Première année Master | Année Universitaire 2020/2021 (S1)
Mathématiques appliquées | Matière: **Probabilités**

Correction: Série 03

Exercice 01.

1.

1.1. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, on a la fonction caractéristique de X est

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E\left(e^{itX}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} \\
&= e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}.
\end{aligned}$$

1.2. Si X suit une loi exponentielle de paramètre β, la fonction caractéristique de X est:

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E\left(e^{itX}\right) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \beta e^{-\beta x} dx \\
&= \beta \int_0^{+\infty} e^{(it-\beta)x} dx = \frac{\beta}{\beta - it}.
\end{aligned}$$

1.3. Si X suit une loi normale centrée réduite, la fonction caractéristique de X est:

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E\left(e^{itX}\right) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2-2itx\right)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}\left((x-it)^2+t^2\right)} dx \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= e^{-\frac{1}{2}t^2}.
\end{aligned}$$

2. En utilisant la fonction caractéristique, le moment d'ordre p de X est

$$E\left(X^{p}\right)=\frac{\phi_{X}^{(p)}(0)}{i^{p}}.$$

Donc

$$E(X)=\frac{\phi_{X}^{\prime}(0)}{i} \text{ et } E\left(X^{2}\right)=-\phi_{X}^{\prime\prime}(0).$$

1.1. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, on a $\phi_{X}(t)=e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$,

$$\phi_{X}^{\prime}(t)=i\lambda e^{it}e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} \Rightarrow \phi_{X}^{\prime}(0)=i\lambda,$$

et

$$\begin{aligned}
\phi_{X}^{\prime\prime}(t) &= i^{2}\lambda e^{it}e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}+i\lambda e^{it}i\lambda e^{it}e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} \\
&= -\lambda e^{it}e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}-\lambda^{2}e^{2it}e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} \Rightarrow \phi_{X}^{\prime\prime}(0)=-\lambda-\lambda^{2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$E(X)=\lambda \text{ et } E\left(X^{2}\right)=\lambda+\lambda^{2},$$

d'où

$$Var(X)=\lambda.$$

1.2. Si X suit une loi exponentielle de paramètre β, on a $\phi_{X}(t)=\frac{\beta}{\beta-it}$,

$$\phi_{X}^{\prime}(t)=\frac{i\beta}{(\beta-it)^{2}} \Rightarrow \phi_{X}^{\prime}(0)=\frac{i}{\beta},$$

et

$$\phi_{X}^{\prime\prime}(t)=\frac{-2\beta}{(\beta-it)^{3}} \Rightarrow \phi_{X}^{\prime\prime}(0)=\frac{-2}{\beta^{2}}.$$

Donc

$$E(X)=\frac{1}{\beta} \text{ et } E\left(X^{2}\right)=\frac{2}{\beta^{2}},$$

d'où

$$Var(X)=\frac{1}{\beta^{2}}.$$

1.3. Si X suit une loi normale centrée réduite, on a $\phi_{X}(t)=e^{-\frac{1}{2}t^{2}}$,

$$\phi_{X}^{\prime}(t)=-te^{-\frac{1}{2}t^{2}} \Rightarrow \phi_{X}^{\prime}(0)=0,$$

et

$$\phi_{X}^{\prime\prime}(t)=t^{2}e^{-\frac{1}{2}t^{2}}-e^{-\frac{1}{2}t^{2}} \Rightarrow \phi_{X}^{\prime\prime}(0)=-1.$$

Donc

$$E(X)=0 \text{ et } E\left(X^{2}\right)=1,$$

d'où

$$Var(X)=1.$$

Exercice 02.

1. On a la fonction caractéristique de la loi de Poisson est $\phi_X(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$ et si X_1 et X_2 deux variables aléatoires de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2 respectivement, alors on a

$$\begin{aligned}
\phi_{X_1+X_2}(t) &= E\left(e^{it(X_1+X_2)}\right) \\
&= E\left(e^{itX_1+itX_2}\right) \\
&= E\left(e^{itX_1}\right)E\left(e^{itX_2}\right) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\
&= \phi_{X_1}(t)\,\phi_{X_2}(t) \\
&= e^{\lambda_1\left(e^{it}-1\right)}e^{\lambda_2\left(e^{it}-1\right)} \\
&= e^{(\lambda_1+\lambda_2)\left(e^{it}-1\right)},
\end{aligned}$$

qui est une fonction caractéristique de la loi de Poisson de paramètre $(\lambda_1 + \lambda_2)$ c-à-d: la somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes est une variable aléatoire de Poisson.

