Exercice N° : 02

Considérons un signal $x(t)$: $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Soit f_e la fréquence d'échantillonnage avec $f_e = \frac{3f_0}{2}$. Illustrer l'effet du sous échantillonnage de $x(t)$.

$$x_e(t) = x(t) \cdot Pg_{nT_e}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

$$X_e(f) = X(f) * F_e \sum \delta(f - kF_e)$$

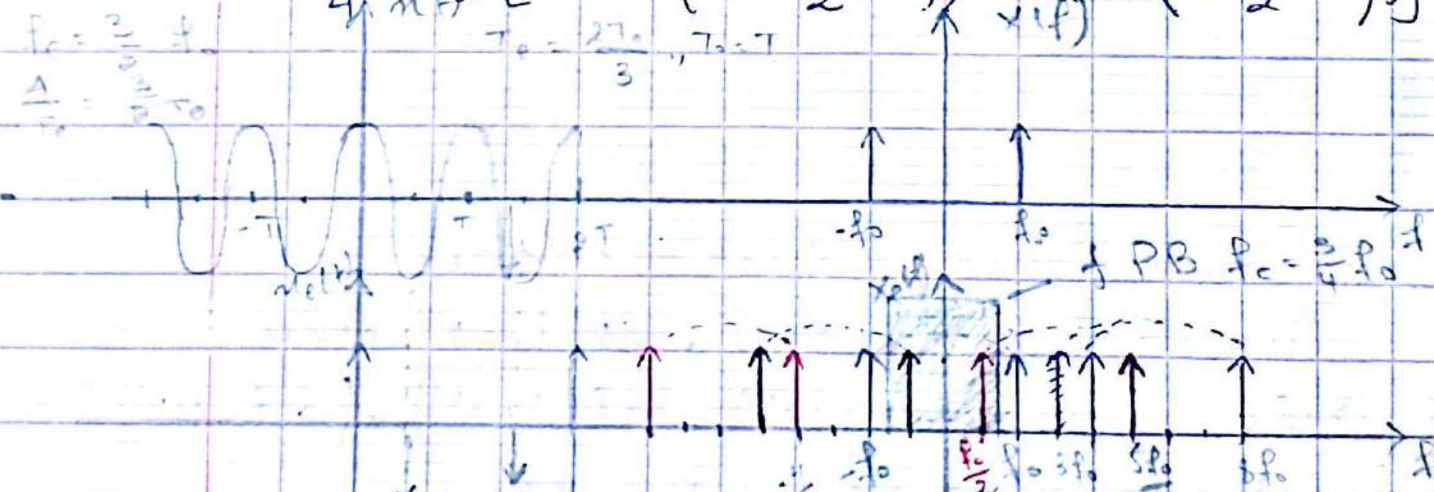
$$= F_e \sum X(f) * \delta(f - kF_e)$$

On a $F_e = \frac{3f_0}{2}$

$$X_e(f) = F_e \sum X(f - kF_e) = \frac{3f_0}{2} \sum X\left(f - k\frac{3f_0}{2}\right)$$

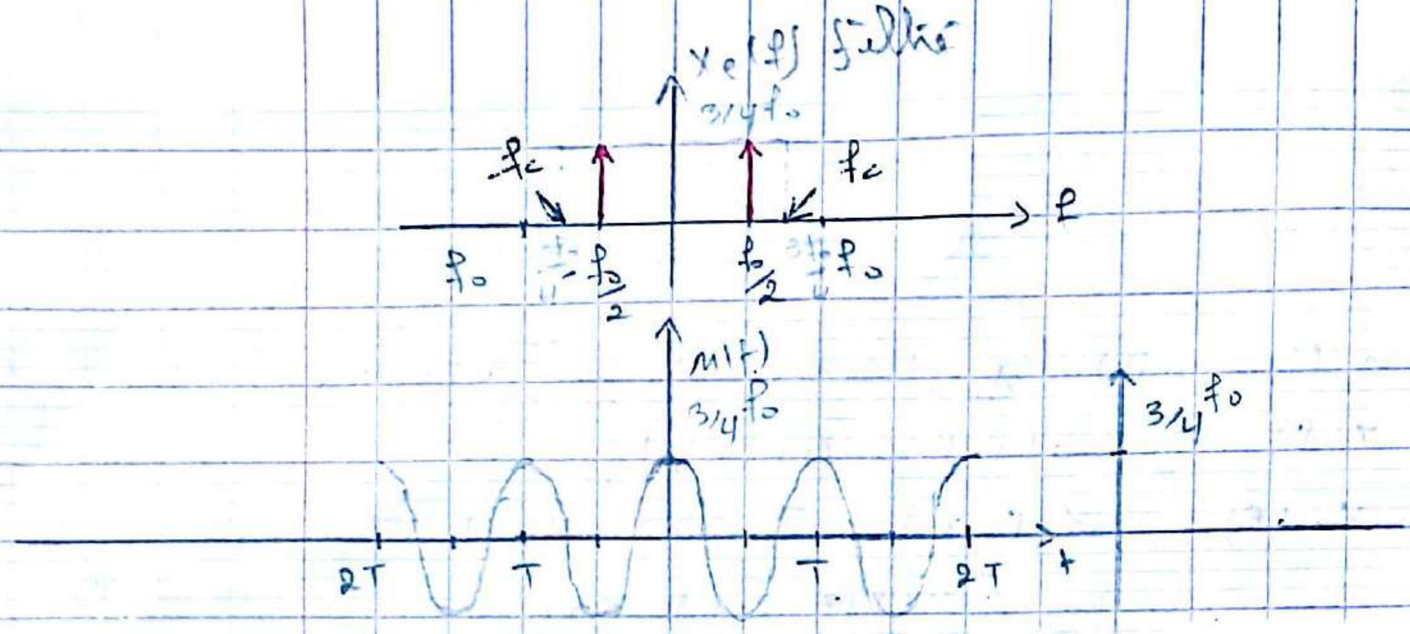
$$= \frac{3f_0}{2 \cdot 2} \sum_k \left[\delta\left(f - \frac{3kf_0}{2} - f_0\right) + \delta\left(f - \frac{3kf_0}{2} + f_0\right)\right]$$

$$= \frac{3f_0}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\delta\left(f - \left(\frac{(3k+2)f_0}{2}\right)\right) + \delta\left(f - \left(\frac{(3k-2)}{2}f_0\right)\right)\right]$$



Filtre P. bas 1 fréq de coupure $f_c = \frac{F_e}{2}$

$$f_c = \frac{3f_0/2}{2} = \frac{3f_0}{4}$$



Calculer la fréquence de Nyquist et la période d'échantillonnage pour chacun des signaux suivants.

a) $x(t) = 5\cos 1750\,(\pi t)\cos(4000\,\pi t)$

b) $x(t) = 5\cos^2 50\,(\pi t)$

c) $x(t) = 5\,\dfrac{\sin 1200\,(\pi t)}{\pi t}$

d) $x(t) = \left[\dfrac{\sin 280\,(\pi t)}{\pi t}\right]^2$

a) $x(t) = 5\cos 1750\pi t \cos 4000\pi t$

$x(t) = \frac{5}{2}\left[\cos(5750\pi t) + \cos(2250\pi t)\right]$

$X(f) = \frac{5}{4}\left[\left(\delta(f-2875) + \delta(f+2875)\right) + \left(\delta(f-1125) + \delta(f+1125)\right)\right]$

$f_{max} = 2875\ Hz \qquad f_e \geq 2 f_{max}$

$f_e \geq 5750 \quad , f_{Nyq} = 2875\ Hz$

b) $x(t) = 5\cos^2 50\pi t$

$x(t) = \frac{5}{2}\left[1 + \cos(100\pi t)\right] = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\cos(100\pi t)$

$X(f) = \frac{5}{2}\delta(f) + \frac{5}{4}\left[\delta(f-50) + \delta(f+50)\right].$

$f_m = 50\,Hz.$ $f_e \geq 2 f_m$ $f_e \geq 100\,Hz.$

c) $x(t) = 5 \frac{\sin 1200(\pi t)}{\pi t} = 6000 \frac{\sin 1200\pi t}{1200\pi t}$

$= 6000 \ \text{sinc}\,(1200\,t).$

$X(f) =$ la propriété de la symétrie.

$s(t) \overset{TF}{\longleftrightarrow} S(f)$ $\quad S(t) \overset{TF}{\longleftrightarrow} s(-f)$

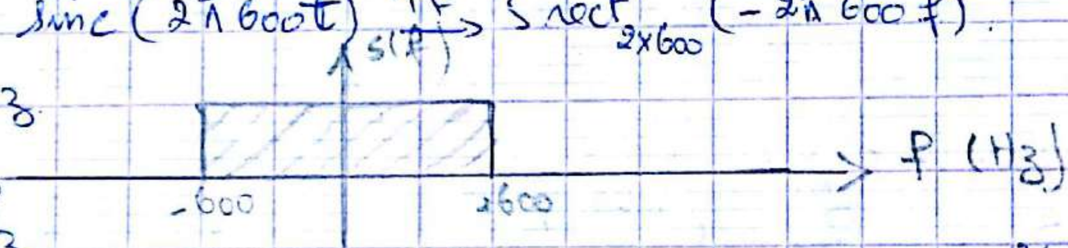
$\text{rect}_{2T}(t) \rightarrow 2T\,\text{sinc}\,(2\pi f T).$

$5(2\times 600)\ \text{sinc}\,(2\pi 600 t) \xrightarrow{TF} 5\,\text{rect}_{2\times 600}(-2\pi 600 f).$

$f_{max} = 600\,Hz.$

$f_e \geq 1200\,Hz$

$f_{Nyq} = 600\,Hz$



d) $x(t) = \left(\sin 280(\pi t) / \pi t\right)^2 = \left[280 \frac{\sin 280(\pi t)}{\pi t}\right]^2$

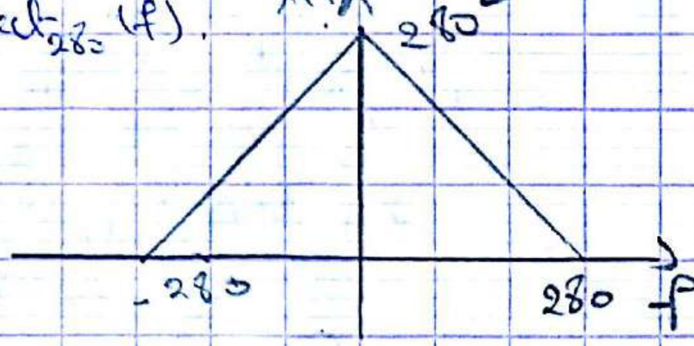
$x(t) = 280^2\,\text{sinc}^2(280\pi t) = 280 \,.\, \text{sinc}\,(280\pi t) \,.\, \text{sinc}\,(280\pi t)$

$X(f) = 280^2\,TF^{-1}\left[\text{sinc}\,(280\pi t)\right] * TF^{-1}\left[\sin(280\pi t)\right].$

$= 280^2\,\text{rect}_{280}(f) * \text{rect}_{280}(f).$

$X(f) = 280^2\,\text{tri}_{560}(f)$

$f_{max} = 280\,Hz.$



$f_{Nyq} = 280\,Hz$

$F_e = 2 f_{max} = 560\,Hz.$

On désire développer le signal $s(n)$ périodique discret de période N donné par :

$$s_N(n)=\begin{cases} N & -N_1 \le n \le N_1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$, sur une seule période. Avec $N_1 < \frac{N}{2}$

Trouver pour cette représentation les coefficients complexes S_k.

