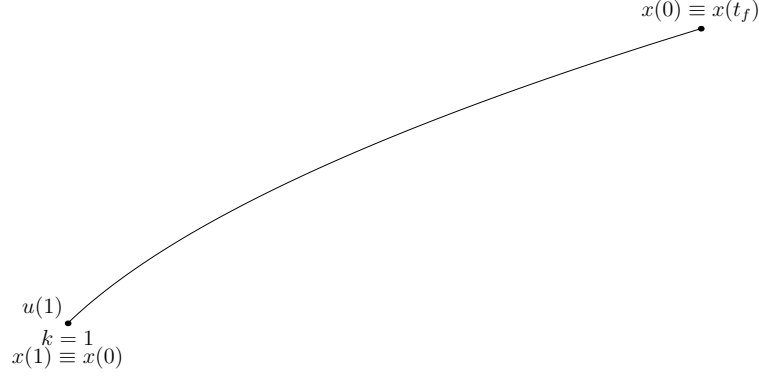


FIGURE 1.3: Transfert en une seule étape.

Remarque 1.1

1. la résolution de cette équation peut se faire analytiquement ou numériquement,
2. par interpolation linéaire, on peut avoir une approximation pour les points intermédiaires entre deux valeurs quantifiées.

Exemple 1.1

Cas d'une solution analytique : soit le problème de commande optimale

$$\min_{u(k)} J(x(k)) = \sum_{k=1}^{N_e} u^2(k)$$

à sujet à :

$$x(k-1) = x(k) + u(k) dt$$

$$x(0) = 0 \quad (\text{état final})$$

Déterminer analytiquement la loi de commande optimale.

D'après les donnée du problème $\phi_{\Delta}(u(k), u(k), k) = u^2(k)$.

— Pour $k = 1$ (Figure 1.3) : transfert d'un état $x(k)$ en une seule étape ($N_e = 1$)

$$x(0) - x(1) = u^*(1) \Delta t \Rightarrow u^*(1) = \frac{x(0) - x(1)}{\Delta t}$$

Comme $x(0) = 0$, alors

$$u(1) = -\frac{x(1)}{\Delta t}$$

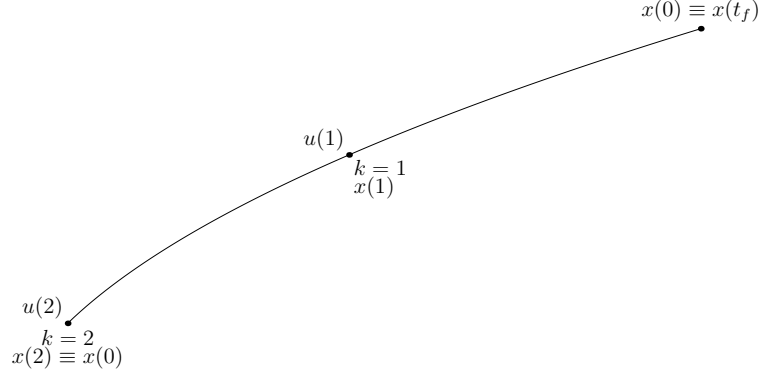


FIGURE 1.4: Transfert en deux étapes.

et

$$J^*(x(1)) = \sum_{k=1}^1 [u^*(k)]^2 = \frac{x^2(1)}{\Delta t^2}$$

— Pour $k = 2$ (Figure 1.4) : transfert d'un état $x(k)$ en deux étapes ($N_e = 2$).

En utilisant l'équation fonctionnelle de **Bellman**, il vient :

$$\begin{aligned} J^*(x(2)) &= \min_{u(2)} [\phi_{\Delta}(x(2), u(2), 2) + J^*(x(1))] \\ &= \min_{u(2)} [u^2(2) + J^*(x(2) + u(2) \Delta t)] \\ &= \min_{u(2)} \left[u^2(2) + \frac{(x(2) + u(2) \Delta t)^2}{\Delta t^2} \right] \end{aligned}$$

Le crochet est minimale pour

$$u(2) + \frac{(x(2) + u(2) \Delta t)}{\Delta t} = 0 \Rightarrow u^*(2) = -\frac{x(2)}{2 \Delta t}$$

$$J^*(x(2)) = \left(-\frac{x(2)}{2 \Delta t} \right)^2 + \frac{\left(x(2) + \left(-\frac{x(2)}{2 \Delta t} \right) \Delta t \right)^2}{\Delta t^2} \Rightarrow J^*(x(2)) = \frac{x^2(2)}{2 \Delta t^2}$$

— Pour $k = 3$ (transfert d'un état $x(k)$ en trois étapes : $N_e = 3$)

$$\begin{aligned}
J^*(x(3)) &= \min_{u(3)} [\phi_\Delta(x(3), u(3), 3) + J^*(x(2))] \\
&= \min_{u(3)} [u^2(3) + J^*(x(3) + u(3) \Delta t)] \\
&= \min_{u(3)} \left[u^2(3) + \frac{(x(3) + u(3) \Delta t)^2}{2 \Delta t^2} \right]
\end{aligned}$$

Le crochet est minimale pour

$$\begin{aligned}
u(3) + \frac{(x(3) + u(3) \Delta t)}{2 \Delta t} = 0 &\Rightarrow u^*(3) = -\frac{x(3)}{3 \Delta t} \\
J^*(x(3)) &= \left(-\frac{x(3)}{3 \Delta t} \right)^2 + \frac{\left(x(3) + \left(-\frac{x(3)}{3 \Delta t} \right) \Delta t \right)^2}{2 \Delta t^2} \Rightarrow J^*(x(3)) = \frac{x^2(3)}{3 \Delta t^2}
\end{aligned}$$

Ces résultats nous conduisent à supposer que

$$u(k-1)^* = -\frac{x(k-1)}{(k-1) \Delta t}, \quad J^*(x(k-1)) = \frac{x(k-1)^2}{(k-1) \Delta t^2}$$

Démontrons par récurrence que ce résultat est correcte.