2. On a la fonction caractéristique de loi normale centrée réduite est $\phi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ et si X_1 et X_2 deux variables aléatoires Gaussiennes centrées réduites indépendantes, alors

$$\begin{aligned}
\phi_{X_1+X_2}(t) &= E\left(e^{it(X_1+X_2)}\right) \\
&= E\left(e^{itX_1+itX_2}\right) \\
&= E\left(e^{itX_1}\right)E\left(e^{itX_2}\right) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\
&= \phi_{X_1}(t)\,\phi_{X_2}(t) \\
&= e^{-\frac{1}{2}t^2}e^{-\frac{1}{2}t^2} \\
&= e^{-t^2},
\end{aligned}$$

qui est une fonction caractéristique de loi normale centrée et avec la variance est $(1 + 1 = 2)$ c-à-d: la somme de deux variables aléatoires Gaussiennes indépendantes est une variable aléatoire Gaussienne.

Exercice 03.

1.

1.1. Si X suit une loi de Poisson de paramètre α, on a la fonction génératrice des moments de X est

$$\begin{aligned} G_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \\ &= e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\alpha^k}{k!} \\ &= e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha e^t\right)^k}{k!} \\ &= e^{-\alpha} e^{\alpha e^{it}} \\ &= e^{\alpha\left(e^t-1\right)}. \end{aligned}$$

1.2. Si X suit une loi exponentielle de paramètre θ, la fonction caractéristique de X est:

$$\begin{aligned} G_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \theta e^{-\theta x} dx \\ &= \theta \int_0^{+\infty} e^{(t-\theta)x} dx = \frac{\theta}{\theta - t}. \end{aligned}$$

2. En utilisant la fonction génératrice des moments, le moment d'ordre p de X est

$$E\left(X^p\right) = G_X^{(p)}(0).$$

Donc

$$E(X) = G'_X(0) \text{ et } E\left(X^2\right) = G''_X(0).$$

1.1. Si X suit une loi de Poisson de paramètre α, on a $G_X(t) = e^{\alpha\left(e^t-1\right)}$,

$$G'_X(t) = \alpha e^t e^{\alpha\left(e^t-1\right)} \Rightarrow G'_X(0) = \alpha,$$

et

$$\begin{aligned} G''_X(t) &= \alpha e^t e^{\alpha\left(e^t-1\right)} + \alpha e^t \alpha e^t e^{\alpha\left(e^t-1\right)} \\ &= \alpha e^t e^{\alpha\left(e^t-1\right)} + \alpha^2 e^{2t} e^{\alpha\left(e^t-1\right)} \Rightarrow G''_X(0) = \alpha + \alpha^2. \end{aligned}$$

Donc

$$E(X) = \alpha \text{ et } E\left(X^2\right) = \alpha + \alpha^2,$$

d'où

$$Var(X) = \alpha.$$

1.2. Si X suit une loi exponentielle de paramètre θ, on a $G_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}$,

$$G'_X(t) = \frac{\theta}{(\theta - t)^2} \Rightarrow G'_X(0) = \frac{1}{\theta},$$

et

$$G''_X(t) = \frac{2\theta}{(\theta - t)^3} \Rightarrow G''_X(0) = \frac{2}{\theta^2}.$$

Donc

$$E(X) = \frac{1}{\theta} \text{ et } E\left(X^2\right) = \frac{2}{\theta^2},$$

d'où

$$Var(X) = \frac{1}{\theta^2}.$$

2. On a la fonction génératrice des moments de loi normale centrée réduite est $G_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$ et si X_1 et X_2 deux variables aléatoires Gaussiennes centrées réduites indépendantes, alors

$$\begin{aligned}
G_{X_1+X_2}(t) &= E\left(e^{t(X_1+X_2)}\right) \\
&= E\left(e^{tX_1+tX_2}\right) \\
&= E\left(e^{tX_1}\right) E\left(e^{tX_2}\right) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\
&= G_{X_1}(t)\, G_{X_2}(t) \\
&= e^{\frac{1}{2}t^2} e^{\frac{1}{2}t^2} \\
&= e^{t^2},
\end{aligned}$$

qui est unefonction génératrice des moments de loi normale centrée avec la variance est $(1 + 1 = 2)$ c-à-d: la somme de deux variables aléatoires Gaussiennes indépendantes est une variable aléatoire Gaussienne.

Exercice 04.

1. La valeur de c, on sait que $\phi(0) = 1$.

Donc

$$\phi(0) = \frac{c}{4}e = 1,$$

on obtient

$$c = 4e^{-1}.$$

2. On a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|\, dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-2|t|}\right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} dt \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} e^{-2t} dt = 1 < +\infty.\end{aligned}$$

Donc la densité de probabilité de X est

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|}e^{-itx} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{2t}e^{-itx} dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}e^{-itx} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{(2-ix)t} dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-(2+ix)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2-ix} + \frac{1}{2+ix}\right] \\ &= \frac{2}{\pi(4+x^2)}.\end{aligned}$$