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=[N]} s(n)\, e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} N\, e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$= \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \left(e^{-j2\pi \frac{k}{N}}\right)^n$$

Si $k = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N \ldots$

$$S_k = \sum_{n=-N_1}^{N_1} (1) = N_1 - (-N_1) + 1 = 2N_1 + 1.$$

$\frac{N}{2} - \left(-\frac{N}{2}+1\right) + 1$

$\frac{N}{2} + \frac{N}{2} - 1 + 1 = N$

Si $k \neq 0, \pm N, \pm 2N \ldots$

$$S_k = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \left(e^{-j2\pi \frac{k}{N}}\right)^n = \sum_{n=-N_1}^{N_1} r^n = r^{-N_1} \frac{1 - r^{2N_1+1}}{1 - r}$$

$$= e^{\left(+j2\pi \frac{k}{N}\right)N_1} \cdot \frac{1 - \left(e^{-j2\pi \frac{k}{N}}\right)^{2N_1+1}}{1 - e^{-j2\pi \frac{k}{N}}}$$

$$= e^{\left(j2\pi \frac{k}{N}\right)N_1} \frac{e^{-j\pi \frac{k}{N}(2N_1+1)}\left[e^{j\frac{k\pi}{N}(2N_1+1)} - e^{-j\pi \frac{k}{N}(2N_1+1)}\right]}{e^{-j\pi \frac{k}{N}}\left[e^{j\pi \frac{k}{N}} - e^{-j\pi \frac{k}{N}}\right]}$$

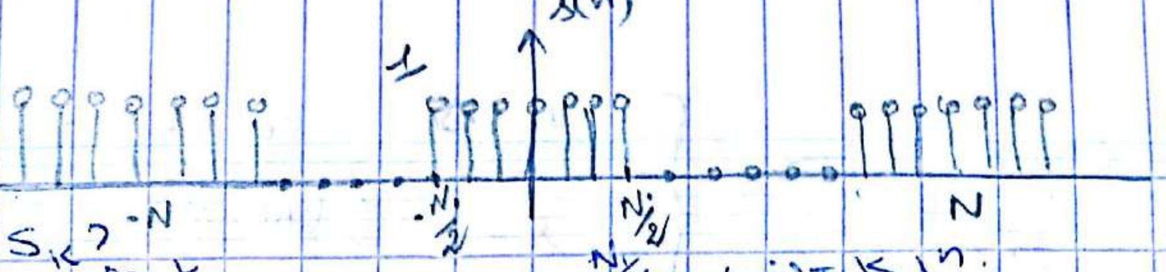
$$= e^{-j\pi \frac{k}{N} 2N_1} \quad e^{-j2\pi \frac{k}{N}}$$

$$= \frac{2j \sin\left(\pi \frac{k}{N}(2N_1+1)\right)}{2j \sin \frac{\pi k}{N}} = \frac{\sin\left(\pi \frac{k}{N}(2N_1+1)\right)}{\sin \pi \frac{k}{N}}$$

donc :

$$S_k = \begin{cases} 2N_1 + 1 & \text{pr } k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{\sin\left(\pi \frac{k}{N}(2N_1+1)\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)} & \text{pr } k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \end{cases}$$

EX N°1



calculer S_k ?

$$S_k = \frac{1}{N}\sum_{n=[N]} s(n)\, e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} = \frac{1}{N}\sum_{-\frac{N_1}{2}}^{\frac{N_1}{2}} \left(e^{-j2\pi \frac{k}{N}}\right)^n$$

Pr $k = 0, \pm N, \pm 2N$ ....

$$S_k = \frac{1}{N}\sum_{-\frac{N_1}{2}}^{\frac{N_1}{2}} (1) = \frac{1}{N}\left(\frac{N_1}{2}+\frac{N_1}{2}\right)+1 = \frac{N_1}{N}+1$$

$$= \frac{N_1+1}{N} \quad \text{...(1)}$$

Pr $k \neq 0, \pm N, \pm 2N$ ....

$$S_k = \frac{1}{N}\sum_{-\frac{N_1}{2}}^{\frac{N_1}{2}} \left(e^{-j2\pi \frac{k}{N}}\right)^n = \frac{1}{N}\left(e^{-j2\pi \frac{k}{N}}\right)$$

On posons $m = n + \frac{N_1}{2}$ si $\begin{cases} n = -\frac{N_1}{2} \Rightarrow m = 0 \\ n = \frac{N_1}{2} \Rightarrow m = N_1 \end{cases}$

$$S_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N_1} \left(e^{-j2\pi \frac{k}{N}}\right)^{m-\frac{N_1}{2}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N_1} \left(e^{-j2\pi \frac{k}{N}}\right)^{m} \cdot \left(e^{+j2\pi \frac{k}{N}}\right)^{\frac{N_1}{2}}$$

$$= \frac{1}{N}\left(e^{+j2\pi \frac{k}{N}}\right)^{\frac{N_1}{2}} \cdot \sum_{m=0}^{N_1} \left(e^{-j2\pi \frac{k}{N}}\right)^{m}$$

$$= \frac{1}{N} e^{j\pi \frac{k}{N} N_1} \frac{1-\left(e^{-j2\pi \frac{k}{N}}\right)^{(N_1+1)}}{1-e^{-j2\pi \frac{k}{N}}}$$

$$= \frac{1}{N} e^{j\pi \frac{k}{N} N_1} \frac{e^{-j\pi \frac{k}{N}(N_1+1)}\left[e^{j\pi \frac{k}{N}(N_1+1)} - e^{-j\pi \frac{k}{N}(N_1+1)}\right]}{e^{-j\pi \frac{k}{N}}\left[e^{j\pi \frac{k}{N}} - e^{-j\pi \frac{k}{N}}\right]}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{2j \sin\left(\pi \frac{k}{N}(N_1+1)\right)}{2j \sin\left(\pi \frac{k}{N}\right)} = \frac{1}{N}\frac{\sin\left(\pi \frac{k}{N}(N_1+1)\right)}{\sin \frac{\pi k}{N}} \quad \text{...(2)}$$

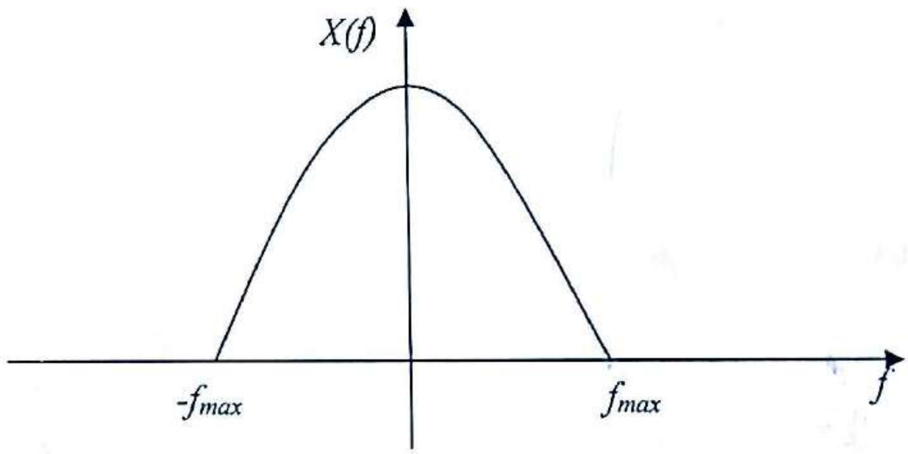
donc :

$$S_K = \begin{cases} \dfrac{N_1+1}{N} & \text{Pr } K = 0, \pm N, \pm 2N \ldots \\ \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin\left(\pi \frac{K}{N}(N_1+1)\right)}{\sin\left(\pi \frac{K}{N}\right)} & \text{Pr } K \neq 0, \pm N, \pm 2N \ldots \end{cases}$$

ci-d

Soit $x(t)$ un signal ayant un spectre $X(f)$ limité en fréquence défini par :

$X(f) = 0 \quad pour \quad f \geq |f_{\max}|$. Ce spectre est représenté sur la figure ci-dessous :



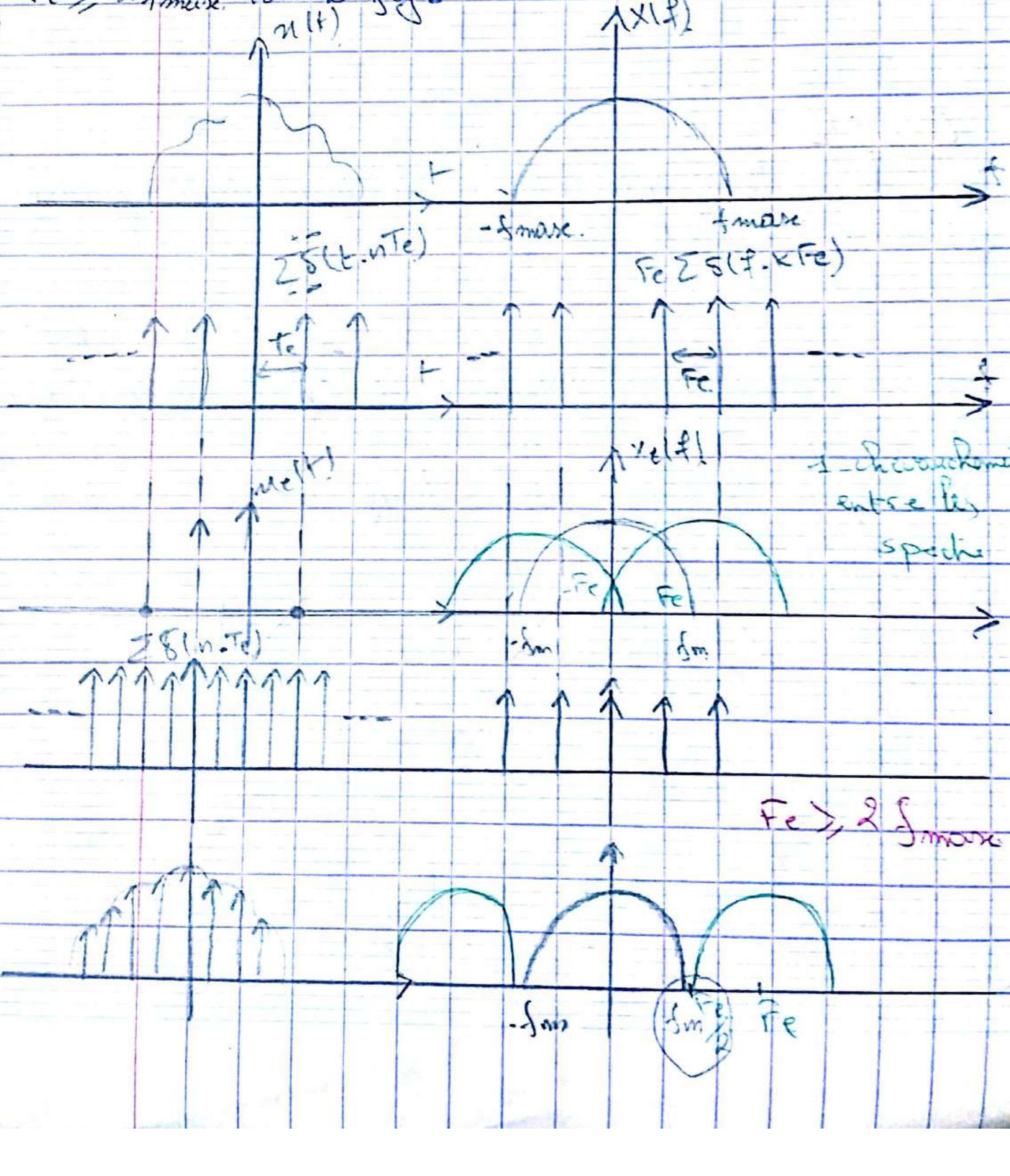
Soit f_e la fréquence d'échantillonnage.