- d'après le développement précédent pour $k = 2$ les formules sont vérifiées.
- supposons que les formules sont vérifiées pour $k-1$ et démontrons qu'elles sont vérifiées pour k

$$\begin{aligned}
J^*(x(k)) &= \min_{u(k)} [\phi_\Delta(x(k), u(k), k) + J^*(x(k-1))] \\
&= \min_{u(k)} [u^2(k) + J^*(x(k) + u(k) \Delta t)] \\
&= \min_{u(k)} \left[u^2(k) + \frac{(x(k) + u(k) \Delta t)^2}{(k-1) \Delta t^2} \right]
\end{aligned}$$

Le crochet est minimale pour

$$\begin{aligned}
u(k) + \frac{(x(k) + u(k) \Delta t)}{(k-1) \Delta t} = 0 &\Rightarrow u^*(k) = -\frac{x(k)}{k \Delta t} \\
J^*(x(k)) &= \left(-\frac{x(k)}{k \Delta t} \right)^2 + \frac{\left(x(k) + \left(-\frac{x(k)}{k \Delta t} \right) \Delta t \right)^2}{(k-1) \Delta t^2} \Rightarrow J^*(x(k)) = \frac{x^2(k)}{k \Delta t^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, les formules obtenues sont correctes. Par conséquent, la loi de commande optimale est :

$$u^*(k) = -\frac{x(k)}{k \Delta t}$$

Exemple 1.2

Cas d'une solution numérique : soit le problème de commande optimale

$$\min_{u(k)} J(x(k)) = \sum_{k=1}^{N_e} |u^3(k)|$$

sujet à :

$$x(k-1) = x(k) + u(k) dt$$

$$x(N_e) = 10 \quad (\text{état initial})$$

$$x(0) = 0 \quad (\text{état final})$$

$$|u(k)| \leq 3$$

Pour déterminer la solution numériquement, on propose de quantifier le temps, l'état et la commande comme suit :

$$\Delta t = \Delta x = \Delta u = 1$$

— Pour $k = 1$, il n'y a pas de choix à effectuer, car on a

$$x(0) - x(1) \Rightarrow 0 - x(1) = u^*(1) \Delta t$$

et on peut écrire directement

$$u^*(1) = -\frac{x(1)}{\Delta t}, \quad J^*(x(1)) = \frac{|x^3(1)|}{\Delta t^3}$$

Les résultats dans ce cas sont résumés dans le Tableau 1.1

$x(1)$	$u(1)$	$J(x(1)) = x^3(1) $
1	-1	1
2	-2	8
3	-3	27
4	-4	Commande inadmissibles ($u(1) > 3$)
$\vdots$	$\vdots$	
10	-10	

TABLE 1.1: Transfert en une seule étape.

— Pour $k = 2$, l'équation de **Belman** s'écrit :

$$\begin{aligned} J^*(x(2)) &= \min_{u(2)} [|u^3(2)| + J^*(x(1))] \\ &= \min_{u(2)} [|u^3(2)| + J^*(x(2) + u(2))] \end{aligned}$$

Pour calculer $J^*(2)$ à partir de $J^*(1)$, il suffit de calculer le crochet pour toutes les valeurs possibles de $u(2)$ et de conserver la valeur de $u(2)$ correspondant au minimum. Quand deux valeurs de $u(2)$ donneront la même valeur de $J(2)$, nous conserverons la plus faible en amplitude. Ce calcul est donné par le Tableau 1.2.

$x(2)$	$u(2)$	$x(1) = x(2) + u(2)$	$ u^3(2) $	$J(x(1))$	$J(x(2))$
2	-1	1	1	1	2
3	-1	2	1	8	9
	-2	1	8	1	9
	-1	3	1	27	28
4	-2	2	8	8	16
	-3	1	27	1	28
5	-1	4	Impossible		
	-2	3	8	27	35
	-3	2	27	8	35
	-4	1	64	1	65
6	-1	5	Impossible		
	-2	4	Impossible		
	-3	3	27	27	54
	-4	2	64	8	72
	-5	1	125	1	123

TABLE 1.2: Transfert en deux étapes.

— En continuant ainsi, on obtient finalement le Tableau 1.3 qui résume la commande optimale et le coût minimal en fonction de $x(k)$ et de k .

Pour l'état initial considéré $x(0) = 10$, on obtient les programmes en 4 étapes, 5 étapes et 6 étapes comme suit :

— Programme pour 4 étapes

$x(k)$	$u(1)$	$J^*(1)$	$u(2)$	$J^*(2)$	$u(3)$	$J^*(3)$	$u(4)$	$J^*(4)$	$u(5)$	$J^*(5)$	$u(6)$	$J^*(6)$
1	-1	1										
2	-2	8	-1	2								
3	-3	27	-1	9	-1	3						
4			-2	16	-1	10	-1	4				
5			-2	35	-1	17	-1	11	-1	5		
6			-3	54	-2	24	-1	18	-1	12	-1	6
7					-2	43	-1	25	-1	19	-1	13
8					-2	62	-2	32	-1	26	-1	20
9					-3	81	-2	51	-1	33	-1	27
10							-2	70	-2	40	-1	34

TABLE 1.3: Tableau récapitulatif pour un nombre d'étapes allant de 1 jusqu'à 6.

k	$x(k)$	$u(k)$	$\phi_{\Delta}(x(k), u(k), k) = u^3(k) $
4	10	-2	8
3	8	-2	8
2	6	-3	27
1	3	-3	27
0	0	0	70

— Programme pour 5 étapes

k	$x(k)$	$u(k)$	$\phi_{\Delta}(x(k), u(k), k) = u^3(k) $
5	10	-2	8
4	9	-2	8
3	7	-2	8
2	5	-2	8
1	3	-2	8
0	0	0	40

— Programme pour 6 étapes

k	$x(k)$	$u(k)$	$\phi_{\Delta}(x(k), u(k), k) = u^3(k) $
6	10	-1	1
5	9	-1	1
4	8	-2	8
3	6	-2	8
2	4	-2	8
1	2	-2	8
0	0	0	34

)

1.3 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.5)$$

$$\text{sujet à :} \quad (1.6)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.7)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.8)$$

