Université Larbi Ben M'Hidi, Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la vie
Département de Mathématiques et Informatique

Première année Master
Mathématiques appliquées

Année Universitaire 2020/2021 (S1)
Matière: **Probabilités**

TD 02: Convergence des suites de variable aléatoires

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout entier $n \geqslant 1$ on ait

$$P(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2},\ P\left(X_n = n^2 - 1\right) = \frac{1}{n^2}.$$

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers -1.

2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers -1.

3. Etudier la converge en moyenne quadratique de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ vers -1.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$P(X_n > x) = e^{-\alpha_n x},\quad \forall x \geqslant 0.$$

1. Quelle est la condition de α_n pour que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

2. Quelle est la condition de α_n pour que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbf{L}^p$ $(p \geqslant 1)$ vers 0.

Exercice 3. Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, sur un espace de probabilité (Ω, F, P), de densité $f_U(u) = 2u1_{[0,1]}(u)$. On pose

$$X_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n}(U_k) \quad \text{et} \quad Z_n = n(1 - X_n) \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant 1.$$

1. Déterminer la densité de la variable X_n.

2. Calculer $E(X_n)$, $Var(X_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} Var(X_n)$.

3. Etudier la converge dans $\mathbf{L}^2$ vers 0.

4. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 1.

5. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi et donner sa limite.

Exercice 4. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$, c-à-d: $F_U(u) = u\mathbf{1}_{[0,1]}(u)$. On pose

$$X_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(U_k),\quad Y_n = \left(\prod_{k=1}^{n} U_k\right)^{\frac{\alpha}{n}}\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\quad \text{et} \quad Z_n = n\min_{1\leqslant k\leqslant n}(U_k).$$

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers -1. La suite X_n converge-t-elle en probabilité vers -1? et en loi vers -1?

2. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement et donner sa limite.

3. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi et trouver sa limite.
