Université de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

13/02/2022
Durée 1h30

Examen d'Algèbre 3

Exercice 1 :(10 points)
Soit A la matrice associée à l'endomorphisme f relativement à sa base canonique.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer $Sp_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A sur $\mathbb{R}$,ensuite le sous-espace vectoriel associé à chaque valeur propre.
3. Montrer que A est diagonalisable, ensuite diagonaliser A.
4. Ecrire A^n en fonction de n.

Exercice 2 :(10 points)
Soit B la matrice associée à l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ relativement à sa base canonique.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice B et déduire $Sp_{\mathbb{R}}(B)$ l'ensemble des valeurs propres de B.
2. Déterminer le sous-espace associé à chaque valeur propre. Déduire si B est diagonalisable,si B est trigonalisable.
3. Soient $V_1 = (3;1;0)$, $V_2 = (-2;0;1)$ et $e_3 = (0;0;1)$.
   Vérifier que $g(e_3) = -2V_2 + 2e_3$. Montrer que (V_1, V_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Trigonaliser la matrice B.
5. Donner l'expression de B^n en fonction de n.
6. Montrer que $(B - 2I)^3 = (0)$, déduire B^n en fonction de n.

EXAMEN ALGEBRE 3

Exo 1 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) $$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda).$$ 02

$$P_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

2) $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-1 ; 1 ; 2\}$ 0,5

$$E(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} y = 0 \\ -3x + 3z = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ 0,5

$$E(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y = x \text{ et } z = 3x - y = 2x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$ 0,5

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -3x + 2y = 0, y = 0, -3x + y = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ 0,5

3) $P_A(\lambda)$ est scindé, chaque valeur propre est simple donc A est diagonalisable (01) soit $B = \left(v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ 0,5

$$D = M(f, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ 0,5 $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad CoP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P.B.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$$ 01

1). $A = P.D\,P^{-1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$; $A^n = P.D^n.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (-1)^n & 2 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 1+(-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^{n+1}+2-2^n & 2^n \end{pmatrix}$ 03

Exo2: $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1) $P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$

$\boxed{P_B(\lambda) = -(\lambda-2)^3}$ ✓ $Sp_{\mathbb{R}}(B) = \{2\}$. 1,5

2) $E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$

on a: $\begin{cases} 2x - 6y + 4z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x - 3y + 2z = 0}$ donc $x = 3y - 2z$

$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 3y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} ; y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; y, z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ 01

0,5

$m_g(2) = 2 \neq m_a(2) = 3$ donc B n'est pas diagonalisable

Comme $P_B(\lambda)$ est scindé donc B est trigonalisable 0,5

3) $g(e_3) = 4e_1$ et $-2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = g(e_3)$ 0,5

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$ 0,5

donc (v_1, v_2, e_3) libre et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. donc v_1, v_2, e_3 [illegible] base de $\mathbb{R}^3$.

0,5

Exo2 : Correction de l'Examen.

4) Trigonaliser B. on a : $g(v_1) = 2v_1 \quad g(v_2) = 2v_2 \quad g(v_3) = -2v_2 + 2v_3$

donc $M(g,B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 0,5 . $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 0,5

$\det P = 2 \qquad \mathrm{Com}P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 0,5 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$

Verif : $P.T.P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

$= \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

5) $B^n = P\,T^n\,P^{-1}$ 0,5 $\quad T = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2I_3 + N.$ 0,5

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 0,25

$N.(2I_3) = 2I_3.N$ 0,25

donc $T^n = 2^n I^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} I^{n-1} N + \underbrace{\binom{n}{2} 2^{n-2} I^{n-2} N^2}_{0} + \underbrace{\cdots}_{0}$

$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n.2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & -n2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

0,5

$B^n = 2^n \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$

$= 2^n \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2n \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1+n & -3n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{n}{2} & \frac{3n}{2} & 1-n \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

$$(B-2I)^2 = \begin{pmatrix}2 & -6 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -6 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$(B-2I)^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ 0,5 $\quad 2I\,(B-2I) = (B-2I)(2I)$.

0,5

$$B^n = \left((B-2I)+2I\right)^n = \binom{n}{0}(2I)^n + \binom{n}{1}(2I)^{n-1}(B-2I) + \underbrace{\binom{n}{2}(2I)^{n-2}(B-2I)^2}_{0}$$

$$= 2^n\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + 2^{n-1}n\begin{pmatrix}2 & -6 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix} = 2^n\begin{pmatrix}1+n & -3n & 2n\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{n}{2} & \frac{3n}{2} & 1-n\end{pmatrix}$$

$$= 2^n\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -1/2 & 3/2 & -1\end{pmatrix}$$

0,5