Désignons par $J^*(x(t), t)$ la valeur du critère obtenue en appliquant la loi de commande $u^*(t)$ pendant un horizon de commande $[t, t_f]$ à partir de l'état initial $x(t)$. On écrit

$$J^*(x(t), t) = \min_{u_{[t, t_f]}(t)} \left[\psi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \right] \quad (1.9)$$

En considérant l'instant $\tau \in [t, t_f]$, on peut écrire

$$J^*(x(t), t) = \min_{u_{[t, t_f]}(t)} \left[\psi(x(t_f), t_f) + \int_t^\tau \phi(x(t), u(t), t) dt + \int_\tau^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \right] \quad (1.10)$$

$$= \min_{u_{[t, \tau]}(t)} \min_{u_{[\tau, t_f]}(t)} \left[\psi(x(t_f), t_f) + \int_t^\tau \phi(x(t), u(t), t) dt + \int_\tau^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \right] \quad (1.11)$$

$$= \min_{u_{[t, \tau]}(t)} \left[\int_t^\tau \phi(x(t), u(t), t) dt + \underbrace{\min_{u_{[\tau, t_f]}(t)} \left(\psi(x(t_f), t_f) + \int_\tau^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \right)}_{J^*(x(\tau), \tau)} \right] \quad (1.12)$$

$$= \min_{u_{[t, \tau]}(t)} \left[\int_t^\tau \phi(x(t), u(t), t) dt + J^*(x(\tau), \tau) \right] \quad (1.13)$$

En considérant $\tau = t + \Delta t$, il vient :

$$J^*(x(t), t) = \min_{u_{[t, t+\Delta t]}(t)} \left[\int_t^{t+\Delta t} \phi(x(t), u(t), t) dt + J^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t) \right] \quad (1.14)$$

Comme

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi(x(t), u(t), t) dt \approx \phi(x(t), u(t), t) \Delta t \quad (1.15)$$

et en faisant le développement de Taylor, à l'ordre 1, du terme $J^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$, on a

$$J^*(x(t), t) = \min_{u_{[t, t+\Delta t]}(t)} \left[\phi(x(t), u(t), t) \Delta t + J^*(x(t), t) + \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t) \Delta x(t) \right] \quad (1.16)$$

$$+ \frac{J^*(x(t), t)}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}(2) \quad (1.17)$$

alors

$$0 = \min_{u[t, t+\Delta t](t)} \left[\phi(x(t), u(t), t) \Delta t + \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t) \Delta x(t) + \frac{J^*(x(t), t)}{\partial t} \Delta t \right] \quad (1.18)$$

$$0 = \min_{u[t, t+\Delta t](t)} \left[\phi(x(t), u(t), t) + \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t) \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} + \frac{J^*(x(t), t)}{\partial t} \right] \quad (1.19)$$

$$-\frac{J^*(x(t), t)}{\partial t} = \min_{u[t, t+\Delta t](t)} \left[\phi(x(t), u(t), t) + \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t) \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \right] \quad (1.20)$$

Pour $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.21)$$

et

$$-\frac{J^*(x(t), t)}{\partial t} = \min_{u(t)} [\phi(x(t), u(t), t) + \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t) \dot{x}(t)] \quad (1.22)$$

En définissant la fonction d'**Hamilton** suivante

$$H(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), u(t), t) = \phi(x(t), u(t), t) + \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t) \dot{x}(t) \quad (1.23)$$

on peut écrire

$$-\frac{J^*(x(t), t)}{\partial t} = \min_{u(t)} H(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), u(t), t) \quad (1.24)$$

La commande optimale est déterminée en utilisant la condition du premier ordre suivante

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), u(t), t) = 0 \quad (1.25)$$

Par conséquent,

$$H^*(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), u(t), t) = \min_{u(t)} H(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), u(t), t) \quad (1.26)$$

En remplaçant dans (1.24), on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante

$$-\frac{J^*(x(t), t)}{\partial t} = H^*(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), u(t), t) \quad (1.27)$$

appelée équation d'**Hamilton-Jacobi-Bellman**. Pour résoudre cette équation, on doit avoir une condition aux limites. Ainsi, en posant $t = t_f$ dans le critère, il vient

$$J^*(x(t_f), t_f) = \psi(x(t_f), t_f) \quad (1.28)$$

Exemple 1.3

Donner l'équation d'**Hamilton-Jacobi-Pontryagin** correspondante au problème de commande optimale suivant

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = x_1^2(1) + x_2^2(1) + \int_0^1 x_1^4(t) + u^2(t) dt \quad (1.29)$$

$$\text{sujet à :} \quad (1.30)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (1.31)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t) \quad (1.32)$$

$$x_1(0) = 1 \quad (1.33)$$

$$x_2(0) = 0 \quad (1.34)$$

La fonction d'**Hamilton** est

$$H(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), u(t), t)) = g(x(t), u(t), t) + \nabla_{x(t)} J^*(x(t), u(t), t) f(x(t), u(t), t) \quad (1.35)$$

$$= x_1^4(t) + u^2(t) + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_1(t)} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2(t)} \dot{x}_2(t) \quad (1.36)$$

$$= x_1^4(t) + u^2(t) + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_1(t)} x_2(t) + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2(t)} (-2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t)) \quad (1.37)$$

et

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), u(t), t)) = 0 \Rightarrow$$

$$2u^*(t) + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2(t)} = 0 \Rightarrow$$

$$u^*(t) = -\frac{\partial J^*(x(t), t)}{2 \partial x_2(t)}$$

Ce qui donne

$$H^*(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), u(t), t) = x_1^4(t) + \frac{1}{4} \left(-\frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2(t)} \right)^2 + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_1(t)} x_2(t) + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2(t)} \left(-2x_1(t) - 3x_2(t) - \frac{\partial J^*(x(t), t)}{2\partial x_2(t)} \right) \quad (1.38)$$

$$= x_1^4(t) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2(t)} \right)^2 + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_1(t)} x_2(t) + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2(t)} (-2x_1(t) - 3x_2(t)) \quad (1.39)$$

et l'équation d'**Hamilton-Jacobi-Bellman** correspondante est

$$-\frac{J^*(x(t), t)}{\partial t} = x_1^4(t) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2(t)} \right)^2 + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_1(t)} x_2(t) + \frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial x_2(t)} (-2x_1(t) - 3x_2(t))$$

avec la condition aux limites

$$J^*(x(1), 1) = x_1^2(1) + x_2^2(1) \quad (1.40)$$

Remarque 1.2

La résolution de l'équation aux dérivées partielles d'**Hamilton-Jacobi-Bellman** est très difficile à résoudre analytiquement. Des méthodes numériques doivent être appliquées.

