Première année Master | Année Universitaire 2020/2021 (S1)
Mathématiques appliquées | Matière: **Probabilités**

Correction: Série 02

Exercice 1.

1. La suite $(X_n)_{n>1}$ converge en probabilité vers X si

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to+\infty} P\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) = 0.$$

donc on a

$$\forall \epsilon > 0 : P\left(|X_n + 1| \geq \epsilon\right) = P\left(X_n = n^2 - 1\right) = \frac{1}{n^2},$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Alors, la suite $(X_n)_{n>1}$ converge en probabilité vers -1.

2. On a $\forall \epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n + 1| \geq \epsilon\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_n = n^2 - 1\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty. \end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme de Borel–Cantelli, la suite $(X_n)_{n>1}$ converge presque sûrement vers -1.

3. On a

$$\begin{aligned} E\left(|X_n + 1|^2\right) &= E\left[(X_n + 1)^2\right] \\ &= (-1+1)^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \left(n^2 - 1 + 1\right)^2\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= n^4. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(|X_n + 1|^2\right) = +\infty.$$

C'est-à-dire que la suite $(X_n)_{n>1}$ ne converge pas en moyenne quadratique vers -1.

Exercice 2.

1. Soit $\epsilon > 0$, on a

$$P\left(|X_n| \geq \epsilon\right) = \int_{\epsilon}^{+\infty} \alpha_n e^{-\alpha_n x} dx = e^{-\alpha_n \epsilon}.$$

donc $\lim_{n\to+\infty} P\left(|X_n| \geq \epsilon\right) = 0$ si $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$. C'est-à-dire que la suite $(X_n)_{n>1}$ converge en probabilité vers 0 si $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

2. On a

$$E\left(|X_n|^p\right) = E\left(X_n^p\right) = \alpha_n \int_0^{+\infty} x^p e^{-\alpha_n x} dx.$$

On intègre par parties et par récurrence, on obtient

$$E\left(X_n^p\right) = \frac{p!}{\alpha_n},$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$. C'est-à-dire que la suite $(X_n)_{n>1}$ converge converge dans $\boldsymbol{L}^p$ vers 0 si $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$..

Exercice 3.

1. La densité de la variable X_n est $f_{X_n}(x) = [F_{X_n}(x)]'$, où

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(X_n \le x) = P(\max(U_k) \le x) \\ &= P(U_1 \le x,\ U_2 \le x, \ldots, U_n \le x). \end{aligned}$$

Puisque les variables aléatoires (U_k) sont indépendantes, on en déduit que

$$F_{X_n}(x) = \prod_{k=1}^{n} P(U_k \le x) = [P(U \le x)]^n = \left(x^2\right)^n = x^{2n}.$$

Donc

$$f_{X_n}(x) = F'_{X_n}(x) = 2nx^{2n-1}.$$

2. On a

$$E(X_n) = \int_0^1 x f_{X_n}(x)\,dx = \int_0^1 2nx^{2n}dx = \frac{2n}{2n+1},$$

et

$$E\left(X_n^2\right) = \int_0^1 2nx^{2n+1}dx = \frac{2n}{2n+2} = \frac{n}{n+1}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} Var(X_n) &= E\left(X_n^2\right) - [E(X_n)]^2 \\ &= \frac{n}{n+1} - \frac{4n^2}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{n}{(2n+1)^2(n+1)}. \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} Var(X_n) = 0.$$

3. On a

$$E\left(|X_n|^2\right) = E\left(X_n^2\right) = \frac{n}{n+1}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(|X_n|^2\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

C'est-à-dire que la suite $(X_n)_{n>1}$ ne converge pas en moyenne quadratique vers 0.

4. Méthode 1. On a $\forall \epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} P(|X_n - 1| \geq \epsilon) &= P(-(X_n - 1) \geq \epsilon), \text{ car } X_n \in [0,1] \\ &= P(X_n - 1 < -\epsilon) \\ &= P(X_n < 1 - \epsilon) = (1-\epsilon)^{2n}, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Alors, la suite $(X_n)_{n>1}$ converge en probabilité vers 1.

Méthode 2. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\forall \epsilon > 0$:

$$P(|X_n - E(X_n)| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(X_n)}{\epsilon^2} = \frac{E(X_n^2) - [E(X_n)]^2}{\epsilon^2},$$

et puisque $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} E(X_n^2) = 1$, alors la suite $(X_n)_{n>1}$ converge en probabilité vers 1.

5. On a

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= P(Z_n \leq z) = P(n(1-X_n) \leq z) = P\left(-X_n \leq 1 - \frac{z}{n}\right) \\ &= P\left(X_n > 1 - \frac{z}{n}\right) = 1 - P\left(X_n \leq 1 - \frac{z}{n}\right) \\ &= 1 - F_{X_n}\left(1 - \frac{z}{n}\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

où on a

$$\left(1 - \frac{z}{n}\right) \in [0,1] \Longleftrightarrow z \in [0,n].$$

On sait que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{2n} = e^{-2z},$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(z) = 1 - e^{-2z},\ z \geq 0.$$

Alors, la suite $(Z_n)_{n>1}$ converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre 2 c-à-d:

$$F_Z(z) = 1 - e^{-2z},\ z \geq 0.$$

<u>Exercice 4.</u>

1. D'après la loi forte des grands nombres, on a

$$X_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(U_k) \to E[\ln(U)],$$

et puisque

$$E\left[\ln\left(U\right)\right]=\int_0^1 \ln\left(u\right) f_U\left(u\right) du=\int_0^1 \ln\left(u\right) du=-1.$$

Donc, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers -1. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers -1 et en loi vers -1 car la converge presque sûrement implique les deux convergences.

2. On a

$$\begin{aligned} Y_n &= \left(\prod_{k=1}^n U_k\right)^{\frac{\alpha}{n}}=\exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^n U_k\right)^{\frac{\alpha}{n}}\right) \\ &= \exp\left(\frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(U_k\right)\right)=e^{\alpha X_n}. \end{aligned}$$

Puisque la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers -1 et la continuité de l'exponentielle, alors

$$Y_n \xrightarrow{p.s} e^{-\alpha}.$$

3. On a

$$\begin{aligned} F_{Z_n}\left(z\right) &= P\left(Z_n\leq z\right)=P\left(n\min_{1\leqslant k\leqslant n}\left(U_k\right)\leq z\right) \\ &= 1-P\left(n\min_{1\leqslant k\leqslant n}\left(U_k\right)>z\right)=1-P\left(\min_{1\leqslant k\leqslant n}\left(U_k\right)>\frac{z}{n}\right) \\ &= 1-\prod_{k=1}^n P\left(U_k>\frac{z}{n}\right)=1-\left[P\left(U>\frac{z}{n}\right)\right]^n \\ &= 1-\left[1-P\left(U\leq\frac{z}{n}\right)\right]^n \\ &= 1-\left(1-\frac{z}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

où on a

$$\left(1-\frac{z}{n}\right)\in\left[0,1\right]\Longleftrightarrow z\in\left[0,n\right].$$

On sait que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)^n=e^{-z},$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}F_{Z_n}\left(z\right)=1-e^{-z},\ z\geq 0.$$

Alors, la suite $(Z_n)_{n>1}$ converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre 1 c-à-d:

$$F_Z\left(z\right)=1-e^{-z},\ z\geq 0.$$