Université Larbi Ben M'Hidi, Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la vie
Département de Mathématiques et Informatique

Première année Master — Année Universitaire 2021/2022
Mathématiques appliquées — Matière: **Probabilités**

TD 01: Vecteurs aléatoires

Exercice 1. Un joueur lance un dé bien équilibré. Si le joueur obtient un nombre impaire, il gagne 1 dinar, s'il obtient 2 ou 4, il gagne 2 dinars et s'il obtient 6, il perd 10 dinars. On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 2. Soit X la variable aléatoire égale à la quantité de pain (en centaines de kilos) qu'un boulanger vend en une journée. La densité de X est:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ \alpha(8-x) & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur du réel α.

2. Calculer la probabilité que le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est compris entre 250 et 550 kg.

Exercice 3. Soit (X, Y) un couple aléatoire dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant:

$X \setminus Y$	-2	0	2
-1	0.07	a	0.4
2	0.05	0.02	a

1. Déterminer la constante a.

2. Déterminer les probabilités marginales de X et Y. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

3. Calculer les espérances mathématiques de X et Y ainsi que leurs variances.

4. Déterminer la matrice de covariance de (X, Y).

5. Calculer $E(X \mid Y = -2)$.

Exercice 4. Sur un espace de probabilité (Ω, F, P), on considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) dont la densité jointe est donnée par:

$$f(x,y) = \left(2xy + \frac{3}{2}y^2\right) 1_{[0,1]}(x)\, 1_{[0,1]}(y).$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Déterminer les densités marginales de X et Y.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Calculer $P\left(0 < X < \frac{1}{2}, 0 < Y < \frac{1}{2}\right)$ et $P(X < Y)$.

5. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$ et $Var(Y)$.

6. Déterminer les densités conditionnelles de X sachant que $Y = y$ et Y sachant que $X = x$. Calculer $E(Y \mid X = x)$.

7. Quelle est la distribution de $Z = E(Y \mid X)$. Calculer $E(Z)$.

Exercice 5. Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité jointe:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\alpha}{\sqrt{xy}} 1_{]0,1[}(x)\, 1_{[x,1[}(y).$$

1. Déterminer la valeur de la constante α.

2. Déterminer les lois marginales de X et Y.

3. Déterminer la matrice de covariance de (X, Y).

4. Déterminer les lois conditionnelles de $X|Y = y$ et de $Y|X = x$.

5. Calculer $E(Y \mid X = x)$ et déduire $E(Y \mid X)$.

6. Calculer $\int E(Y \mid X = x)\, f_X(x)\, dx$ et déduire que $E(E(Y \mid X)) = E(Y)$.

Exercice 6. Soit T une variable aléatoire sur un espace de probabilité (Ω, F, P) de densité

$$f_T(t) = \frac{1}{t^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t).$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi que T et soient U et V deux variables aléatoires telles que: $U = XY$ et $V = X/Y$.

1. Déterminer la densité du couple (U, V) et tracer son domain de définition.

2. Déterminer les lois marginales de U et V.

3. Déterminer la densités conditionnelle de V sachant que $U = u$.

4. Dites si U et V sont des variables aléatoires indépendantes. Justifier.

5. On pose $Z = \sqrt{U}$, calculer la densité de Z.