Chapitre 2

Commande Optimale des Systèmes Linéaires avec Critère Quadratique (LQ)

2.1 Introduction

Considérons le problème général de la poursuite dont le problème de la régulation constitue un cas particulier. Désignons par $x_d(t)$ l'état désiré variable et définissons l'erreur de poursuite :

$$e(t) = x^d(t) - x(t) \quad (2.1)$$

et le système suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.2)$$

et le critère

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \left[[e(t)]^T Q e(t) + [u(t)]^T R u(t) \right] dt \quad (2.3)$$

avec Q et R sont des matrices définies positives.

2.2 Solution général

L'Hamiltonien s'écrit :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{2} [e(t)^T Q e(t) + [u(t)^T R u(t)] + [\lambda(t)]^T \dot{x}(t) \quad (2.4)$$

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{2} [e(t)^T Q e(t) + [u(t)^T R u(t)] \quad (2.5)$$

$$+ [\lambda(t)]^T (A x(t) + B u(t)) \quad (2.6)$$

il est minimale pour :

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = R u(t) + B^T \lambda(t) = 0$$

La commande optimale est alors donnée par :

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (2.7)$$

Les équations de **Hamilton-Pontryagin** s'écrivent :

$$\dot{\lambda}(t) = -A^T \lambda(t) + Q e(t) = -A^T \lambda(t) + Q (x^d(t) - x(t)) \quad (2.8)$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) - B R^{-1} B^T \lambda(t) = A x(t) - S \lambda(t) \quad (2.9)$$

avec $S = B R^{-1} B^T$ ($S^T = S$).

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} 0 \\ x^d(t) \end{bmatrix}$$

On considère que les vecteurs $x(t)$ et $\lambda(t)$ sont liés par une transformation linéaire de la forme :

$$\lambda(t) = K(t) x(t) - V(t) \quad (2.10)$$

La matrice $K(t)$ et le vecteur $V(t)$ sont en général fonctions du temps. La dérivée de $\lambda(t)$ par rapport au temps nous donne :

$$\dot{\lambda}(t) = K(t) \dot{x}(t) + \dot{K}(t) x(t) - \dot{V}(t) \quad (2.11)$$

En égalant les deux formes (2.8) et (2.11) de $\dot{\lambda}(t)$, il vient :

$$K(t) \dot{x}(t) + \dot{K}(t) x(t) - \dot{V}(t) = -A^T \lambda(t) + Q (x^d(t) - x(t)) \quad (2.12)$$

En remplaçant $\dot{x}(t)$ et $\lambda(t)$ par leurs expressions (2.9) et (2.10) respectivement, l'équation (2.12) devient :

$$K(t) \left[A x(t) - \underbrace{S(K(t) x(t) - V(t))}_{P(t)} \right] + \dot{K}(t) x(t) - \dot{V}(t) = -A^T (K(t) x(t) - V(t)) + Q (x^d(t) - x(t)) \quad (2.13)$$

Exprimons le fait que cette égalité doit être satisfaite quelque soit $x(t)$, il vient :

$$K(t) A x(t) - K(t) S K(t) x(t) + K(t) S V(t) + \dot{K}(t) x(t) - \dot{V}(t) = -A^T K x(t) + A^T V(t) + Q x^d(t) - Q x(t) \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & \left(\dot{K}(t) + K(t) A + A^T K(t) - K(t) S K(t) + Q \right) x(t) \\ & - \dot{V}(t) + (K(t) S - A^T) V(t) - Q x^d(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) + K(t) A + A^T K(t) - K(t) S K(t) + Q &= 0 \\ \dot{V}(t) + (A^T - K(t) S) V(t) + Q x^d(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ces équations définissent $K(t)$ et $V(t)$. La première équation est appelée **équation matricielle de Ricatti**. On obtient alors :

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T (K(t) x(t) - V(t)) \quad (2.17)$$

$$\dot{x}(t) = (A - S K(t)) x(t) + S V(t) \quad (2.18)$$

$x(t)$ intervient dans l'expression de $u^*(t)$, ce qui permet d'avoir la commande optimale sous forme d'un retour d'état.

On remarque que $K(t)$ et $V(t)$ ne dépendent pas de l'état du système, alors la loi de commande trouvée est optimale quelque soient les conditions initiales. La structure du système de commande est conforme au schéma fonctionnel de la Figure 2.1.

