OFDM: Orthogonal Frequency Division Multiplexing

1-Introduction

La technique OFDM est utilisée dans les systèmes sans fil 4G par exemple :

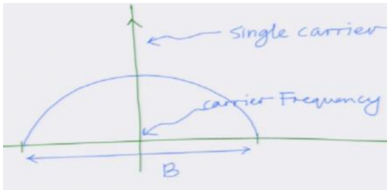
-LTE (long term evolution: 4G cellular standard).

-WiMAX (worldwide interoperability for microwave access).

-LTE-A (advanced).

L'OFDM est la clé de la technologie sans fil Broadband (large bande passante), par exemple pour le GSM la bande passante est de 200 KHz mais pour un système OFDM peut avoir une bande passante de l'ordre de 20MHz qui permis de haut débit.

2- Principe de base du OFDM



Supposant que la bande passante est B=10MHz (Broadband), dans ce cas le temps de symbole T_s est :

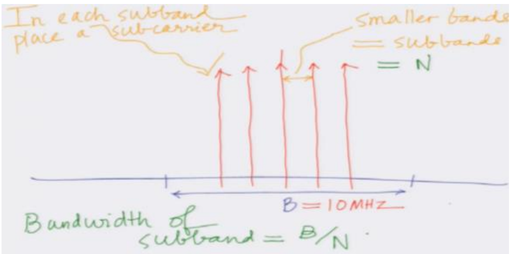
$$T_s = \frac{1}{B} = 0.1\mu s$$

Pour un canal sans fil la dispersion temporelle (delay spread) du canal T_d (le délai maximal de retard des trajets) est approximativement environ 2 à 3 µs.

Dans ce cas $T_s \ll T_d$ cela produit des interférences entres symboles ISI.

On remarque que l'augmentation de la bande passante B (Broadband) conduit à la diminution du temps de symbole $T_s = \frac{1}{B}$ donc $T_s \ll T_d$ qui produit des interférences entres symboles (ISI) qui provoque une dégradation des performances du système de communication sans fil.

Pour éviter le problème des ISI dans les systèmes Broadband, l'idée est de diviser la bande passante a N sous bandes avec des sous porteuse pour chaque sous bande. La bande passante des sous bands est B/N.



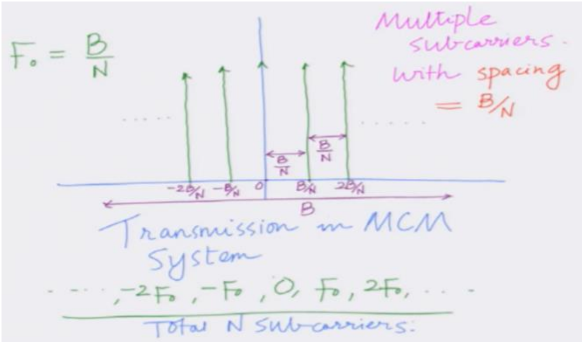
Supposant que B=10MHz et N=1000 sous bande, dans ce cas la bande passante des sous bande B' est :

$$\grave{B} = \frac{B}{N} = 10KHz$$

Le temps de symbole dans chaque sous bande est :

$$T_s = \frac{1}{B/N} = \frac{N}{B} = 100\mu s$$

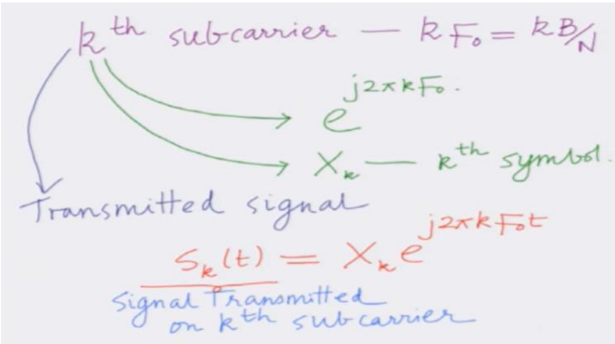
Dans ce cas on observe que le nouveau $T_s \gg T_d$ donc dans le nouveau système avec des sous bandes et des sous porteuses il n'y a pas des ISI. On parle ici sur la transmission a porteuses multiples comme le montre la figure suivante :



Si on note f_0=B/N, cela nous conduit N sous porteuses : …,-2f_0,-f_0,0,f_0,2f_0,…

Dans ce cas, la fréquence de la porteuse k^{ème} est kf_0=kB/N, donc la porteuse est $e^{j2\pi kf0}$ et le k^{ème} symbole est X_k, donc le signal transmis par la k^{ème} porteuse $s_k(t)$ est :

$$s_k(t) = X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$



Supposant que le bruit est ignoré, Le signal total reçu est :

$$y(t) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Maintenant la question qui se pose est comment récupérer le symbole X_k ?

