

Correction: TD 1

Exercice 1.

1. La loi de probabilité de X est

x_i	-10	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

2. L'espérance mathématique de X est

$$E(X) = \frac{-10}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{-1}{2},$$

la variance de X est

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{73}{4},$$

car

$$E(X^2) = \frac{100}{6} + \frac{3}{6} + \frac{8}{6} = \frac{111}{6} = \frac{37}{2},$$

donc l'écart-type de X est

$$\sigma_X = \frac{1}{2}\sqrt{73}.$$

Exercice 2.

1. La valeur du réel α , on a

$$\int_0^4 \alpha x dx + \int_4^8 \alpha (8 - x) dx = 1,$$

donc $16\alpha = 1$ c-à-d: $\alpha = 1/16$.

2. La probabilité du nombre de kilos de pain vendus dans une journée qui compris entre 250 et 550 kg. est

$$\frac{1}{16} \int_{5/2}^4 x dx + \frac{1}{16} \int_4^{11/2} (8 - x) dx = \frac{39}{64} = 0.60938.$$

3. Le moment d'ordre n de X est

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \int_0^4 \alpha x^{n+1} dx + \int_4^8 \alpha x^n (8 - x) dx \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{2^{2n+5}}{n+2} + 32 \frac{2^{3n+1} - 4^n}{n+1} - \frac{2^{3n+6}}{n+2} \right) \\ &= \frac{2 \times 4^n - 4 \times 2^n 4^n}{n^2 + 3n + 2}. \end{aligned}$$

Donc

$$E(X) = 4 \text{ et } E(X^2) = \frac{56}{3}.$$

La variance de X est

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{8}{3}.$$

Donc l'écart-type de X est

$$\sigma_X = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Exercice 3.

1. La constante a , on a

$$0.07 + 2a + 0.05 + 0.02 + 0.4 = 1.$$

Donc: $a = 0.23$.

2. La loi marginale de X est

x_i	-1	2
$P(X = x_i)$	0.7	0.3

La loi marginale de Y est

y_i	-2	0	2
$P(Y = y_i)$	0.12	0.25	0.63

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car $P(X = x_i)P(Y = y_i) \neq P(X = x_i, Y = y_i)$.

3. Les espérances mathématiques de X et Y sont

$$E(X) = -0.7 + 0.6 = -0.1,$$

et

$$E(Y) = -0.24 + 2 \times 0.63 = 1.02.$$

Leurs variances sont

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2.57,$$

et

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1.96,$$

car

$$E(X^2) = 0.7 + 4 \times 0.3 = 1.9,$$

et

$$E(Y^2) = 4 \times 0.12 + 4 \times 0.63 = 3.$$

4. La matrice de covariance est

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.57 & 0.16 \\ 0.16 & 1.96 \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= 0.06 + 0.1 \times 1.02 = 0.16. \end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned} E(X | Y = -2) &= \sum_{i=1}^2 x_i P(X = x_i | Y = -2) \\ &= \sum_{i=1}^2 x_i \frac{P(X = x_i, Y = -2)}{P(Y = -2)} = 0.06. \end{aligned}$$

6. La distribution de probabilité de la variable aléatoire: $Z = X + Y$ est

z_i	-3	-1	0	1	2	4
$P(Z = z_i)$	0.07	0.23	0.05	0.4	0.02	0.23

Exercice 4.

1. On a $f_{X,Y}(x,y)$ est positive et

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(2xy + \frac{3}{2}y^2 \right) dx dy = 1.$$

Donc f est une densité de probabilité.

2. La densité marginale de X est

$$f_X(x) = \int_0^1 \left(2xy + \frac{3}{2}y^2 \right) dy = x + \frac{1}{2}.$$

La densité marginale de Y est

$$f_Y(y) = \int_0^1 \left(2xy + \frac{3}{2}y^2 \right) dx = \frac{3}{2}y^2 + y.$$

3. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car $f_X(x) f_Y(y) \neq f_{XY}(x,y)$.

4. On a

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}, 0 < Y < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} \left(2xy + \frac{3}{2}y^2 \right) dx dy = \frac{1}{16},$$

et

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= P(0 < X < Y, 0 < Y < 1) \\ &= \int_0^1 \int_0^y \left(2xy + \frac{3}{2}y^2 \right) dx dy = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

5. On a

$$E(X) = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{7}{12},$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{5}{12},$$

$$E(Y) = \int_0^1 y \left(\frac{3}{2}y^2 + y\right) dy = \frac{17}{24},$$

et

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \left(\frac{3}{2}y^2 + y\right) dy = \frac{11}{20}.$$

Donc

$$\text{Var}(X) = \frac{11}{144} \text{ et } \text{Var}(Y) = \frac{139}{2880}.$$

6. La densité conditionnelle de X sachant que $Y = y$ est

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{2xy + \frac{3}{2}y^2}{\frac{3}{2}y^2 + y} = \frac{4x + 3y}{3y + 2}.$$

La densité conditionnelle de Y sachant que $X = x$ est

$$f_{Y|X}(x, y) = \frac{2xy + \frac{3}{2}y^2}{x + \frac{1}{2}} = \frac{4xy + 3y^2}{2x + 1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} E(Y | X = x) &= \int_0^1 y f_{Y|X}(x, y) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{4xy^2 + 3y^3}{2x + 1}\right) dy \\ &= \frac{16x + 9}{24x + 12}. \end{aligned}$$

7. La densité de $Z = E(Y | X) = \frac{16X+9}{24X+12} = \varphi(X)$ est

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= -[\varphi^{-1}(z)]' f_X(\varphi^{-1}(z)) \\ &= -\left[\frac{12z - 9}{16 - 24z}\right]' f_X\left(\frac{12z - 9}{16 - 24z}\right) \\ &= \frac{3}{64(3z - 2)^3}, \quad z \in \left[\frac{25}{36}, \frac{3}{4}\right]. \end{aligned}$$

Donc,

$$E(Z) = \int_{\frac{25}{36}}^{\frac{3}{4}} \frac{3z}{64(3z - 2)^3} dz = \frac{17}{24}.$$

Exercice 5.