1. Démonter que f_e doit être supérieure ou égale à 2 fois la fréquence d
« $f_e \geq 2 f_{\max}$ ».
2. Quel est le moyen le plus simple à utiliser pour récupérer le signal original.
3. Tracer schématiquement les résultats précédents.

$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

$$X_e(f) = X(f) * F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e)$$

c'est la répétition de spectre au rythme Fe". L'échantillonnage se produit sans interférences entre les motifs, si $Fe \geq 2f_{max}$ voir la fig :

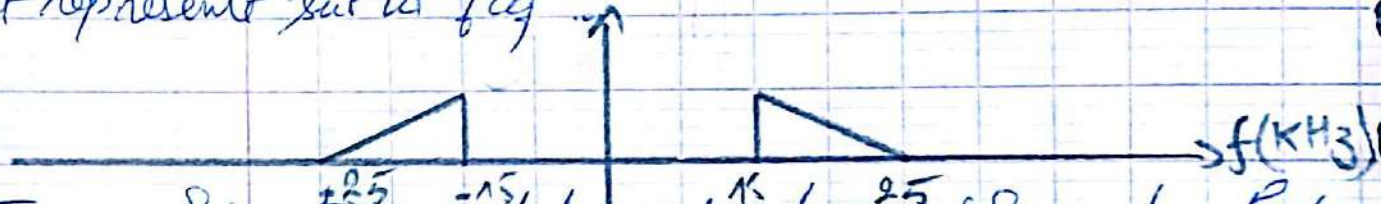


L'absence du chevauchement => $-f_m + F_e \geq f_m$ $\boxed{F_e \geq 2 f_m}$

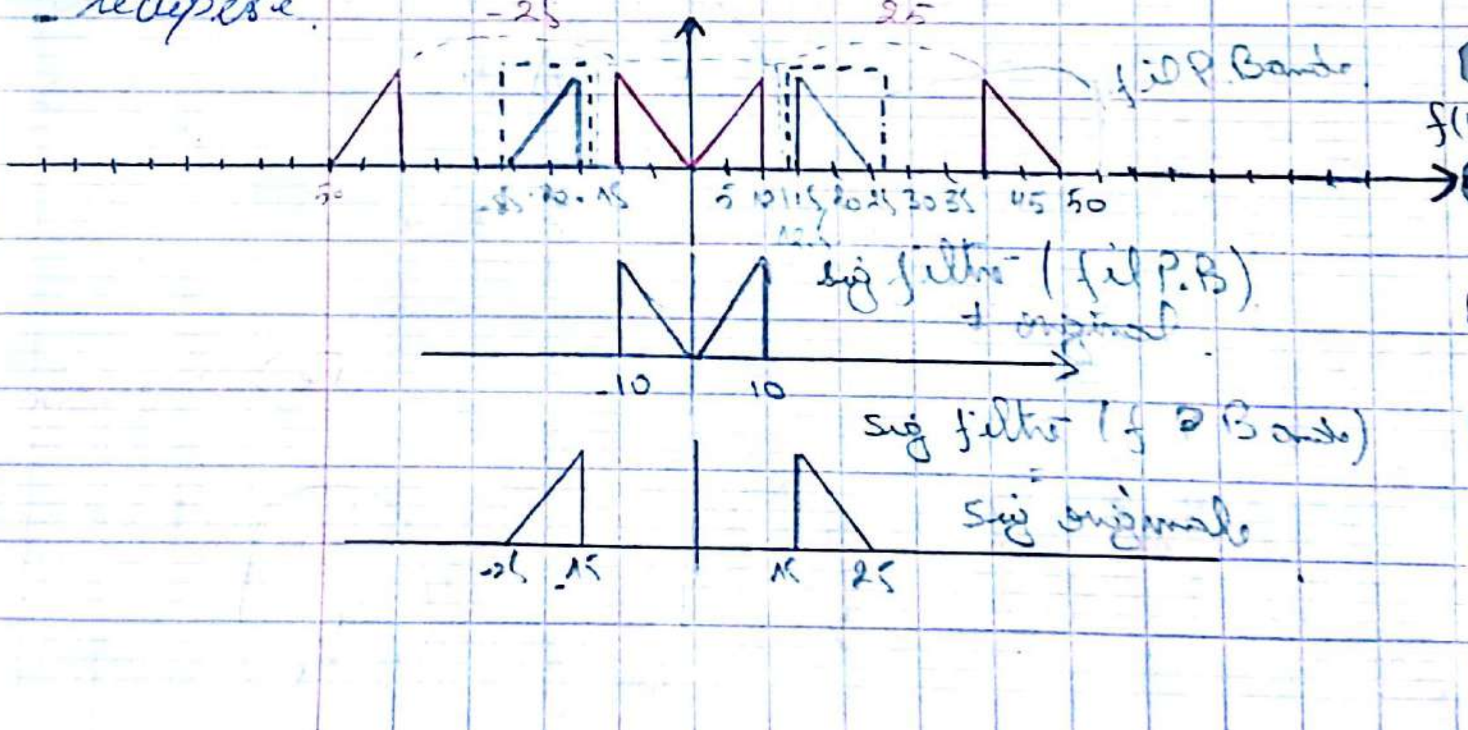
2_ Pr récupérer le sig original en utilise le fil P.B de "$F_e/2$"

EXN°4

Considérons le sig x(t) à longueur de B limité dont sa spectre est représenté sur la fig :



- Tracer schématiquement le spectre du sig éch avec les fréqs f_e = 25, 45, 50 Hz.
- Indiquer, ds chaque cas, si le sig peut être correctement récupéré.



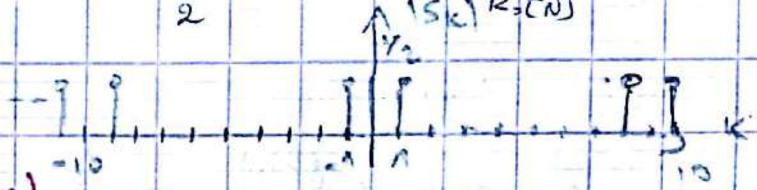
Déterminer les coefficients de Fourier S_k des signaux suivants. Tracer $|S_k|$.

1) $s(n) = \cos 2\pi \frac{1}{10} n$, 2) $s(n) = \sin^2 2\pi \frac{1}{20} n$, 3) $s(n) = \cos^3 \pi \frac{1}{5} n$.

1/ $s(n) = \cos 2\pi \frac{1}{10} n$

$$s(n) = \cos 2\pi \frac{1}{10} n = \frac{e^{j2\pi\frac{1}{10}n} + e^{-j2\pi\frac{1}{10}n}}{2} = \sum_{k=[N]} S_k e^{j2\pi\frac{k}{N}n}$$

$$\begin{cases} S_k = \frac{1}{2} & \text{pr } k = -1 \\ S_k = \frac{1}{2} & \text{pr } k = 1 \end{cases}$$



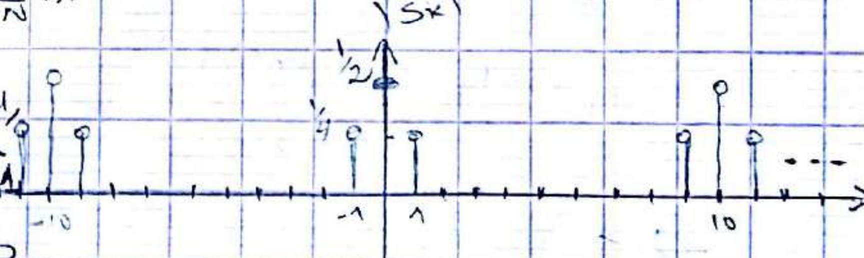
2/ $s(n) = \sin^2(2\pi \frac{1}{20} n)$

$$s(n) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos 2(2\pi \frac{1}{20} n)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{e^{2j2\pi\frac{1}{20}n} + e^{-2j2\pi\frac{1}{20}n}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{2j2\pi\frac{1}{20}n} - \frac{1}{4} e^{-2j2\pi\frac{1}{20}n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{j2\pi\frac{1}{10}n} - \frac{1}{4} e^{-j2\pi\frac{1}{10}n}$$

$$= \sum_{k=[N]} S_k e^{j2\pi\frac{k}{N}n}$$

$$S_k = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{Pr } k = -1 \\ -\frac{1}{4} & \text{Pr } k = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{Pr } k = 0 \end{cases}$$



3/ $s(n) = \cos^3 \pi \frac{1}{5} n = \cos \pi \frac{1}{5} n \cdot \cos^2 \pi \frac{1}{5} n = \cos \pi \frac{1}{5} n \cdot \frac{1}{2}\left[1 + \cos \frac{2\pi}{5} n\right]$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{j\pi\frac{1}{5}n} + \frac{1}{2} e^{-j\pi\frac{1}{5}n}\right]\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j2\pi\frac{1}{5}n} + e^{-j2\pi\frac{1}{5}n}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4} e^{j\pi\frac{1}{5}n} + \frac{1}{4} e^{-j\pi\frac{1}{5}n} + \frac{1}{4} e^{j\pi\frac{3}{5}n} + \frac{1}{4} e^{-j\pi\frac{1}{5}n} + \frac{1}{4} e^{j\pi\frac{1}{5}n}$$

$$+ \frac{1}{4} e^{-j\pi\frac{3}{5}n} = \frac{1}{4} e^{j\pi\frac{1}{5}n} + \frac{1}{4} e^{-j\pi\frac{1}{5}n}$$