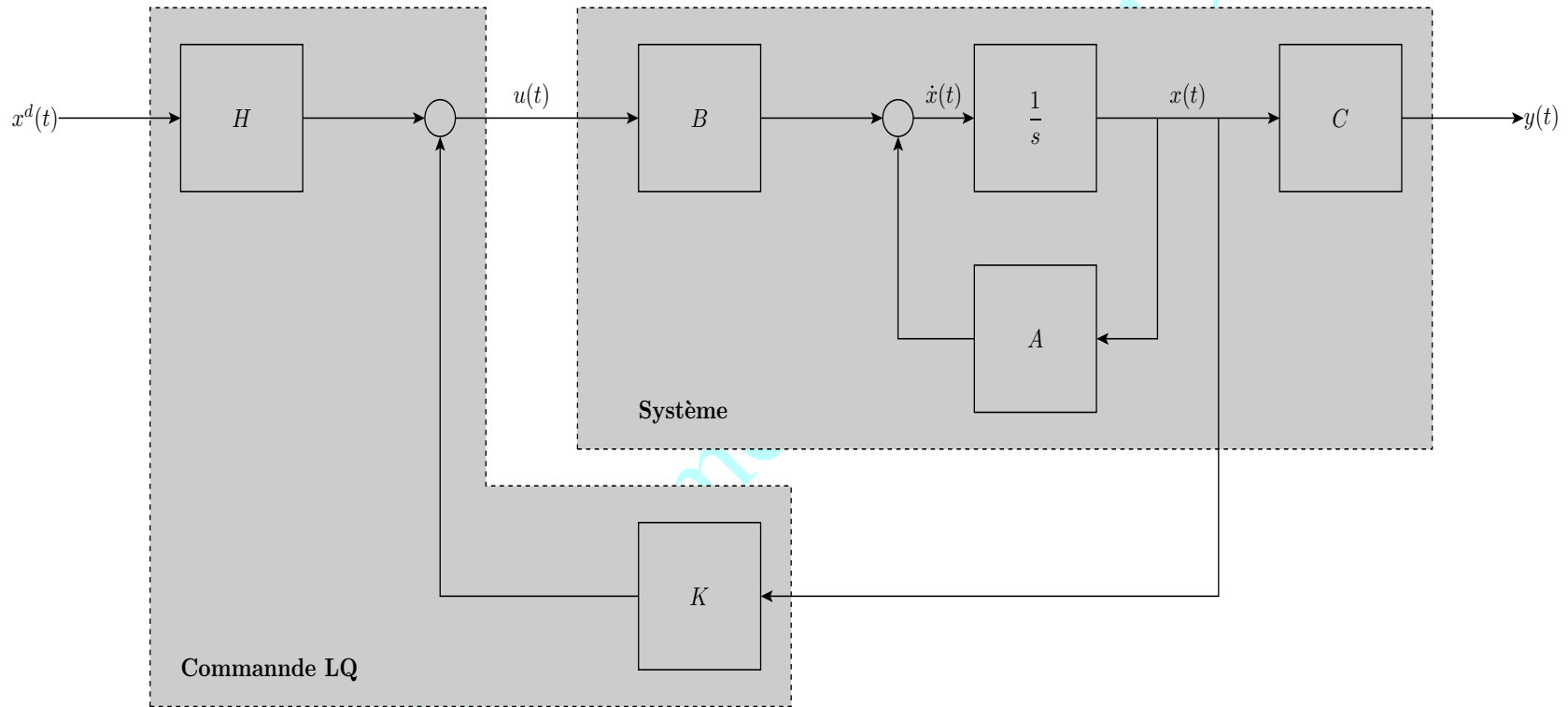


FIGURE 2.1: Structure de la commande linéaire quadratique (LQ).

Remarque 2.1

1. Pour intégrer les équations, il faut disposer de conditions aux limites. Si comme nous l'avons supposé, l'état final est libre, on $\lambda(t) = 0$ et, par la suite :

$$V(t) = 0, \quad \dot{V}(t) = 0$$

2. Introduction d'un terme de commande optimale : si le critère contient un terme de la commande terminale, elle prend la forme

$$J = \frac{1}{2} [e(T)]^T H e(T) + \frac{1}{2} \int_0^T \left([e(t)]^T Q e(t) + [u(t)]^T R u(t) \right) dt \quad (2.19)$$

dans ces conditions, on conserve l'**Hamiltonien** (2.4), les conditions terminales deviennent

$$\lambda(T) = \left[\nabla_x \left(\frac{1}{2} [e(T)]^T H e(T) \right) \right] = H x_d(T) - H x(T)$$

Mais d'autres part :

$$\lambda(T) = K(T) x(T) - V(T)$$

Les deux formes donne :

$$K(T) = -H, \quad V(T) = H x^d(T) \quad (2.20)$$

3. Symétrie de la matrice $K(t)$: transposons l'équation matricielle de **Ricatti**, en tenant compte que Q et S sont symétrique :

$$\begin{aligned} \dot{K}^T(t) + [K(t) A]^T + [A^T K(t)]^T - [K(t) S K(t)]^T + Q^T &= 0, \\ \dot{K}^T(t) + A^T K(t)^T + K(t)^T A - K(t)^T S^T K(t)^T + Q^T &= 0, \\ \dot{K}^T(t) + A^T K(t)^T + K(t)^T A - K(t)^T S K(t)^T + Q &= 0 \end{aligned}$$

La matrice $K(t)$ et sa transposée sont donc solutions de la même équation différentielle. De plus H étant symétrique :

$$K(T) = -H \Rightarrow [K(t)]^T = -[H]^T = -H.$$

Ainsi, $K(t)$ et $[K(t)]^T$ satisfont la même équation différentielle avec la même condition terminale. Elles sont donc égales et $K(t)$ est symétrique.

4. *Problème de régulation* : Dans ce cas $x^d(t) = 0$ et, par la suite, $V(t) = 0$. L'équation en $V(t)$ disparaît et il ne reste plus que l'équation de **Ricatti** en $K(t)$.

De plus, si on remplace l'erreur par $e = -C x(t)$, il vient :

$$[e(t)]^T Q e(t) = [-C x(t)]^T Q (-C x(t)) = x(t)^T C^T Q C x(t)$$

et

$$[e(T)]^T H e(T) = x(T)^T C^T H C x(T)$$

Il suffit donc, dans le calcul précédent, de remplacer les matrices Q et H par $C^T Q C$ et $C^T H C$. On a en particulier :

$$K(T) = -C^T H C$$

5. *Problème de régulation pour un système invariant avec un horizon infini* : si les matrices A, B, Q et R sont constantes et si T est infini, la loi de commande est invariante, puisque chaque instant est identique à l'instant suivant. Il en résulte que la matrice $K(t)$ est constante et que $\dot{K}(t) = 0$. L'équation de **Ricatti** devient un système d'équations algébriques dont la résolution fournit les coefficients de retour d'état constants (la contre réaction). En pratique, il est plus facile de rechercher la limite de $K(t)$ quand t tend vers l'infini.
6. *Problème de poursuite se ramenant à des problèmes de régulation*. Ce cas se présente toutes les fois que l'état désiré peut être remplacé par des variables d'état supplémentaires. Par exemple, soit le problème défini par :

$$\dot{x}_1(t) = a x_1(t) + b u(t), \quad x_1^d(t) = e^{-t}$$

$$\phi(x(t), u(t), t) = (x_1(t) - x_1^d(t))^2 + \alpha u^2(t)$$

Ce problème est équivalent au problème suivant ($x_2(t) = x_1^d(t) = e^{-t}$) :

