Partie : Commande prédictive :

Exo. 1

1. Formulation du problème d'optimisation dynamique : le cahier des charges conduit à formuler le problème d'optimisation dynamique suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^T \left[x^d(t) - x(t)\right]\, dt$$

sujet à :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a\,x(t) + u(t)$$
$$x(t) \leq x^d(t)$$
$$0 \leq u(t) \leq u_{\max}$$
$$x(0) = x_0$$

2. Problème de commande optimale sous forme d'un problème d'optimisation statique : la discrétisation de ce problème en considérant une période d'échantillonnage Δt donne

$$\min_{u(k\,\Delta t)} J(u(k\,\Delta t)) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \left[x^d(k\,\Delta t) - x(k\,\Delta t)\right], \quad N = \frac{T}{\Delta t}$$

sujet à :

Discrétisation du modèle par la méthode d'Euleur

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{x((k+1)\,\Delta t) - x(k\,\Delta t)}{\Delta t} = -a\,x(k\,\Delta t) + u(k\,\Delta t)$$
$$x(k\,\Delta t) \leq x^d(k\,\Delta t) \quad \text{(Réponse sans dépassement)}$$
$$0 \leq u(k\,\Delta t) \leq u_{\max}$$
$$x(0) = x_0$$
$$k = 0, \ldots, N-1$$

Ou encore sous une forme simplifiée

$$\min_{u(k)} J(u(k)) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[x^d(k) - x(k)\right]$$

sujet à :

$$x(k+1) = \alpha\,x(k) + \beta\,u(k), \quad \alpha = (1 - a\,\Delta t),\ \beta = \Delta t$$
$$x(k) \leq x^d(k)$$
$$0 \leq u(k) \leq u_{max}$$
$$x(0) = x_0$$
$$k = 0, \ldots, N-1$$

L'équation du modèle donne

$$
\begin{aligned}
x(1) &= \alpha\, x(0) + \beta\, u(0) \\
x(2) &= \alpha\, x(1) + \beta\, u(1) = \alpha\, [\alpha\, x(0) + \beta\, u(0)] + \beta\, u(1) = \alpha^2\, x(0) + \alpha\, \beta\, u(0) + \beta\, u(1) \\
&\dots \\
x(k) &= \alpha^k\, x(0) + \beta \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j-1}\, u(j)
\end{aligned}
$$

Par conséquent, le problème d'optimisation prend la forme :

$$
\min_{u(k)} J(u(k)) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[x^d(k) - \left(\alpha^k\, x(0) + \beta \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j-1}\, u(j) \right) \right]
$$

sujet à :

$$
\begin{aligned}
&\alpha^k\, x(0) + \beta \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j-1}\, u(j) \le x^d(k) \\
&0 \le u(k) \le u_{\max} \\
&x(0) = x_0 \\
&k = 0, \dots, N-1
\end{aligned}
$$

Qu'on peut mettre sous la forme :

$$
\min_{u(k)} J(u(k)) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[x^d(k) - \alpha^k\, x(0) - \beta \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j-1}\, u(j) \right]
$$

sujet à :

$$
\begin{aligned}
&\alpha^k\, x(0) + \beta \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j-1}\, u(j) \le x^d(k) \\
&0 \le u(k) \le u_{\max} \\
&x(0) = x_0 \\
&k = 0, \dots, N-1
\end{aligned}
$$

$$
\min_{u(k)} J(u(k)) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[x^d(k) - \alpha^k\, x(0) \right] - \beta \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j-1}\, u(j)
$$

sujet à :

$$
\begin{aligned}
&\beta \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j-1}\, u(j) \le x^d(k) \\
&0 \le u(k) \le u_{\max} - \alpha^k\, x(0) \\
&x(0) = x_0 \\
&k = 0, \dots, N-1
\end{aligned}
$$

Comme $\sum_{k=0}^{N-1} \left[x^d(k) - \alpha^k\, x(0) \right] > 0$, alors le problème d'optimisation prend la forme suivante :

$$\max_{u(k)} J(u(k)) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j-1}\, u(j)$$

sujet à :

$$\begin{aligned}
&\beta \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j-1}\, u(j) \leq x^d(k) - \alpha^k\, x(0)\\
&0 \leq u(k) \leq u_{\max}\\
&x(0) = x_0\\
&k = 0, \ldots, N-1
\end{aligned}$$

D'après le développement effectué, on remarque la fonction objectif et les contraintes dépendent du vecteur de variables de décision qui représente la séquence de commande à appliquer, c'est-à-dire $u(0), u(1), \ldots, u(N-1)$. Par conséquent, on peut écrire :

$$\max_{u(k)} J(u(k)) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, u(k)$$

sujet à :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k-1} a_{kj}\, u(j) \leq b_k, \quad b_k = x^d(k) - \alpha^k\, x(0)\\
&u(k) \geq 0\\
&u(k) \leq u_{\max}\\
&k = 0, \ldots, N-1
\end{aligned}$$

3. On constate que le problème posé se ramène à un problème de programmation linéaire à $3\,N$ contraintes et N variables de décision, c'est-à-dire $x = (u(0), u(1), \ldots, u(N-1))^T$. Pour la méthode de résolution, on peut utiliser la méthode du simplexe ou la méthode du point intérieur.

Exo. 2

1. Équation aux différences :

$$\begin{aligned}
G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - 0,5\, z^{-1}} &\Rightarrow (1 - 0,5\, z^{-1})\, Y(z) = z^{-1}\, U(z)\\
&\Rightarrow Y(z) - 0,5\, z^{-1}\, Y(z) = z^{-1}\, U(z) \Rightarrow Y(z) = 0,5\, z^{-1}\, Y(z) + z^{-1}\, U(z)
\end{aligned}$$

L'application de la transformée en z inverse donne

$$y(k) = 0,5\, y(k-1) + u(k-1)$$

2. Les quatre premières valeurs de la sortie $y(k)$:

$$\begin{aligned}
y(1) &= 0,5\, y(0) + u(0) = 0,5 \times 0 + 1 = 1\\
y(2) &= 0,5\, y(1) + u(1) = 0,5 \times 1 + 1 = 1,5\\
y(3) &= 0,5\, y(2) + u(2) = 0,5 \times 1,5 + 1 = 1,75\\
y(4) &= 0,5\, y(3) + u(3) = 0,5 \times 1,75 + 1 = 1,875
\end{aligned}$$

3. Matrice dynamique pour $N_p = 4$ et $N_u = 3$:

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0\\ g_2 & g_1 & 0\\ g_3 & g_2 & g_1\\ g_4 & g_3 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1,5 & 1 & 0\\ 1,75 & 1,5 & 1\\ 1,875 & 1,75 & 1,5 \end{bmatrix}$$

Exo. 3 Un exemple similaire est traité comme exemple du cours (chapitre 2 de la partie commande prédictive).

Exo. 4 Traité comme exemple du cours (chapitre 3 de la partie commande prédictive).