On observe que la somme : $\sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t}$ est similaire à la série de Fourier, donc pour extraire le symbole X_l de la sous porteuse l.

L'idée sous-jacente à l'introduction des séries de Fourier est de pouvoir obtenir une fonction T-périodique, par exemple continue, comme somme de fonctions sinusoïdales :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{i2\pi \frac{n}{T} x}$$

avec les coefficients $c_n(f)$, appelés **coefficients de Fourier** de f, définis par :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} dt.$$

On a:

$$f_0 \int_{o}^{1/f_0} e^{-j2\pi l f_0 t} y(t) dt = f_0 \int_{o}^{1/f_0} e^{-j2\pi l f_0 t} \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$$= \sum_k \left(X_k f_0 \int_{o}^{1/f_0} e^{j2\pi (k-l) f_0 t} dt \right)$$

On a :

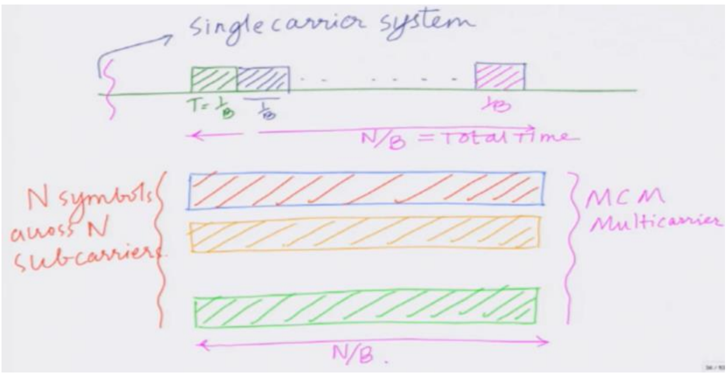
$$\int_{o}^{1/f_0} e^{j2\pi (k-l) f_0 t} dt = \begin{cases} 1 \; if \; k = l \\ 0 \; if \; k \neq l \end{cases}$$

Pour obtenir le symbole de la sous porteuse l on pose k=l :

$$\sum_k \left(X_k f_0 \int_{o}^{1/f_0} e^{j2\pi (k-l) f_0 t} dt \right) = X_l$$

Donc, dans la réception on multiplie par la l^{eme} correspondant sous porteuse, cela est équivalant a utilisé dans la réception une démodulation cohérente avec $e^{-j2\pi l f_0 t}$ ou par un filtrage adapte $e^{-j2\pi l f_0 (T-t)}$ pour extraire le symbole X_l.

La figure suivante représente une comparaison entre un système a une seule porteuse avec un système a porteuses multiples.



On remarque que le temps d'un symbole pour le système a une seule porteuse est T=1/B est pour un système a porteuses multiples est T=N/B.

3-FFT (Fast Fourier Transform) et le préfix cyclique pour OFDM

a. FFT/IFFT

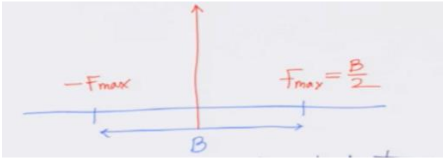
Le signal reçu pour un système a porteuse multiple est :

$$y(t) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Où kf_0 est la fréquence des sous porteuses, $f_0 = B/N$ et le nombre total des sous porteuses est N.

La génération de la somme $\sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t}$ est difficile à cause du grand nombre de sous porteuses. Donc, on a besoin de N oscillateurs pour générer les N sous porteuses de fréquences 0, f_0, $2f_0$, … en respectant l'orthogonalité entre ces sous porteuses ($\int_o^{1/f_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt = \begin{cases} 1\ if\ k = l \\ 0\ if\ k \neq l \end{cases}$).