$$\dot{x}_1(t) = a x_1(t) + b u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t), \quad x_2(0) = 1$$

$$\phi(x(t), u(t), t) = (x_1(t) - x_2(t))^2 + \alpha u^2(t)$$

7. *Forme du coût minimal* : nous avons vu que

$$\lambda(t) = \nabla_x J^* = K(t) x(t) - V(t)$$

Il en résulte que le coût minimal J^* est de la forme :

$$J^* = \frac{1}{2} [x(t)]^T K(t) x(t) - V(t) x(t) + K_0 \quad (2.21)$$

2.3 Résolution de l'équation de Ricatti

L'équation matricielle de **Ricatti** peut être résolue, soit analytiquement dans les cas les plus simples, soit par intégration numérique en utilisant des méthodes numériques en considérant l'intégration en temps inversé. Nous allons exposer une méthode de résolution analytique.

La résolution de l'équation matricielle

$$\dot{X} = \mathcal{A}X + X\mathcal{B} + X\mathcal{C}X + D \quad (2.22)$$

dans laquelle les matrices $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ peuvent être variables, est équivalente à celle du système linéaire

$$\dot{Y} = -\mathcal{B}Y - \mathcal{C}Z \quad (2.23)$$

$$\dot{Z} = \mathcal{D}Y + \mathcal{A}Z \quad (2.24)$$

avec $X = ZY^{-1}$.

Sous forme matricielle, on a

$$\begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathcal{B} & -\mathcal{C} \\ \mathcal{D} & \mathcal{A} \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$$

dont la solution est :

$$\begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = e^{\hat{A}t} \begin{bmatrix} Y(0) \\ Z(0) \end{bmatrix}$$

2.4 Robustesse de la comande linéaire quadratique

La commande linéaire quadratique assure une robustesse maximale, c'est-à-dire le régulateur autorise les plus grandes erreurs de modélisation sur le système à commander. Le transfert initial du système est

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B \quad (2.25)$$

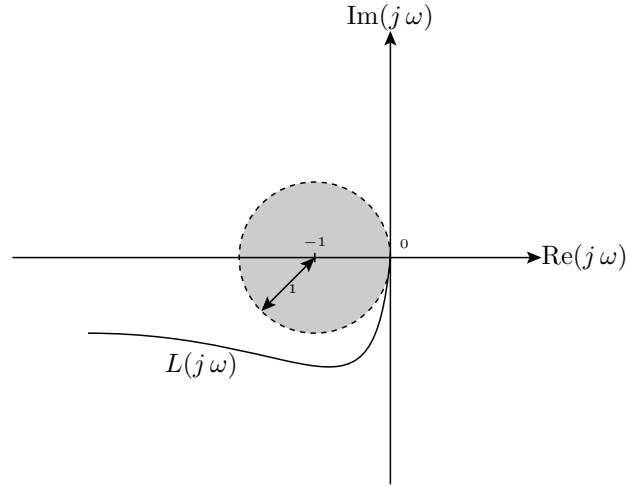


FIGURE 2.2: Lieu de Nyquist d'une commande LQ.

En faisant les multiplications algébriques sur l'équation de **Riccati** :

- ajout de $sK - sK$;
- multiplication à gauche par $-B^T ((sI + A)^{-1})^T$;
- multiplication à droite par $(sI - A)^{-1} B$;
- substitution de $B^T K$ par RL .

permettant d'aboutir à la relation :

$$G^T(-s) Q G(s) + R = [I + H^T(-s)] R [I + H(s)] \quad (2.26)$$

En écrivant cette relation dans le domaine fréquentiel, en posant $s = j\omega$ et $F^*(j\omega) = F^T(-j\omega)$, la remarque

$$\forall \omega, F^*(j\omega) Q F(j\omega) \geq 0 \quad (2.27)$$

impliqu'on a

$$\forall \omega, [I + F^*(j\omega)] R [I + F(j\omega)] \geq R \quad (2.28)$$

Dans le cas mono-entrée ($R \in \mathbb{R}^*$) conduit à :

$$\forall \omega, |1 + H(j\omega)| \geq 1 \quad (2.29)$$

Comme $|1 + H(j\omega)|$ est la distance qui sépare un point du lieu de **Nyquist** de $H(j\omega)$ du point $(-1, 0)$. Cette inégalité se traduit donc par la forme graphique de la Figure 2.2.

Le lieu de **Nyquist** étant en dehors du cercle unité, on conclut que la commande linéaire quadratique, indépendamment du choix des paramètres Q et R , garantit :

- une marge de gain supérieure à $1/2$,

- une marge de phase supérieure à 60° ,
- une marge de module supérieure à 1.

Ainsi, la commande linéaire quadratique, lorsque l'état est complètement accessible, est l'une des commandes les plus robustes. Dans le cas d'un état qui n'est pas complètement accessible, il est nécessaire d'utiliser un observateur d'état afin d'estimer les variables non directement mesurables, ce qui risque de diminuer la robustesse.

2.5 Exemple d'application

Soit le problème de commande optimale linéaire quadratique suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^T(t) y(t) + u^T(t) u(t) dt \quad (2.30)$$

sujet à :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.31)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (2.32)$$

D'après le problème, on a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = 1, \quad R = 1 \quad (2.33)$$

Le problème de commande est un problème de régulation, alors pour déterminer la loi de commande optimale on résout seulement l'équation de **Riccati** correspondante. Ainsi, comme l'horizon de commande est infini ($\dot{K}(t) = 0$), l'équation de **Riccati** est donnée comme suit :

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne

$$-k_2^2 + 1 = 0 \quad (2.34)$$

$$k_1 - k_2 k_3 + k_2 = 0 \quad (2.35)$$

$$2k_2 - k_3^2 + 2k_3 = 0 \quad (2.36)$$

La résolution de ce système d'équations donne les deux solutions possibles suivantes :

$$K = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} + 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} + 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

La première solution est refusée puisque la matrice K n'est pas définie positive. Par conséquent, la commande optimale est :

$$u^*(t) = R^{-1} B^T K x(t) \quad (2.38)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} + 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (2.39)$$

$$= x_1(t) + (\sqrt{3} + 1) x_2(t) \quad (2.40)$$

Chapitre 3

Commande Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG)

3.1 Introduction

Dans le cas de la commande **LQ**, la loi de commande est basée sur la représentation d'état du système. La difficulté de mesurer l'état $x(t)$ et le bruit font que l'on préfère utiliser la commande **LQG**. Cette dernière est bien adaptée lorsque l'état du système n'est pas directement mesurable ou que les mesures sont affectées par le bruit et la synthèse de cette commande prend en compte les propriétés statistiques des perturbations sans affecter la stabilité.