1. On a

$$\int \int f_{XY}(x, y) dx dy = \alpha \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y}} dy \right) dx = 1.$$

Donc $2\alpha = 1$ c-à-d: $\alpha = 1/2$.

2. Lois marginales de X et Y

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} dy = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

et

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} dx = 1.$$

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car $f_X(x) f_Y(y) \neq f_{XY}(x, y)$.

3. La matrice de covariance est

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(X) & cov(X, Y) \\ cov(X, Y) & Var(Y) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2, \\ Var(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2, \end{aligned}$$

et

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{1}{6}, \\ E(X^2) &= \int_0^1 x^2 \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{1}{15}, \\ E(Y) &= \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}, \\ E(Y^2) &= \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

et

$$E(XY) = \frac{1}{2} \int_0^1 x \left(\int_x^1 \frac{y}{\sqrt{y}} dy \right) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{9}.$$

Donc

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{7}{180} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}.$$

4. La densité conditionnelle de X sachant que $Y = y$ est

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}.$$

La densité conditionnelle de Y sachant que $X = x$ est

$$f_{Y|X}(x, y) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x})} = \frac{1 + \sqrt{x}}{2\sqrt{y}(1 - x)}.$$

5. On a

$$\begin{aligned} E(Y | X = x) &= \int_x^1 y f_{Y|X}(x, y) dy \\ &= \int_x^1 y \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{2\sqrt{y}(1 - x)} \right) dy \\ &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Donc

$$E(Y | X) = \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\sqrt{X} + \frac{1}{3}.$$

6. On a

$$\int E(Y | X = x) f_X(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{1}{2},$$

et puisque $E(Y) = \frac{1}{2}$, on obtient $E(E(Y | X)) = E(Y)$.

Exercice 6.

1. La densité du couple $(U, V) = (h(X, Y) = XY, g(X, Y) = X/Y)$ est

$$f_{UV}(u, v) = |J| f_{XY}(h^{-1}(u, v), g^{-1}(u, v)),$$

où

$$h^{-1}(u, v) = \sqrt{uv} \quad \text{et} \quad g^{-1}(u, v) = \sqrt{\frac{u}{v}}.$$

Le Jacobien est

$$\begin{aligned} J &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h^{-1}(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial h^{-1}(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g^{-1}(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g^{-1}(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2v}. \end{aligned}$$

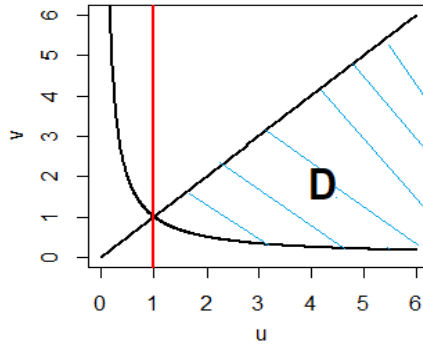
Donc

$$f_{UV}(u, v) = \left| -\frac{1}{2v} \right| f_{XY} \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}} \right) = \frac{1}{2vu^2},$$

où son domaine de définition est

$$D = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 1 \text{ et } \frac{1}{u} \leq v \leq u \right\}.$$

Donc



2. Lois marginales de U et V

$$f_U(u) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{u}}^u \frac{1}{vu^2} dv = \frac{\ln u}{u^2}, \quad u \geq 1.$$

et

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{v}}^{+\infty} \frac{1}{vu^2} du = \frac{1}{2} & \text{si } 0 < v \leq 1 \\ \frac{1}{2} \int_v^{+\infty} \frac{1}{vu^2} du = \frac{1}{2v^2} & \text{si } v \geq 1. \end{cases}$$

3. La densité conditionnelle de V sachant que $U = u$ est

$$\begin{aligned} f_{V|U}(u, v) &= \frac{f_{UV}(u, v)}{f_U(u)} = \frac{\frac{1}{2vu^2}}{\frac{\ln u}{u^2}} \\ &= \frac{1}{2v \ln u}. \end{aligned}$$

4. Les variables U et V ne sont pas indépendantes car $f_U(u) f_V(v) \neq f_{UV}(u, v)$.

5. La densité de $Z = \varphi(U) = \sqrt{U}$ est

$$f_Z(z) = [\varphi^{-1}(z)]' f_U(\varphi^{-1}(z)),$$

où

$$\varphi^{-1}(z) = z^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= [z^2]' f_U(z^2) \\ &= 2z \frac{\ln z^2}{z^4} = \frac{4 \ln z}{z^3}, \quad z \geq 1. \end{aligned}$$