La bande passante du signal transmit est B comme le montre la figure suivante :



Suivant le théorème d'échantillonnage de Nyquist la fréquence d'échantillonnage est $2f_{max} = B$ et la période d'échantillonnage est $T = 1/B$, donc le $l^{ème}$ instant d'échantillonnage est $lT = l/B$.

$$x(l) = x(lT) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 l T}$$

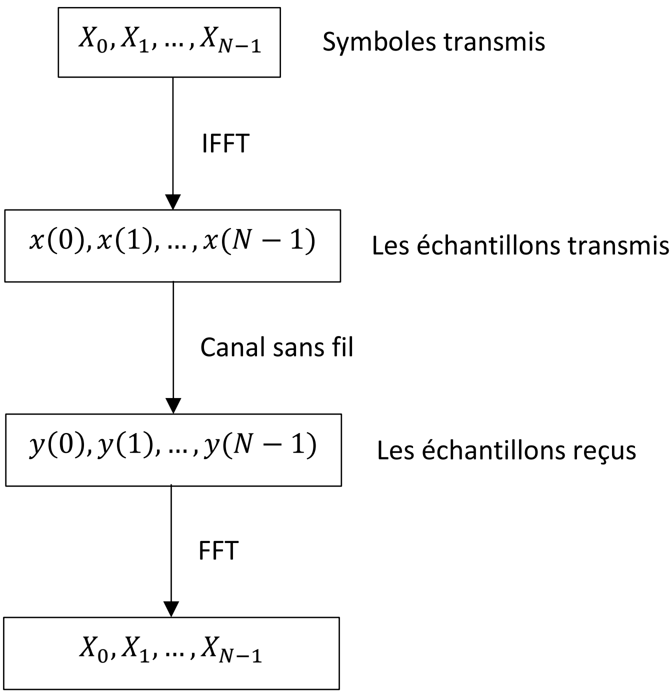
On a $f_0 = B/N$:

$$x(l) = \sum_k X_k e^{j2\pi \frac{kl}{N}}$$

On observe que cette expression est exactement la IDFT (inverse discret Fourier transform) ou IFFT, où $x(l)$ est le $l^{ème}$ IDFT point des symboles transmis par les N sous porteuses : $X_0, X_1, \dots X_{N-1}$.

Donc pour générer les signaux des N échantillons des sous porteuses il suffit d'utiliser la IFFT, cela est parmi les principaux aspect de l'OFDM.

À la réception, les symboles transmis seront récupérés en utilisant FFT.



b. Le préfix cyclique CP (Cyclic Prefix)

Soit un canal sans fil sélective en fréquence, le modèle de ce canal est :

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + \cdots + h(L-1)x(n-L+1)$$

La sorte $y(n)$ ne depond pas seulement de $x(n)$ mais dépond aussi des symboles précédents $x(n-1)$, $x(n-2)$, …, $x(n-L+1)$, donc il y a d'interférence entre symbole ISI dans le domaine temporel.

Supposant qu'on a deux systèmes OFDM qui transmis consécutivement comme suit :

OFDM 1 :

$$\boxed{\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{N-1}} \quad \text{Symboles transmis}$$

$$\Big\downarrow \text{ IFFT}$$

$$\boxed{\tilde{x}(0), \tilde{x}(1), \ldots, \tilde{x}(N-1)} \quad \text{Les échantillons transmis}$$

OFDM 2 :

$$\boxed{X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}} \quad \text{Symboles transmis}$$

$$\Big\downarrow \text{ IFFT}$$

$$\boxed{x(0), x(1), \ldots, x(N-1)} \quad \text{Les échantillons transmis}$$

Dans ce cas la sortie $y(0)$ du deuxième système OFDM est comme suit :

$$y(0) = h(0)x(0) + h(1)\tilde{x}(N-1) + h(2)\tilde{x}(N-2) + \cdots + h(L-1)\tilde{x}(N-L+1)$$

On remarque qu'il y a un problème d'interférence entre block IBI (inter block interference), la question qui se pose est comment évité ces IBI ? pour cela on utilise le préfix cyclique.

L'idée est de prendre $\bar{L}$ échantillons du côté queue du block transmis puis le mettre comme un préfix au début de ce même block transmis ce processus est connu par le préfix cyclique, comme le montre la figure suivante :

$X_0, X_1, \dots X_{N-2}, X_{N-1}$ Symboles transmis

$\downarrow$ IFFT

$x(0), x(1), \dots, x(N-2), x(N-1)$ Les échantillons transmis

$\bar{L}$ échantillons

$$\underbrace{x(N-\bar{L}), \dots, x(N-2), x(N-1)}_{\text{préfix}}, x(0), x(1), \dots, x(N-2), x(N-1)$$

Le nombre total d'échantillon transmis est devenu $N + \bar{L}$.