3.2 Cas des systèmes à état non complètement accessible

Dans le cas où le système n'est pas à état complètement accessible, mais seulement détectable, c'est-à-dire lorsque les pôles non observables sont à partie réelle strictement négative, il est nécessaire, pour implanter, une régulation par retour d'état, d'utiliser un estimateur (observateur, filtre). L'observateur est un système dynamique, dont les entrées sont constituées de l'entrée et de la sortie du système à commander, et qui a pour fonction de reconstruire, tout au moins asymptotiquement, l'état du système (Figure 3.1).

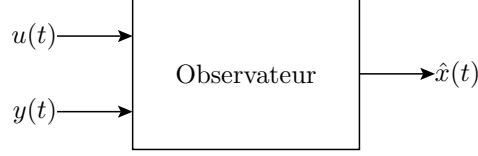


FIGURE 3.1: Observateur d'état.

3.3 Position du problème

Système théorique :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (3.2)$$

Système réel :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + W_d(t) \quad (3.3)$$

$$\hat{y}(t) = C \hat{x}(t) + W_n(t) \quad (3.4)$$

où $W_d(t)$ est le vecteur de perturbations, $W_n(t)$ est le vecteur de bruits de mesure, $\hat{y}(t)$ est le vecteur de sorties mesurées.

$W_d(t)$ et $W_n(t)$ sont des bruits blancs gaussiens et non corrélés. Leurs fonction d'inter-corrélation sont nulles, tandis que leurs fonctions d'auto-corrélation se réduisent à des impulsions de **Dirac**, c'est-à-dire :

$$E \left\{ W_d(t) W_d(\tau)^T \right\} = W \delta(t - \tau) \quad (3.5)$$

$$E \left\{ W_n(t) W_n(\tau)^T \right\} = V \delta(t - \tau) \quad (3.6)$$

et

$$E \left\{ W_d(t) W_n(\tau)^T \right\} = 0, \quad E \left\{ W_n(t) W_d(\tau)^T \right\} = 0 \quad (3.7)$$

Le problème de commande **LQG** est de déterminer la loi de commande optimale $u^*(t)$ qui minimise le critère suivant :

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left([x(t)]^T Q x(t) + [u(t)]^T R u(t) \right) dt \right\} \quad (3.8)$$

3.4 Synthèse d'une commande LQG

La solution du problème **LQG** est connue sous le nom du théorème de séparation. Ce dernier consiste :

1. à déterminer la commande optimale pour le système déterministe avec critère quadratique dans le cas de la régulation (**LQR**), c'est-à-dire $W_d(t)$ et $W_n(t)$ seront négligés.
2. puis à déterminer un estimateur pour l'état x soit $\hat{x}$ de telle sorte que :

$$E \left\{ [x(t) - \hat{x}(t)]^T (x - \hat{x}) \right\}$$

est minimale. L'observateur d'état optimale est donnée par le filtre de **Kalman** (il est indépendant de Q et R).

3. la solution recherchée pour le problème de **LQG** est obtenue en remplaçant $x(t)$ par $\hat{x}(t)$ dans la loi de commande obtenue dans la première étape.

Ainsi, le problème de **LQG** et sa solution peuvent être séparés en deux étapes distinctes, comme le montre la Figure 3.2.

3.4.1 Retour d'état optimale (LQR)

Problème de commande :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.9)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \left([x(t)]^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \right) dt \quad (3.10)$$

La solution optimale est donnée comme suit :

$$u^*(t) = -K_r(t) x(t) \quad (3.11)$$

avec

$$K_r(t) = R^{-1} B^T K(t) \quad (3.12)$$

et $K(t)$ est la solution de l'équation de **Ricatti**

3.4.2 Filtre de Kalman

Le problème de l'estimation consiste à déterminer le vecteur $\hat{x}(t)$ qui est l'estimé de $x(t)$ à partir de $\hat{y}(t)$ (Sorties mesurées). Ce problème est résolu au moyen de filtre de **Kalman**, défini par les équations suivantes :

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x}(t) + B u(t) + K_f(t) (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (3.13)$$

$$\hat{y} = C \hat{x}(t) \quad (3.14)$$

Le gain $K_f(t)$ optimal, qui minimise $E \left\{ [x(t) - \hat{x}(t)]^T (x(t) - \hat{x}(t)) \right\}$, est donné par :

$$K_f(t) = \hat{K}(t) C^T V^{-1} \quad (3.15)$$

où $\hat{K}(t)$ est la solution de l'équation de **Ricatti**, associée au filtre de **Kalman**. La matrice $\hat{K}(t)$ est la solution permanente ($\dot{\hat{K}}(t) = 0$) de l'équation de **Ricatti** associée au problème de commande, dit problème dual, suivant :

$$\dot{x}(t) = A^T x(t) + C^T u(t) \quad (3.16)$$

$$y(t) = B^T x(t) \quad (3.17)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left([x(t)]^T W x(t) + [u(t)]^T V u(t) \right) dt \quad (3.18)$$

dont l'équation de **Ricatti** correspondante est :

$$\hat{K}(t) A^T + A \hat{K}(t) - \hat{K}(t) C^T V^{-1} C \hat{K}(t) + B W B^T = 0 \quad (3.19)$$

3.4.3 Commande LQG

Le problème de commande **LQG** est de minimiser le critère (3.8). La structure de LQG est illustrée par la Figure 3.2.