Déterminer la transformée de Fourier des signaux suivants :

$$s(n)=\begin{cases}2 & -N\le n\le N\\ 0 & ailleurs\ .\end{cases}\ ;\qquad \text{AN : } s(n)=\begin{cases}1 & -11<n<11\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

$$s(n)=\begin{cases}n & -5<n<5\\ 0 & ailleurs\ .\end{cases}\ ;\qquad s(n)=\begin{cases}\cos 2\pi\frac{1}{10}n & -10<n<10\\ 0 & ailleurs\ .\end{cases}\ ;$$

$$s(n)=\begin{cases}2 & -N\le n\le N\\ 0 & \end{cases}$$

$$S(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)\,e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=-N}^{N} 2.e^{-j2\pi fn} = 2\sum_{-N}^{N} e^{-j2\pi fn}$$

Ps $f=0,\pm1,\pm2\ \ldots$

$$S(f)=2\sum_{-N}^{N} 1 = 2(N-(-N)+1) = 2(2N+1)$$

Ps $f\neq 0,\pm1,\pm2\ \ldots$

$$S(f)=2\sum_{-N}^{N}\left(e^{-j2\pi f}\right)^n = 2\sum_{-N}^{N} r^n = 2.\frac{1-\left(e^{-j2\pi f}\right)^{2N+1}}{1-e^{-j2\pi f}}.\left(e^{-j2\pi f}\right)^{-N}$$

$$=2.\left(e^{-j2\pi f}\right)^{-N}.\frac{1-e^{(-j2\pi f)2N+1}}{1-e^{-j2\pi f}} = 2e^{j2\pi fN}\frac{e^{-j\pi f(2N+1)}\left[e^{j\pi f(2N+1)}-e^{-j\pi f(2N+1)}\right]}{e^{-j\pi f}\left[e^{j\pi f}-e^{-j\pi f}\right]}$$

$$=2.\frac{\sin \pi f(2N+1)}{\sin(\pi f)}$$

$$S(f)=\begin{cases}4N+2 & f=0,\pm1,\pm2\ldots\\ 2.\dfrac{\sin\pi f(2N+1)}{\sin(\pi f)} & f\neq 0,\pm1,\pm2\ldots\end{cases}$$

Ps $N=11$

AN :
$$S(f)=\begin{cases}23 & f=0,\pm1\ldots\\ 2\ \dfrac{\sin 23\pi f}{\sin\pi f} & f\neq 0,\pm1\ldots\end{cases}$$

$$s(n)=\begin{cases}\cos 2\pi\frac{1}{10}n & -10<n<10\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

$$S(f)=\sum_{-10}^{10}\cos 2\pi\frac{1}{10}n\,e^{-j2\pi fn} = \sum_{-10}^{10}\left(\frac{e^{j2\pi\frac{1}{10}n}+e^{-j2\pi\frac{1}{10}n}}{2}\right)e^{-j2\pi fn}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{I_1} e^{-j2\pi(f+\frac{1}{10})n} + \frac{1}{2} \sum_{I_2} e^{-j2\pi(f-\frac{1}{10})n}.$$

Cas I_1 : $f + \frac{1}{10} = P$ | P entier $P = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

$f = P - \frac{1}{10}$.

dc : $S(f) = \frac{1}{2} \sum_{-10}^{10} 1 = \frac{21}{2}$.

Cas 2 : $f \neq P - \frac{1}{10} \iff I_1 = \frac{1}{2} \sum_{-10}^{10} \left(e^{-j2\pi(f+\frac{1}{10})}\right)^{10}$

$$I_1 = \frac{1}{2} e^{-j2\pi(f+\frac{1}{10})^{-10}} \frac{1 - e^{-j2\pi(f+\frac{1}{10})^{21}}}{e^{-j\pi(f+\frac{1}{10})} e^{-j2\pi(f+\frac{1}{10})} e^{-j2\pi(f+\frac{1}{10})}} = \frac{1}{2} e^{j20\pi(f+\frac{1}{10})} \times \underline{\qquad}$$

$$\frac{e^{-j\pi(f+\frac{1}{10})21}\left[e^{j21\pi(f+\frac{1}{10})} - e^{-j21\pi(f+\frac{1}{10})}\right]}{e^{j\pi(f+\frac{1}{10})}\left[e^{j\pi(f+\frac{1}{10})} - e^{-j\pi(f+\frac{1}{10})}\right]} = \frac{1}{2} \frac{\sin 21\pi(f+\frac{1}{10})}{\sin\pi(f-\frac{1}{10})}$$

Cas I_2 : $f - \frac{1}{10} = P$ $f = P + \frac{1}{10}$.

dc $I_2 = \frac{1}{2} \sum (1) = \frac{1}{2}(21) = \frac{21}{2}$.

Pr $f \neq P + \frac{1}{10} \iff I_2 = \sum e^{-j2\pi(f-\frac{1}{10})n}$.

$$I_2 = \frac{1}{2} e^{-j2\pi(f-\frac{1}{10})^{-10}} \frac{1 - e^{-j2\pi(f-\frac{1}{10})^{21}}}{1 - e^{-j2\pi(f-\frac{1}{10})}} = \frac{1}{2} \cdot e^{j20\pi(f-\frac{1}{10})} \frac{e^{-j21\pi(f-\frac{1}{10})}\left[e - e^{-}\right]}{e^{-j\pi(f-\frac{1}{10})}\left[e - e^{-}\right]}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin 21\pi(f-\frac{1}{10})}{\sin\pi(f-\frac{1}{10})}$$

$$S(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \dfrac{\sin 21\pi(f+\frac{1}{10})}{\sin\pi(f+\frac{1}{10})} & f \neq P - \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} \dfrac{\sin 21\pi(f-\frac{1}{10})}{\sin\pi(f-\frac{1}{10})} & f \neq P + \frac{1}{10} \\ \frac{21}{2} & f = P \pm \frac{1}{10} \end{cases}$$

1. Déterminer la transformée de Fourier du signal $s(n)$ donné par : $s(n) = \exp\left(- j2\right.$

2. Démontrer que la transformée de fourier d'un signal périodique discret, de péric donnée par :

$$S(f) = \sum_{k=[N]} S_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{N} - l)$$

3. Déterminer la transformée de Fourier du signal périodique, *s(n)* suivant :

$$s_N(n) = \begin{cases} 1 & -N_1 + 1 < n < N_1 - 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}.$$

$s_N(n)$ est le signal *s(n)* périodique tronqué sur une seule période.

4. Déterminer et tracer la transformée de Fourier du signal périodique, *s(n)* suivants :

1) $s(n) = \cos 2\pi \frac{1}{10} n$, **2)** $s(n) = \sin^2 2\pi \frac{1}{20} n$, **3)** $s(n) = \cos^3 \pi$ -

1/ $s(n) = \exp(-j2\pi \frac{K}{N} n)$

- en analog $TF[\exp(-j2\pi f_0 t)] = \delta(f - f_0)$
- en Numq $TF[\exp(-j2\pi \frac{K}{N} n)] = \delta(f - \frac{K}{N})$ sur 1 T.

sur tous l' [ ] de freq : $S(f) = \sum_{P=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{K}{N} - P)$ ✓

2/ $s(n) = \sum_{K=[N]} S_K \exp(-j2\pi \frac{K}{N} n)$

$S(f) = TF[\sum S_K e^{-j2\pi \frac{K}{N} n}] = \sum_{K=[N]} S_K TF[e^{-j2\pi \frac{K}{N} n}]$

$= \sum_{K=[N]} S_K \sum_{P=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{K}{N} - P)$ ✓

3/ : s(n) Tdiqu

$S_K = \frac{1}{N} \sum_{K=[N]} s(n) e^{-j2\pi \frac{K}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{-N_1+1}^{N_1-1} e^{-j2\pi \frac{K}{N} n}$

$K = 0, \pm N, \pm 2N \ldots$

$S_K = \frac{1}{N} \sum 1 = \frac{1}{N}(N_1 - \cancel{1} - (-N_1 + 1) + \cancel{1}) = \frac{1}{N}(2N_1 + 1)$

$K \neq 0, \pm N, \pm 2N \ldots$

$S_K = \frac{1}{N} \cdot e^{(-j2\pi \frac{K}{N}) \cdot (-N_1+1)} \frac{1 - (e^{-j2\pi \frac{K}{N}})^{2N_1 - 1}}{1 - e^{-j2\pi \frac{K}{N}}}$

$e^{j2\pi\frac{k}{N}} \cdot e^{j2\pi N_1 \frac{k}{N}}$ $\quad e^{-j\pi\frac{k}{N}2N_1} \cdot e^{-j\pi\frac{k}{N}}$

$-e^{j2\pi\frac{k}{N}N_1}$

$$= \frac{1}{N} e^{j2\pi(N_1-1)\frac{k}{N}} \frac{e^{-j\pi\frac{k}{N}(2N_1-1)}\left[e^{j\pi\frac{k}{N}(2N_1-1)} - e^{-j\pi\frac{k}{N}(2N_1-1)}\right]}{e^{-j\pi\frac{k}{N}}\left[e^{j\pi\frac{k}{N}} - e^{-j\pi\frac{k}{N}}\right]}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{N}(2N_1-1)\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)} \cdot e^{j2\pi\frac{k}{N}}$$

alors : $S(f) = \sum S_k \sum \delta(f - \frac{k}{N} - p)$ $\quad = 1$, le seul T.

$$= \sum_{k=[N]} \frac{1}{N} \frac{\sin}{\sin} \cdot e^{j2\pi\frac{k}{N}} \sum_{p=} \delta(f - \frac{k}{N})$$

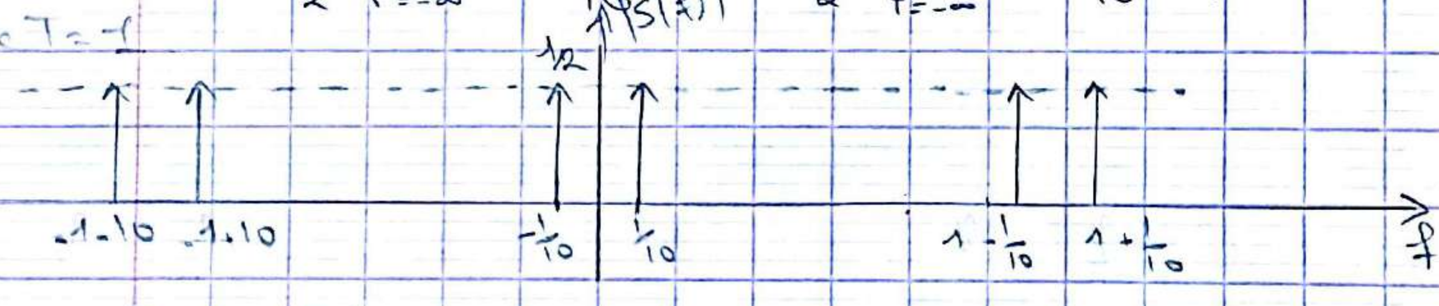
4) $s(n) = \cos 2\pi \frac{1}{10} n$.