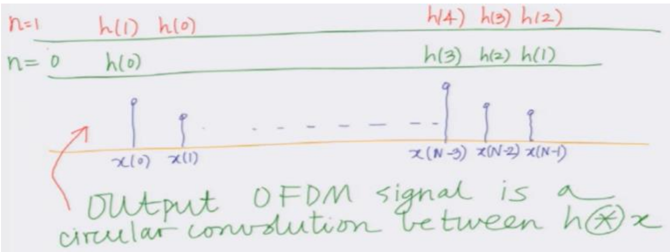
Maintenant, le signal reçu est de la forme :

$y(0) = h(0)x(0) + h(1)x(N-1) + h(2)x(N-2) + \cdots + h(L-1)x(N-L+1)$

On remarque que l'interférence entre block IBI est évitée, il reste que l'interférence entre symbole.

De la même façon on obtient $y(1)$:

$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) + h(2)x(N-1) + \cdots + h(L-1)x(N-L+1)$



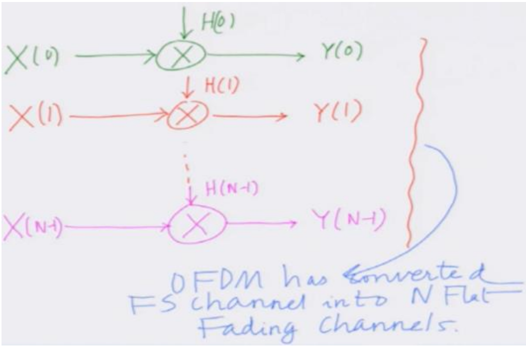
On observe que les coefficients du canal $h(i)$ se déplaçant d'une manière circulaire sur les symboles transmis, cette opération est connue par la convolution circulaire. Donc le signal de sortie du système OFDM est la convolution entre $h(*)x$.

$$y = h\,(*)\,x \xrightarrow[\text{FFT}]{} Y(k) = H(k).X(k)$$

$Y(k) = H(k).X(k)$

Symbole dans la sous porteuse k du signal reçu $y(0), y(1), \dots, y(N-1)$	Le coefficient du canal du la sous porteuse k $h(0), h(1), \dots, h(L-1), 0,0, \dots, 0$ (N-L) zero	Symbole dans la sous porteuse k $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$

On observe qu'il n'y a pas de sélectivité en fréquence $Y(k) = H(k).X(k)$ et la transmission est sans ISI (supposant que le bruit est ignoré). Ce résultat est l'objectif principale de l'OFDM pour Broadband système pour éviter la sélectivité en fréquence du canal sans fil à travers la IFFT/FFT et le préfix cyclique qui peut converti le système de communication sans fil à un système à évanouissement plat (Flat Fading Channel).

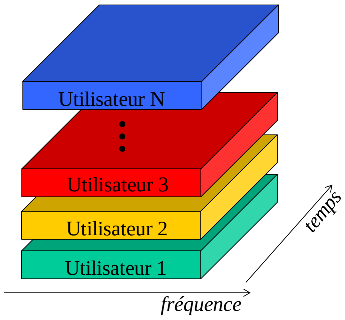


On conclure que OFDM a converti le canal de sélectivité en fréquence à un N canaux d'évanouissement plat (flat fading).

Code Division Multiple Access (CDMA)

-CDMA est utilisée dans les communications sans fil 3G.

-Tous les utilisateurs émettent simultanément sur la même bande de fréquence.



-CDMA utilise des codes pour l'accès multiple où on attribué à chaque utilisateur un code unique pour la transmission.

Principe du CDMA :

Supposant qu'on a deux utilisateurs : utilisateur0 et utilisateur1

On attribue le code c_0=[1, 1, 1, 1] a l'utilisateur0

Et le code c_1 =[1, -1, -1, 1] a l'utilisateur1

Supposant que l'utilisateur0 va transmettre le symbole a_0 et l'utilisateur1 va transmettre le symbole a_1.

Pour transmettre les deux symboles simultanément, on multiplie chaque symbole par le code correspondant et par la suite on additionne les deux signaux.

$a_0 \times c_0 = a_0 \times [1, 1, 1, 1] = [a_0, a_0, a_0, a_0]$

$a_1 \times c_1 = a_1 \times [1, -1, -1, 1] = [a_1, -a_1, -a_1, a_1]$

$a_0 \times c_0 + a_1 \times c_1 = [a_0+a_1, a_0-a_1, a_0-a_1, a_0+a_1]$ (signal transmit)

Au niveau du récepteur, on a l'utilisateur0 et corrélé avec le code c_0 et l'utilisateur1 et corrélé avec le code c_1 donc pour extraire le symbole de chaque utilisateur on multiplie le signal reçu par le code correspondant élément par élément puis on fait la somme.