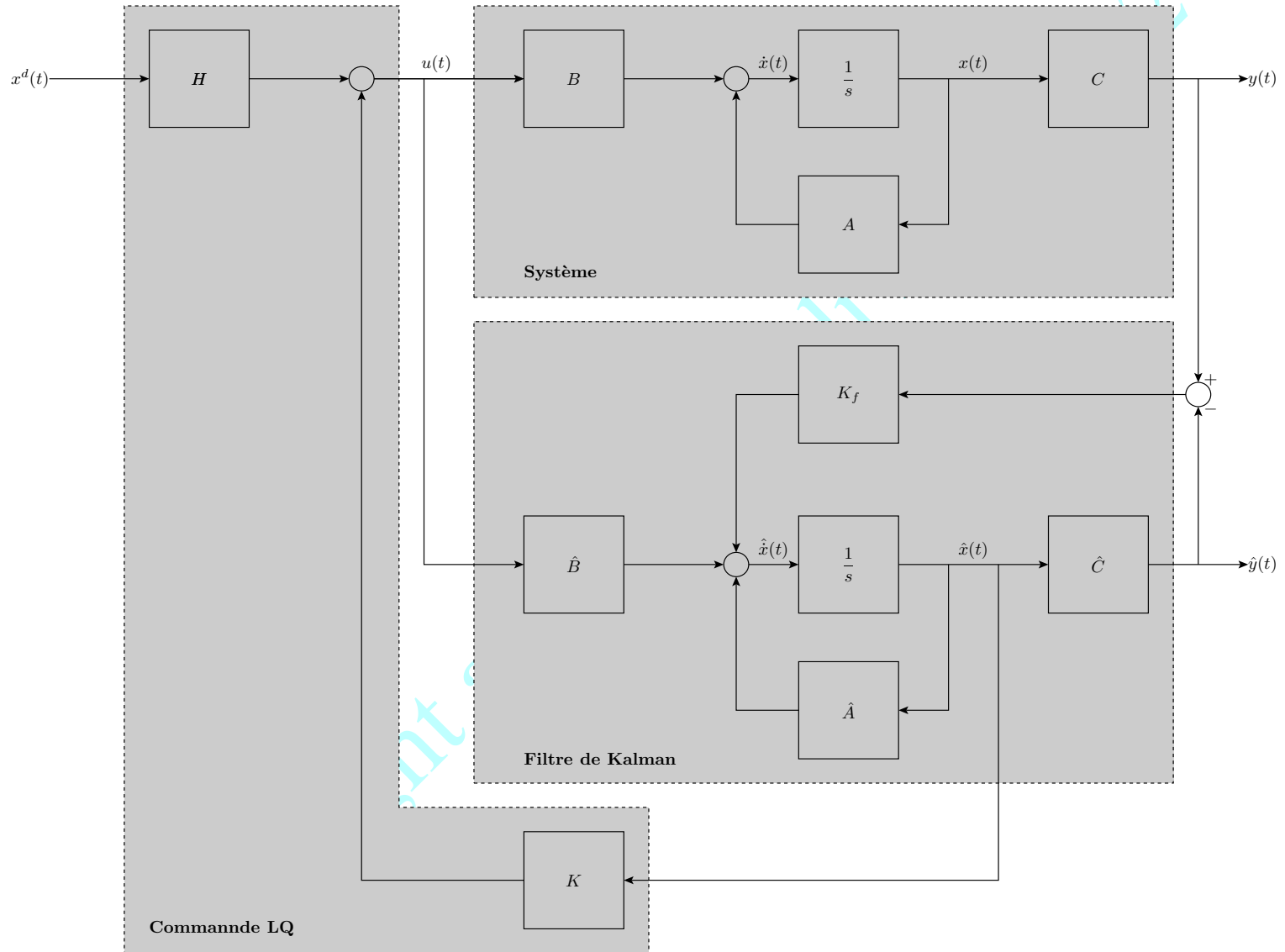


FIGURE 3.2: Structure de la commande linéaire quadratique gaussienne (LQG).

3.5 Synthèse de la commande LQG/LTR (Loop Transfer Recovery)

L'objectif de la procédure de réglage **LTR** est de restaurer les marges de stabilité *idéales* du retour d'état **LQ** (ou duale du filtre de **Kalman**).

3.5.1 Hypothèses d'application

- Le système strictement propre défini par la représentation d'état (A, B, C, D) vérifie :
- $D = 0$ (strictement propre),
 - $C (s I - A)^{-1} B$ à minimum de phase (pas de zéros instables),
 - Nombre égal d'entrées et de sorties.

3.5.2 Recouvrement en entrée

La procédure de synthèse **LQG/LTR** consiste à :

1. Synthétiser, dans une première étape, le correcteur **LQ** par un choix approprié des pondérations Q et R obéissant aux exigences du cahier des charges,
2. Dans une seconde étape, à partir d'un réglage nominal W_0 et V_0 du filtre de **Kalman**, on augmentera le paramètre α du nouveau réglage :

$$W = W_0 + \alpha B B^T, \quad V = V_0 \quad (3.20)$$

jusqu'à ce que le transfert de boucle $K_{LQG}(s) G(s)$ du correcteur **LQG**, recouvre sur une bande de fréquences suffisamment large, le transfert de boucle de retour d'état **LQ**, c'est-à-dire

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} K_{LQG}(s) G(s) = -K_r (s I - A)^{-1} B \quad (3.21)$$

3.5.3 Recouvrement en sortie

1. Synthétiser, le filtre de **Kalman** en manipulant les covariances W et V à fin que le transfert :

$$G(s) K_{LQG}(s) = -C (s I - A)^{-1} K_f \quad (3.22)$$

soit satisfaisant à la sortie du système.

2. Dans une seconde étape, à partir d'un réglage nominal Q_0 et R_0 du retour d'état **LQ**,

on augmentera le paramètre α du nouveau réglage :

$$Q = Q_0 + \alpha B B^T, \quad R = R_0 \quad (3.23)$$

jusqu'à ce que le transfert de boucle $G(s) K_{LQG}(s)$ du correcteur **LQG**, recouvre sur une bande de fréquences suffisamment large, le transfert de boucle de filtre de **Kalman**, c'est-à-dire

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} G(s) K_{LQG}(s) = -C (sI - A)^{-1} K_f \quad (3.24)$$