$S_k = \frac{1}{N} \sum \frac{1}{2} e^{j2\pi\frac{1}{10}n} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi\frac{1}{10}n}$ $\quad S_1 = 1/2$, $S_{-1} = 1/2$

alors $S(f) = \sum S_k \sum \delta(f - \frac{k}{N} - p)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(f + \frac{1}{10} - p) + \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{1}{10} - p)$$

de T = 1



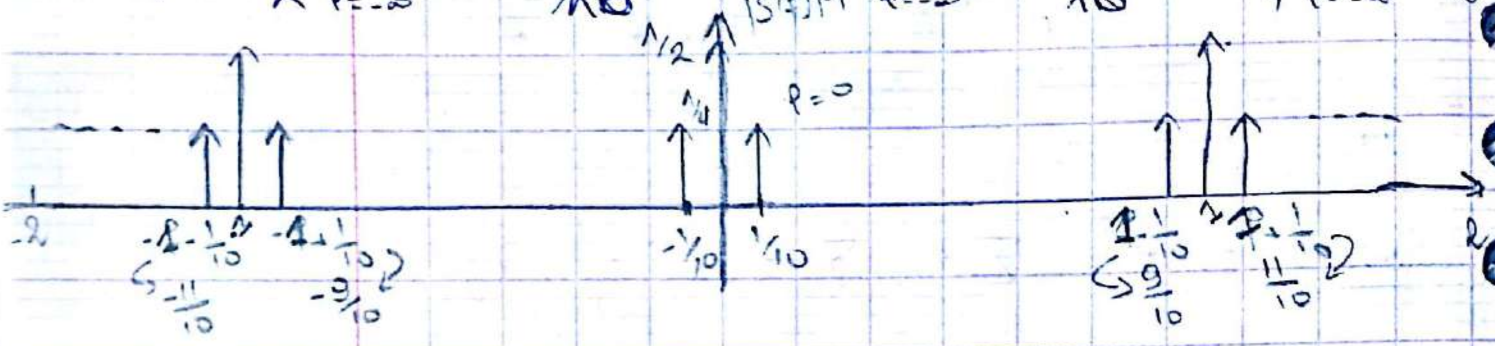
$s(n) = \sin^2 2\pi \frac{1}{20} n$.

$$S_k = \frac{1}{N}\frac{1}{2}\sum\left(1 - \cos 2\pi \frac{1}{10} n\right) = \frac{1}{2N}\sum \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j2\pi\frac{1}{10}n} + e^{-j2\pi\frac{1}{10}n}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{j2\pi\frac{1}{10}n} - \frac{1}{4}e^{-j2\pi\frac{1}{10}n}\right).$$

$$S_k = \begin{cases} 1/2 & k = 0 \\ -1/4 & k = -1 \\ -1/4 & k = 1 \end{cases}$$

$$S(f) = \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{0}{10} - p\right) - \frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f + \frac{1}{10} - p\right) - \frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{1}{10} - p\right)$$



S₀.
Ex 1.

DFT.

$$s(n) = \cos 2\pi \frac{1}{10} n$$

N n'est X de 10

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)\, e^{-j 2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi\frac{1}{10}n} + e^{-j2\pi\frac{1}{10}n}\right) e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{10}\right)n} + e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} + \frac{1}{10}\right)n} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{10}\right)n}}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} + \frac{1}{10}\right)n}}_{I_2}$$

1) $I_1 = \frac{1}{2} \sum e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{10}\right)n}$

Ps $k = \frac{N}{10} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} \sum_{0}^{N-1} (1)^n = \frac{N}{2}$

Ps $k \neq \frac{N}{10}$

$$I_1 = \frac{1}{2} \sum e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{10}\right)n} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{10}\right)N}}{1 - e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{10}\right)}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{-j\pi\left(k - \frac{N}{10}\right)}}{e^{-j\pi\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{10}\right)}} \frac{e^{j\pi\left(k - \frac{N}{10}\right)} - e^{-j\pi\left(k - \frac{N}{10}\right)}}{e^{j\pi\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{10}\right)} - e^{-j\pi\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{10}\right)}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\pi\left(-\left(k - \frac{N}{10}\right) + \left(\frac{k}{N} - \frac{1}{10}\right)\right)} \frac{\sin\left(\pi\left(k - \frac{N}{10}\right)\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{10}\right)\right)}.$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\pi\left(-\frac{k(N-1)}{N} + \frac{N-1}{10}\right)} \frac{\sin \pi\left(k - \frac{N}{10}\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{10}\right)\right)}$$

2) $I_2 = \frac{1}{2} \sum_{0}^{N-1} e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} + \frac{1}{10}\right)n} = \frac{1}{2} \sum \left(e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} + \frac{1}{10}\right)}\right)^n$

Ps $k = -\frac{N}{10} + N$ alc $I_2 = \frac{1}{2} \sum (1)^n = N/2$.

Ps $k \neq -\frac{N}{10} + N$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} + \frac{1}{10}\right)n} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \left(e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} + \frac{1}{10}\right)}\right)^N}{1 - e^{-j2\pi\left(\frac{k}{N} + \frac{1}{10}\right)}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{-j\pi\left(k + \frac{N}{10}\right)}}{e^{-j\pi\left(\frac{k}{N} + \frac{1}{10}\right)}} \cdot \frac{e^{j\pi\left(k + \frac{N}{10}\right)} - e^{-j\pi\left(k + \frac{N}{10}\right)}}{e^{j\pi\left(\frac{k}{N} + \frac{1}{10}\right)} - e^{-j\pi\left(\frac{k}{N} + \frac{1}{10}\right)}}$$

$- k + \frac{N}{10} = \frac{k}{N} + \frac{1}{10} \quad - \frac{k(N+1)}{N} + \left(\frac{N+1}{10}\right)$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{j\pi\left(-\left(k+\frac{N}{10}\right) + \left(\frac{k}{N} + \frac{1}{10}\right)\right)}}{e^{j\pi\left(k\left(\frac{1-N}{N}\right) + \frac{N-1}{10}\right)}} \times \frac{\sin\left(\pi\left(k + \frac{N}{10}\right)\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{k}{N} + \frac{1}{10}\right)\right)}$$

S

Ex 1

$s(n) = a^n \qquad s(K) = \sum_{n=0}^{20} a^n e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} = \sum \left(a \cdot e^{-j2\pi\frac{k}{N}}\right)^n$

$$S(K) = \frac{1 - \left(a e^{-j2\pi\frac{k}{N}}\right)^{21}}{1 - a e^{-j2\pi\frac{k}{N}}} = \frac{1 - a^{21} e^{-j2\pi 21 \frac{k}{N}}}{1 - a e^{-j2\pi\frac{k}{N}}}$$

Ex 2

$s_1(n) = \cos^2 4\pi \frac{1}{N} n = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 8\pi \frac{1}{N} n\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{j2\pi\frac{4n}{N}} + e^{-j2\pi\frac{4}{N}n}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{j2\pi\frac{4}{N}n} + \frac{1}{4} e^{-j2\pi\frac{4}{N}n} \quad \ldots\ldots (1)$$

$\frac{1}{2}$ $= 0$

$= 0$

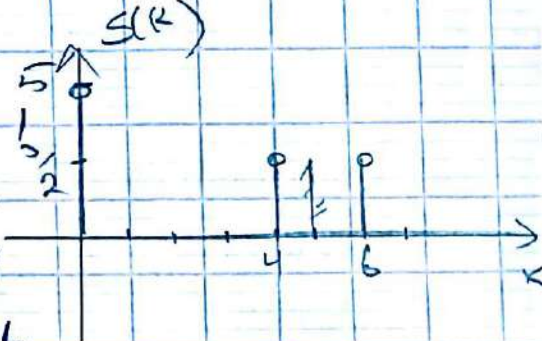
$\frac{1}{4}$ $= -4N$

$-\frac{1}{4}$

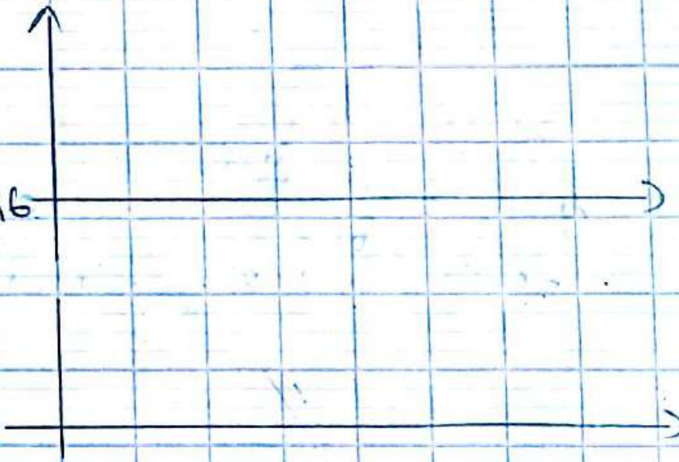
$s(n) = \sum_{k=[N]} S_k \, e^{+j2\pi \frac{k}{N} n}$ .... ② Par comparaison ① et ②

$$S_k = \begin{cases} 1/2 & \text{pr } k = 0 \\ 1/4 & \text{pr } k = \pm 4 \end{cases}$$

$$S(K) = N S_k = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{pr } k = 0 \\ \frac{N}{4} & \text{pr } k = 4 \\ \frac{N}{4} & \text{pr } k = N-4 \end{cases}$$



$N = 10$ $\quad S(K) = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 & K = 0 \\ \frac{10}{4} = \frac{5}{2} & K = 4 \\ \frac{10}{4} & K = 6 \end{cases}$



$N = 20$ $\quad \begin{cases} \frac{20}{2} = 10 & K = 0 \\ \frac{20}{4} = 5 & K = 4 \\ \frac{20}{4} = 5 & K = 16 \end{cases}$

$N = 40$ $\quad \begin{cases} \frac{40}{2} = 20 & K = 0 \\ \frac{40}{4} = 10 & K = 4 \\ \frac{40}{4} = 10 & K = 36 \end{cases}$