L'utilisateur0 est corrélé avec le code c_0 :

[1, 1, 1, 1] Chips

$\times [a_0+a_1, a_0-a_1, a_0-a_1, a_0+a_1]$

$= (a_0+a_1) + (a_0-a_1) + (a_0-a_1) + (a_0+a_1)$

$=4a_0$ →le symbole de l'utilisateur0

Les mêmes étapes pour l'utilisateur1:

[1, -1, -1, 1]

$\times [a_0+a_1, a_0-a_1, a_0-a_1, a_0+a_1]$

$= (a_0+a_1) - (a_0-a_1) + -(a_0-a_1) + (a_0+a_1)$

$=4a_1$ →le symbole de l'utilisateur1

Étalement de spectre du CDMA

Exemple :

Soit le débit de symbole D_s=1000sym/s

$$T_s = \frac{1}{D_s} = \frac{1}{1000} = 1ms$$

$$B_{\min} = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{1ms} = 1KHz$$

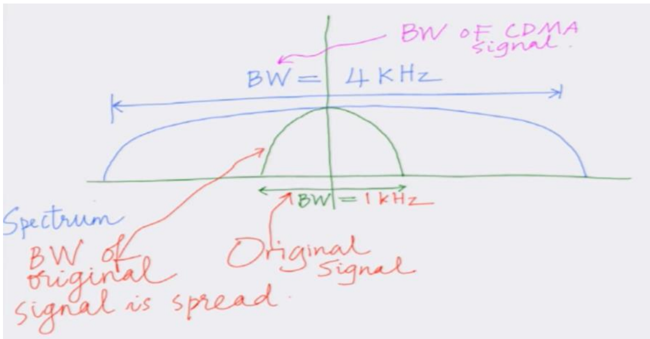
Supposant que le nombre de chips est 4, donc le temps de chips T_c

$$T_c = \frac{T_s}{4} = \frac{1}{4} = 0.25ms *$$

Donc la bande passante du CDMA est :

$$B_{CDMA} = \frac{1}{T_c} = \frac{1}{0.25ms} = 4KHz$$

Donc la longueur du code N est aussi le facteur d'étalement du spectre de la CDMA.



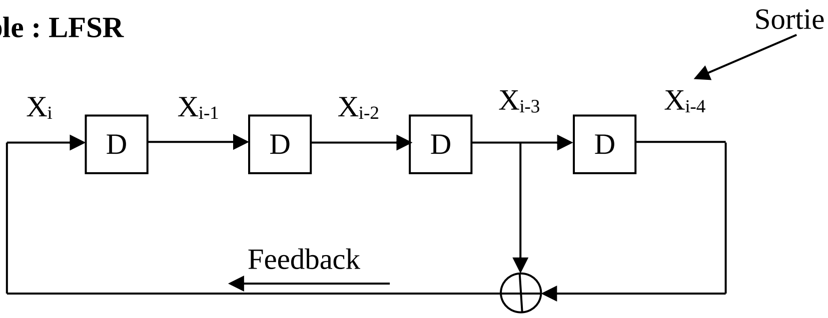
Génération des codes

Dans l'exemple précédent on à utilisé le code c_1 =[1, -1, -1, 1], ce code est une séquence aléatoire de +1 et de -1, cette séquence est générée aléatoirement. Cette séquence est appelée pseudo noise **PN.**

$[1, -1, -1, 1] \longleftarrow$ PN

Les séquences PN sont générées utilisant un **registre à décalage à rétroaction linéaire LFSR** (linear feedback shift register)

Exemple : LFSR



$X_i = X_{i-3}$ ***XOR*** X_{i-4}

X_{i-1}	X_{i-2}	X_{i-3}	X_{i-4}	X_i
1	1	1	**1**	0

0	1	1	**1**	0
0	0	1	**1**	0
0	0	0	**1**	1
1	0	0	**0**	0
0	1	0	**0**	0
0	0	1	**0**	1
1	0	0	**1**	1
1	1	0	**0**	0
0	1	1	**0**	1
1	0	1	**1**	0
0	1	0	**1**	1
1	0	1	**0**	1
1	1	0	**1**	1
1	1	1	**0**	1
1	1	1	**1**	0