$S_2(n) = \sin^2 4\pi \frac{1}{N} n$

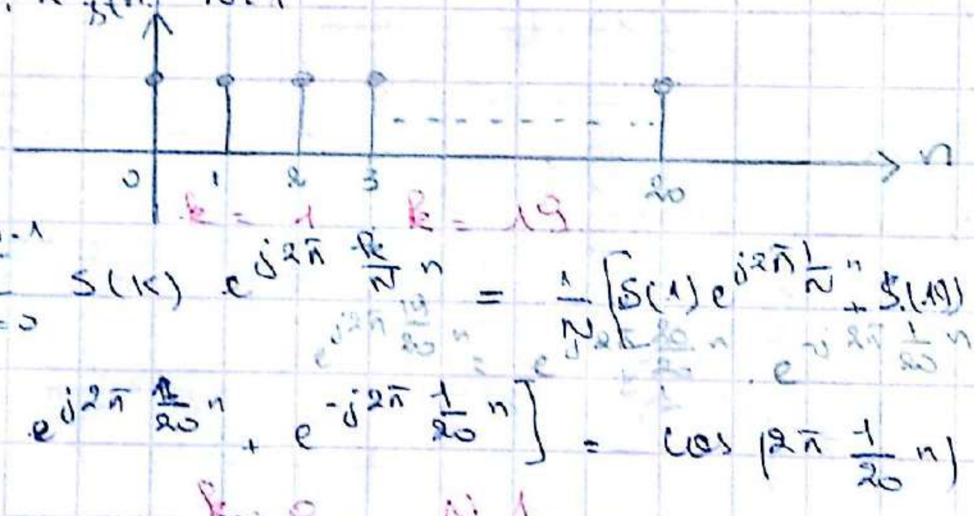
$= \frac{1}{2}\left[1 - \cos 8\pi \frac{1}{N} n\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{j2\pi \frac{4}{N} n} + e^{-j2\pi \frac{4}{N} n}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{j2\pi \frac{4}{N} n} - \frac{1}{4} e^{-j2\pi \frac{4}{N} n}$

$S(K) = 21$ $\quad k = 0, 21, 42, \ldots$

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(K)\, e^{j 2\pi \frac{k}{N} n} = \frac{1}{21} \cdot 21 = 1.$$

pr $n = 0, 1, 2$ $\quad N = 21$



$S(K) = 10$ $\quad k = 1 \quad k = 19$

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(K)\, e^{j 2\pi \frac{k}{N} n} = \frac{1}{N} \left[S(1)\, e^{j 2\pi \frac{1}{N} n} + S(19)\, e^{j 2\pi \frac{19}{N} n} \right]$$

$$e^{j 2\pi \frac{19}{20} n} = e^{j 2\pi \frac{20}{20} n} \cdot e^{-j 2\pi \frac{1}{20} n}$$

$$= \frac{10}{20} \left[e^{j 2\pi \frac{1}{20} n} + e^{-j 2\pi \frac{1}{20} n} \right] = \cos\left(2\pi \frac{1}{20} n\right)$$

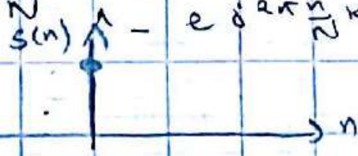
$S(K) = 1$ $\quad k = 0 \ldots N-1$

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 \cdot e^{j 2\pi \frac{k}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{j 2\pi \frac{n}{N}}\right)^k$$

Pr $n = 0$ $\quad s(n) = \frac{N}{N} = 1.$

Pr $n \neq 0$. $\delta(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{j2\pi\frac{n}{N}}\right)^k = \frac{1}{N}\frac{1-e^{j2\pi\frac{n}{N}N}}{1-e^{j2\pi\frac{n}{N}}} = 0$

$\delta(n) = \begin{cases}1 & \text{Pr } n=0\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$



$S(k) = N$ $\quad k=0$

$\delta(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \delta(k)\, e^{j2\pi\frac{k}{N}n} = \frac{1}{N}\cdot N = 1$

Série N°4

1. Déterminer la convolution discrète *z(n)* des deux signaux discrets *x(n) et y(n)* suivants

$$x(n) = \begin{cases}1 & -5 \le n \le 5\\ 0 & \textit{Ailleurs} .\end{cases} \qquad y(n) = \begin{cases}1 & -3 \le n \le 3\\ 0 & \textit{Ailleurs} .\end{cases}$$

2. Répéter la question '1' pour les signaux *x(n)* et *y(n)* suivants :

$$) = \begin{cases}1 & 0 < n < 20\\ 0 & \textit{ailleurs} .\end{cases} \qquad y(n) = \begin{cases}0.6^{|n|} & -10 \le n \le 10\\ 0 & \textit{ailleurs} .\end{cases}$$

$x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, y(n-m)$

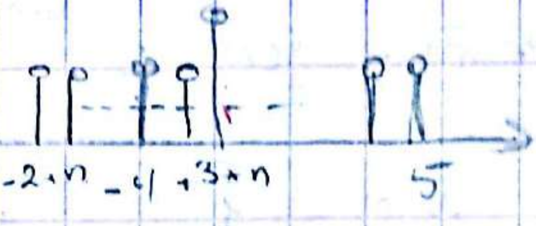
1er cas :

Pas chevauchement

$z(n) = 0 \quad n < -8 . \quad 3+n < -5$

2ème cas

$$\begin{cases} 3+n > -4 \\ -2+n < -4 \end{cases} \quad -7 < n < -2$$



$$g(n) = \sum_{m=-4}^{3+n} 1.1 = 3+n+4+1 = 8+n.$$

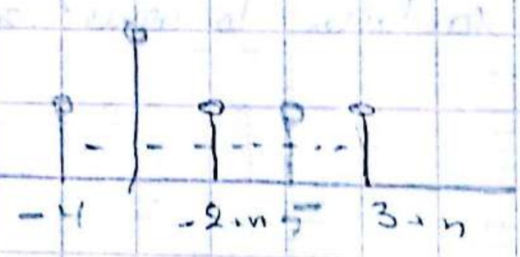
3ème cas

$$\begin{cases} -2+n > -4 \\ 3+n \leq 5 \end{cases} \quad -2 < n \leq 2$$

$$g(n) = \sum_{-2+n}^{3+n} 1.1 = \sum 3+n-(-2+n)+1 = 6$$

4ème cas

$$\begin{cases} -2+n < 5 \\ 3+n > 5 \end{cases} \quad 2 < n < 7$$

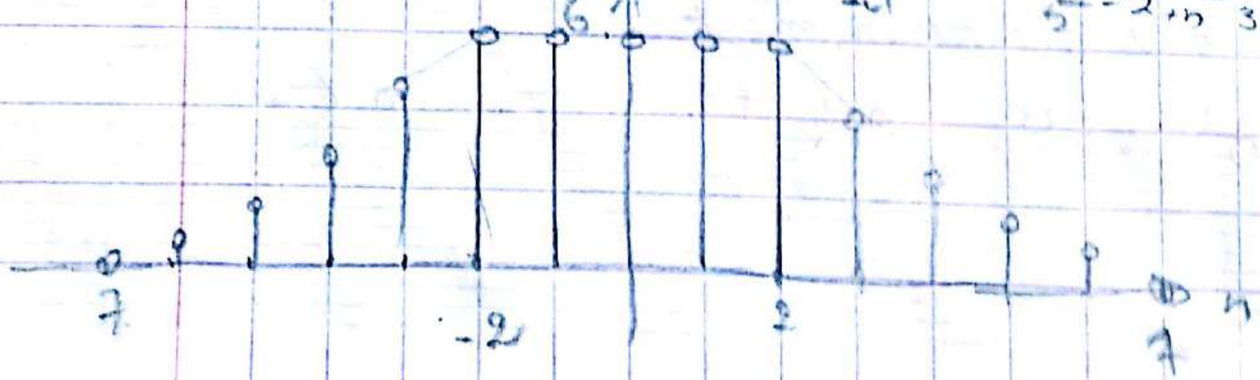


$$g(n) = \sum_{-2+n}^{5} 1.1 = 5-(-2+n)+1 = 8+n$$

5ème cas

$-2+n > 5 \quad n > 7$

$g(n) = 0$ (pas chevauchement



DFT de $s(n) = \frac{n}{10} - 1 \quad n = 0, 1, \ldots 20$

$$X(f) = \sum_{n=0}^{20} \left(\frac{n}{10} - 1\right) e^{-j2\pi f n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{20} \frac{n}{10} e^{-j2\pi f n}}_{I_1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{20} e^{-j2\pi f n}}_{I_2}$$

I_1 voir les exc passé

$$I_2 = \frac{1}{10} \sum n\, e^{-j2\pi f n}$$

$$e^{-j2\pi f n} = e^{\alpha n} \quad | \alpha = -j2\pi f$$

$$\sum n\, e^{\alpha n} = \sum \frac{d}{d\alpha} e^{\alpha n} = \frac{d}{d\alpha} \sum e^{\alpha n}$$

I

$$I_2 = \frac{1}{10} \frac{d}{d\alpha} \left[\sum_{n=0}^{20} e^{-j2\pi f n} \Big|_{\alpha = -j2\pi f} \right]$$

Série N°04

Déterminer la convolution périodique $z(n)$ des signaux périodiques $x(n)$ *et* $y(n)$ de m
$N = 21$ avec :

$$y_N(n) = \begin{cases} n & -5 \le n \le 5 \\ 0 & Ailleurs \end{cases} \qquad x_N(n) = \begin{cases} 1 & -5 \le n \le 5 \\ 0 & Ailleurs \end{cases}$$

$y_N(n)$ et $x_N(n)$ représentent respectivement $y(n)$ et $x(n)$ sur une seule période.

$$X_{1k} = \frac{1}{N} \sum_{n=[N]} x(n)\, e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$Y_{1k} = \frac{1}{N} \sum_{n=[N]} y(n)\, e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$z(n) = \sum_{k=[N]} Z_k\, e^{j2\pi \frac{k}{N} n}, \quad Z_k = N X_{1k} Y_{1k}$$

Calculer la convolution discrète circulaire $z(k)$ des signaux discrets suivants :

1. $x(n) = 1 \qquad n = 0,1 \ldots, N-1$

et $\quad y(n) = 1 \qquad n = 0,1 \ldots, N-1$

2. $x(n) = 1 \qquad n = 0,1 \ldots, N-1$

et $\quad y(n) = 0.8^n \qquad n = 0,1 \ldots, N-1$

3. $x(n) = \sin \pi \dfrac{1}{10} n \qquad n = 0,1 \ldots, N-1$

et $\quad y(n) = \sin \pi \dfrac{1}{10} n \qquad n = 0,1 \ldots, N-1$

1/ $Z(n) = X(n) \circledast Y(n)$

$$\begin{tikzcd}
x(n) \arrow[r] & \boxed{DFT} \arrow[r] & X(k) \arrow[dr] & & \\
y(n) \arrow[r] & \boxed{DFT} \arrow[r] & Y(k) \arrow[r] & \otimes \arrow[r] & \boxed{DFT^{-1}} \arrow[r] & Z(n)
\end{tikzcd}$$

$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{K}{N} n}$ Pr $K = 0$ $X(K) = N$.

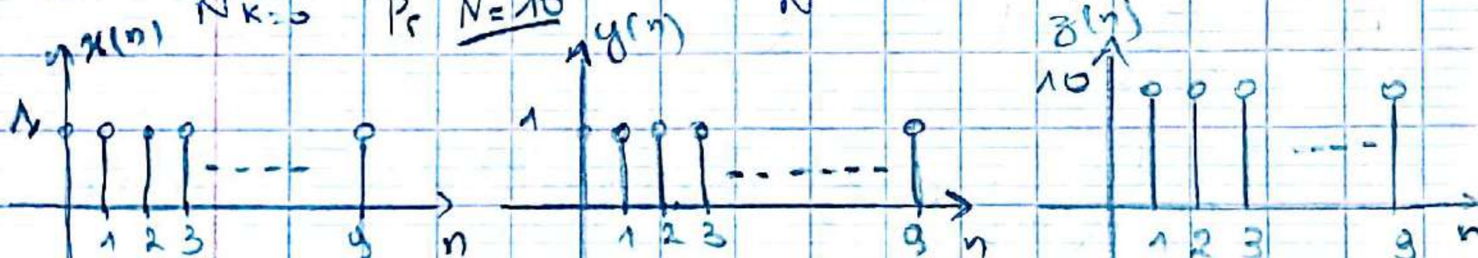
* Pr $K \neq 0$ $X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j2\pi \frac{K}{N}}\right)^n = \dfrac{1 - e^{-j2\pi \cancel{\frac{K}{N}} N}}{1 - e^{-j2\pi \frac{K}{N}}} = 0$

$$X(K) = \begin{cases} N & \text{si } K = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} = Y(K)$$

$$Z(K) = \begin{cases} N^2 & K = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} N^2 e^{j2\pi \frac{k}{N} n} = \frac{1}{N} N^2 = N$ pr $n = 0, 1 \ldots N-1$

Pr $\underline{N = 10}$



Ex 1

$x(n) = 1 \quad n \in [0, +\infty[$

$R_- = \lim_{n \to +\infty} |x(n)|^{1/n} = \lim |(1)|^{1/n} = 1$

$R_+ = \dfrac{1}{\lim_{n \to +\infty} |x(-n)|^{1/n}} = +\infty \qquad 1 < |Z| < +\infty$

$x(n) = a^n \quad n \in [0, +\infty[$

$R_- = \lim_{n \to +\infty} |a^n|^{1/n} = a$

$R_+ = \dfrac{1}{\lim_{n \to +\infty} |a^{-n}|^{1/n}} = a$ est rejeté $= +\infty \qquad a < |Z| < +\infty$

$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ b^n & n < 0 \end{cases} \qquad |a| < |b|$

$R_- = \lim_{n \to +\infty} |a^n|^{1/n} = |a| \qquad R_+ = \dfrac{1}{\lim_{n \to +\infty} |-b^{-n}|^{1/n}} = |b|$

$|a| < |Z| < |b|$

Ex 2

$$x(n) = \begin{cases} n+1 & 0 \leq n \leq 2 \\ 5-n & 2 < n \leq 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

P_o la durée finie et n_1 et n_2 sont $+$, $X(Z)$ ne converge pas $(Z=0)$

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{2} (n+1) Z^{-n} + \sum_{n=3}^{4} (5-n) Z^{-n}$$

$$= (Z^0 + 2Z^{-1} + 3Z^{-2}) + (2Z^{-3} + Z^{-4}) = 1 + 2Z^{-1} + 3Z^{-2} + 2Z^{-3} + Z^{-4}$$

$$x(n) = \begin{cases} \frac{-1}{2^n} & n > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$X(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2^n} \frac{1}{Z^n}\right) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2Z}\right)^n + 1$$

$$R_- = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{-1}{2^n}\right|^{1/n} = 1/2 \,,\quad R_+ = \frac{1}{\lim \left|\frac{-1}{2^{-n}}\right|^{1/n}} = +\infty$$

$$\frac{1}{2} < |Z| < +\infty$$

$|Z| > 1/2$ Suite géométrique :

$$X(Z) = -\left[\frac{1 - (1/2Z)^{+\infty}}{1 - 1/2Z}\right] + 1 = -\frac{1}{1 - 1/2Z} + 1 = -\frac{2Z}{2Z-1} + 1$$

$$= -\frac{2Z + 2Z - 1}{2Z-1} = = -\frac{4Z-1}{2Z-1}$$

$x(n) =$

$$R_- = \lim_{n\to\infty} \left|-\frac{1}{2^n}\right|^{1/n} = \frac{1}{2} \quad , R_+ = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |2^{-n}|^{1/n}} = 2$$

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{0} 2^n z^{-n} + \sum_{1}^{+\infty} -\frac{1}{2^n} z^{-n}$$

$$= \sum_{-\infty}^{0} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2z}\right)^n$$

posons $m = -n$ $\quad n = -\infty \Rightarrow m = +\infty$

$\quad n = 0 \Rightarrow m = 0$

$$X(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^{-m} + \sum_{1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2z}\right)^n$$

$$= \frac{1 - (2/z)^{\infty \to 0}}{1 - 2/z} + \left(-\frac{1}{2z}\right) \frac{1 - (-1/2z)^{+\infty \to 0}}{1 + \frac{1}{2z}}$$

$$= \frac{z}{z-2} + \frac{2z}{2z+1} = \frac{z(2z-1) + 2z(z-2)}{(z-2)(2z+1)}$$

$$= \frac{2z^2 - z + 2z^2 - 4z}{(z-2)(2z+1)} = \frac{4z^2 - 5z}{(z-2)(2z+1)}$$

Ex 3

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

$$= \frac{1}{j2\pi} \oint \frac{z}{z-1} z^{n-1}\, dz = \frac{1}{j2\pi} \oint \frac{z^n}{z-1}\, dz$$

- Pr $n \geq 0$ $X(Z) Z^{n-1}$ admet 1 seul pôle $P_0 = 1$ pôle simple

$Res_0^a = \lim_{z \to a} \left((z-a) X(z) z^{n-1} \right)$

* $n \geq 0$

$Res_1^1 = \lim_{Z \to 1} (Z-1) \frac{Z^n}{(Z-1)} = 1$

$x(n) = \Sigma Res = 1 \Rightarrow x(n) = 1$ pr $n \leq 0$

* $n < 0$

- $n = -1$ $X(Z) Z^{n-1} = \frac{Z^n}{Z-1} = \frac{1}{Z(Z-1)}$ admet 2 pôle $P_0 = 1$, $P_0 = 0$ 2 pôle simple

$Res_0^2 = \lim_{Z \to 0} Z \frac{1}{Z(Z-1)} = \frac{1}{Z-1} = -1$

$Res_1^1 = \lim_{Z \to 1} (Z-1) \frac{1}{Z(Z-1)} = 1.$

$x(n) = \Sigma Res = 1 - 1 = 0$

- $n \neq -1$ admet 2 pôle - 1 pôle simple $P_0 = 1$

$Res_1^1 = \lim_{Z \to 1} (Z-1) \frac{Z^n}{Z-1} = 1$ 1 " multiple $P_0 = 0$

$Res_1^n = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{Z \to 0} \frac{d^{n-1}}{dZ^{n-1}} \left[\frac{Z^n}{Z-1} Z^{-n} \right] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{Z \to 0} (-1)^n \frac{(n-1)!}{(Z-1)^{n-1}}$

$= -1$

$x(n) = 1 - 1 = 0.$

$x(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Ex 1

$1 - \sqrt{2} z^{-1} + z^{-2} \Rightarrow z^2(1 - \sqrt{2} z^{-1} + z^{-2}) = z^2 - \sqrt{2} z + 1 = 0$

$z_1 = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2} i^2}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

$z_2 = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{2} i^2}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$

$$\begin{array}{l|l}
z^{-1} & 1 - \sqrt{2} z^{-1} + z^{-2} \\
\hline
z^{-1} - \sqrt{2} z^{-2} + z^{-3} & z^{-1} + \sqrt{2} z^{-2} + z^{-3} - z^{-5} - \sqrt{2} z^{-6} - z^{-7} \ldots \\
-\sqrt{2} z^{-2} + z^{-3} & \\
\underline{\sqrt{2} z^{-2} - 2 z^{-3} + \sqrt{2} z^{-4}} & \\
0 + z^{-3} - \sqrt{2} z^{-4} & \\
\underline{z^{-3} - \sqrt{2} z^{-4} + z^{-5}} & \\
0 + 0 - z^{-5} & \\
-z^{-5} + \sqrt{2} z^{-6} - z^{-7} & \\
\underline{0 - \sqrt{2} z^{-6} + z^{-7}} & \\
-\sqrt{2} z^{-6} - z^{-7} &
\end{array}$$

Pes 1ᵉʳ éch de $x(n)$ $[1 \ \sqrt{2} \ 1 \ -1 \ -\sqrt{2} \ -1 \ \ldots]$

~~Ex 2~~

$$X(z) = \frac{z^3 - z^2 - z + 2}{z^2 - 3z + 2} = z + 1 + \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$$

$$= z + 1 + \overbrace{\frac{\alpha_1}{z-1} + \frac{\alpha_2}{z-2}}^{X_1(z)}$$

$$\alpha_1 = (z-1)\, X_1(z)\Big|_{z=1} = \cancel{(z-1)} \frac{z^2}{\cancel{(z-1)}(z-2)}\Big|_{z=1} = -1$$

$$\alpha_2 = (z-2)\, X_1(z)\Big|_{z=2} = \cancel{(z-2)} \frac{z^2}{(z-1)\cancel{(z-2)}}\Big|_{z=2} = 4$$

$$X(z) = z + 1 + z^2\left(\frac{1}{z^2 - 3z + 2}\right) = z + 1 + z^2\left(\frac{\alpha_1}{z-2} + \frac{\alpha_2}{z-2}\right)$$

$$\alpha_1 = (z-1)\frac{1}{(z-1)(z-2)}\Big|_{z=1} = -1$$

$$\Rightarrow X(z) = z + 1 + z^2\left(-\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}\right)$$

$$\alpha_2 = (z-2)\frac{1}{(z-1)(z-2)}\Big|_{z=2} = 1.$$

$$X_1(z) = z\left(\frac{-z}{z-1} + \frac{z}{z-2}\right)$$

$$= -z\left(\sum_0^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \sum_0^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n\right)$$

$$X(z) = z + 1 - z\left(\sum_0^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \sum_0^{+\infty}\left(2/z\right)^n\right)$$

$$= z + 1 + z\sum_0^{+\infty}(2^n - 1)\, z^{-n}$$

$$= z + 1 + \sum_0^{+\infty}(2^n - 1)\, z^{-n+1}$$

$$x(n) = \begin{cases} 0 & n < -1 \\ 1 & n = -1 \\ 2 & n = 0 \\ 2^{n+1} - 1 & n > 0 \end{cases}$$

$$\int 6 \quad E_1$$

1) LTI:

si linéaire est $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$

$\frac{1}{3}[a_1 x_1(n+\Pi) + a_2 x_2(n+\Pi) + a_1 x_1(n+\Pi-1) + a_2 x_2(n+\Pi-1)$
$+ a_1 x_1(n+\Pi-2) + a_2 x_2(n+\Pi-2)]$

$= \frac{1}{3}[a_1 x_1(n+\Pi) + a_1 x_1(n+\Pi-1) + a_1 x_1(n+\Pi-2)]$
$+ \frac{1}{3}[a_2 x_2(n+\Pi) + a_2 x_2(n+\Pi-1) + a_2 x_2(n+\Pi-2)]$

$= a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$ => le SLI est linéaire.

Université de Bordj Bou Arréridj
Année universitaire 2016/2017
Département d'Electronique
TD : 06
Unité : TNS

Dr. Khaled ROUABAH
M1-ST

Exercice N° : 01

On considère le filtre numérique régi par l'équation aux différences suivante :

$y(n) = \frac{1}{3}\left[x(n+M) + x(n+M-1) + x(n+M-2)\right]$, avec $M \in N$.

- Montrer que ce filtre est linéaire et invariant dans le temps.
- Calculer la transformée en z de la réponse impulsionnelle
- Quelle est la valeur de M pour laquelle le filtre est réalisable.
- Ce filtre est-il stable ?
- Déduire sa réponse impulsionnelle.
- Calculer la fonction de transfert pour $M=0$ et $M=1$ en déduire la réponse en fréquence.
- Quel est dans ce cas le type de ce filtre ?

Exercice N° : 02

Soit le filtre, défini par l'équation aux différences suivante :

$y(n) - ay(n-1) = x(n) - 2ax(n-1) + a^2 x(n-2)$.

Avec : $y(n) = 0, \quad n < 0$. Déterminer :

- La transformée en z de ce filtre.
- La nature de ce filtre (Causalité, *FIR, IIR*).
- La réponse en fréquence.
- La réponse impulsionnelle.

Exercice N° : 03

Soit le filtre, défini par l'équation aux différences (linéaire à coefficients constants)

$ay(n) - by(n-1) = cx(n) - dx(n-1) + ex(n-2)$.

Avec : $y(n) = 0, \quad n < 0$. Déterminer :

- La transformée en z de ce filtre.
- La nature de ce filtre (*FIR, IIR*)
- La réponse impulsionnelle.
- La nature de ce filtre pour $b=0$.

a Invariant $n = n - n_0$

$\frac{1}{3}[x(n+M-n_0) + x(n+M-1-n_0) + x(n+M-2-n_0)]$

$= y(n-n_0) \Rightarrow$ le fct invariant dolat.

2- RT en Z $H(z)$

$$Y(z) = \frac{1}{3}[X(z)\, z^{M} + X(z)\, z^{M-1} + X(z)\, z^{M-2}]$$

$$= \frac{1}{3} X(z)[z^{M} + z^{M-1} + z^{M-2}]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{3}(z^{M} + z^{M-1} + z^{M-2}) = \frac{1}{3}\sum_{n=-M}^{-M+2} z^{-n}$$

3. val M pr le fct réalisable

le fct est réalisable si il est causal si la Σ est déf à partir de "0" $\Rightarrow M \leq 0$

4- stable??

$h(n)$ est absolument sommable $\Rightarrow$ fct stable.

5- $h(n)$

$$H(z) = \sum_{-M}^{-M+2} \frac{1}{3} z^{-n} \Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} h(n)\, z^{-n}$$

$$h(n) = \begin{cases} 1/3 & n = -M \\ 1/3 & n = -M+1 \\ 1/3 & n = -M+2 \end{cases} \qquad h(n) = \left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right]$$

$$h(n) = \frac{1}{3}\delta(n-M) + \frac{1}{3}\delta(n-M+1) + \frac{1}{3}\delta(n-M+2)$$

Nombre de fil c' $N = 3$.

6_ Fct de transfert. p.c. $n=0$ $\sum_{0}^{2}$

$$H(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}$$

$$H(f) = H(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-j2\pi f} + \frac{1}{3} e^{-j4\pi f}.$$

$$= \frac{1}{3} e^{-j2\pi f} + \frac{1}{3} e^{-j2\pi f}\left[e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f}\right]$$

$$= \frac{1}{3} e^{-j2\pi f} + \frac{2}{3} e^{-j2\pi f}\left(\cos 2\pi f\right)$$

$$= \frac{1}{3} e^{-j2\pi f}\left[1 + 2\cos(2\pi f)\right].$$

RA : $|H(f)| = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos 2\pi f$.

RP : $\arg(H(f)) = \cancel{\ldots}(2\pi f)$

. P.c. $n=1$ $\sum_{-1}^{1}$

$$H(z) = \frac{1}{3} z^{-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} z^{+1}$$

$$H(f) = H(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f}} = \frac{1}{3} e^{-j2\pi f} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{j2\pi f}.$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(e^{-j2\pi f} + e^{j2\pi f}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos(2\pi f)$$

$$|H(f)| = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos 2\pi f.$$

$$\arg |H(f)| = 0$$

Pas le dénominateur c'le fil FIR

Ex 2

1_ $H(z)$

$$Y(z) - aY(z)z^{-1} = X(z) - 2aX(z)z^{-1} + a^2X(z)z^{-2}$$

$$Y(z)(1 - az^{-1}) = X(z)(1 - 2az^{-1} + a^2z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{1 - 2az^{-1} + a^2z^{-2}}{1 - az^{-1}} = \frac{(1 - az^{-1})^2}{(1 - az^{-1})} = (1 - az^{-1})$$

2_ le fil c' fil FIR et causal.

3_ $h(n)$

$$H(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} = 1 - az^{-1} = 1z^0 - az^{-1}$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -a & n = 1 \end{cases}$$

$h(n)$ est déf pr $n \geq 0 \Rightarrow$ fil est causal.

- RF : $H(f) = H(z)\big|_{z=e^{j2\pi f}}$

$= 1 - a\, e^{-j2\pi f}$

Ex 3.

-

$H(z)$:

$aY(z) - bY(z)z^{-1} = cX(z) - dX(z)z^{-1} + eX(z)z^{-2}$

$Y(z)(a - bz^{-1}) = X(z)(c - dz^{-1} + ez^{-2})$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c - dz^{-1} + ez^{-2}}{a - bz^{-1}}$$

- le filt d IIR p's .

$h(n)$: $H(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n}$

le fil ce nature ? (IIR et FIR) est liée aux coeff

c d e b a

h(n) : Num [c -d e]   Den [a -b]

* Po $n=0$

$$a\,y(0) - b\,\cancelto{0}{y(-1)} = c\,\delta(0) - d\,\cancelto{0}{\delta(-1)} + e\,\cancelto{0}{\delta(-2)}$$

$$a\,y(0) = c\,\delta(0)$$

$$a\,h(0) = c\,\delta(0) \Rightarrow \boxed{h(0) = \frac{c}{a}\,\delta(0)}$$

* Po $n=1$

$$a\,y(1) - b\,y(0) = c\,\delta(1) - d\,\delta(0) + e\,\cancelto{0}{\delta(-1)}$$

$$a\,h(1) = c\,\delta(1) - d\,\delta(0) + b\,h(0)$$

$$= c\,\delta(1) - d\,\delta(0) + \frac{bc}{a}\,\delta(0)$$

$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$$h(1) = \frac{c}{a}\,\delta(1) - \frac{d}{a}\,\delta(0) + \frac{bc}{a^2}\,\delta(0) = \frac{c}{a}\,\delta(1) + \delta(0)\left[\frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a}\right]$$

* Po $n=2$

$$a\,y(2) - b\,y(1) = c\,\delta(2) - d\,\delta(1) + e\,\delta(0)$$

$$h(2) = \frac{c}{a}\,\delta(2) - \frac{d}{a}\,\delta(1) + \frac{e}{a}\,\delta(0) + \frac{b}{a}\,h(1)$$

$$= \frac{c}{a}\,\delta(2) - \frac{d}{a}\,\delta(1) + \frac{e}{a}\,\delta(0) + \frac{b}{a}\left[\frac{c}{a}\,\delta(1) + \delta(0)\left(\frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{c}{a}\,\delta(2) + \delta(1)\left[\frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a}\right] + \boxed{\delta(0)\left[\frac{b^2c}{a^3} - \frac{bd}{a^2} + \frac{e}{a}\right]}$$

* Po $n=3$

$$a\,y(3) - b\,y(2) = c\,\delta(3) - d\,\delta(2) + e\,\delta(1)$$

$$h(3) = \frac{c}{a}\,\delta(3) - \frac{d}{a}\,\delta(2) + \frac{e}{a}\,\delta(1) + \frac{b}{a}\,h(2)$$

$\tau : (-1)^n$

$= \frac{c}{a}\delta(3) - \frac{d}{a}\delta(2) + \frac{e}{a}\delta(1) + \frac{b}{a}\left[\frac{c}{a}\delta(2) + \delta(1)\left(\frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a}\right)\right.$

$\left. + \delta(0)\left(\frac{bc}{a^3} - \frac{bd}{a^2} + \frac{e}{a}\right)\right]$

$= \frac{c}{a}\delta(3) + \delta(2)\left(\frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a}\right) + \delta(1)\left(\frac{b^2c}{a^3} - \frac{bd}{a^2} + \frac{e}{a}\right)$

$+ \boxed{\delta(0)\left(\frac{b^3c}{a^4} - \frac{b^2d}{a^3} + \frac{eb}{a^2}\right)}$

$h(0) = \frac{c}{a}\delta(0)$

$h(1) = \frac{1}{a}\left(\frac{bc}{a} - d\right)$

$h(2) = \frac{e}{a} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{bd}{a^2}) = \frac{1}{a}\left(e + \frac{b}{a}\left(\frac{bc}{a} - d\right)\right) = \frac{1}{a}\left(e + \frac{b}{a}h(1)\right)$

$h(3) : \frac{b^3c}{a^4} - \frac{b^2d}{a^3} + \frac{eb}{a^2} = \frac{b}{a}\left[\frac{1}{a}\left(e + \frac{b}{a}\left(\frac{bc}{a} - d\right)\right)\right].$

$h(3) = \frac{b}{a}h(2) \qquad h(4) = \frac{b^2}{a}h(2) \ldots$

$n-2$

$h(n) = \begin{cases} c/a & n = 0 \\ \frac{1}{a}\left(\frac{bc}{a} - d\right) & n = 1 \\ \frac{b^{n-2}}{a^{n-1}}\left(e + \frac{b}{a}\left(\frac{bc}{a} - d\right)\right) & n \geq 2 \end{cases}$