Chapitre III

Analyse fréquentielle de Fourier

I. Introduction

Le développement en série ou transformée de Fourier permet d'obtenir une représentation spectrale (fréquentielle) des signaux déterministes. Celle-ci exprime la répartition de l'amplitude, de la phase, de l'énergie ou de la puissance des signaux considérés en fonction de la fréquence. L'analyse harmonique est l'instrument majeur de la théorie des signaux et des systèmes.

II. Série de Fourier

La série de Fourier s'applique aux signaux périodiques, elle permette de décomposer un signal périodique en somme infinie de termes : sinus ou/et cosinus, exponentielles, …

II.1. Série de Fourier Trigonométrique (S.F.T)

Un signal périodique $x(t)$ de période T peut être écrit sous la somme suivante :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

Où :

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: est la pulsation propre

$n\omega$: harmonique de rang n; l'harmonique $n = 1$ s'appel le fondamental.

a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier trigonométriques où :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt \; ; \; n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt \; ; \; n \geq 1$$

A_0 : est la valeur moyenne du signal ou la composante continue :

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

❖ **<u>Propriétés</u>**

* Si le signal $x(t)$ est pair c.à.d. $x(-t) = x(t)$ alors :

$b_n = 0$ et $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(n\omega t) dt$

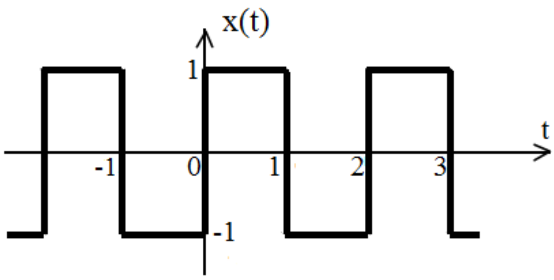
* Si le signal $x(t)$ est impair c.à.d. $x(-t) = -x(t)$ alors :

$$A_0 = a_n = 0 \text{ et } b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)\sin(n\omega t)dt$$

* Si le signal $x(t)$ est réel alors a_n et b_n sont aussi réels.

Exemple :

Décomposer le signal représenté sur la figure suivante en S.F.T :



Solution :

D'abord, on détermine l'expression du signal $x(t)$ sur une période T :

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq 0 \\ +1, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$T = 2s;\ \ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

On calcul maintenant les coefficients A_0 , a_n et b_n

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0}(-1)dt + \int_0^1 (1)dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-t|_{-1}^{\ 0} + t|_0^1\right]$$

$$= \frac{1}{2}[(0-1) + (1-0)]$$

$A_0 = 0$; la valeur moyenne est nulle.

Le signal $x(t)$ est un signal impair alors $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt$$

$$= \frac{2}{2}\left[\int_{-1}^{0} -1.\sin(n\omega t)dt + \int_0^1 1.\sin(n\omega t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{n\omega}.\cos(n\omega t)|_{-1}^{0} - \frac{1}{n\omega}.\cos(n\omega t)|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{n\pi}(\cos(0) - \cos(-n\pi)) - \frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi) - \cos(0))$$

$$= \frac{1}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) - \frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1)$$

$$= \frac{1}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) + \frac{1}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$$

On a : $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Alors : $b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

On peut écrire maintenant le signal $x(t)$ sous la forme trigonométrique suivante :

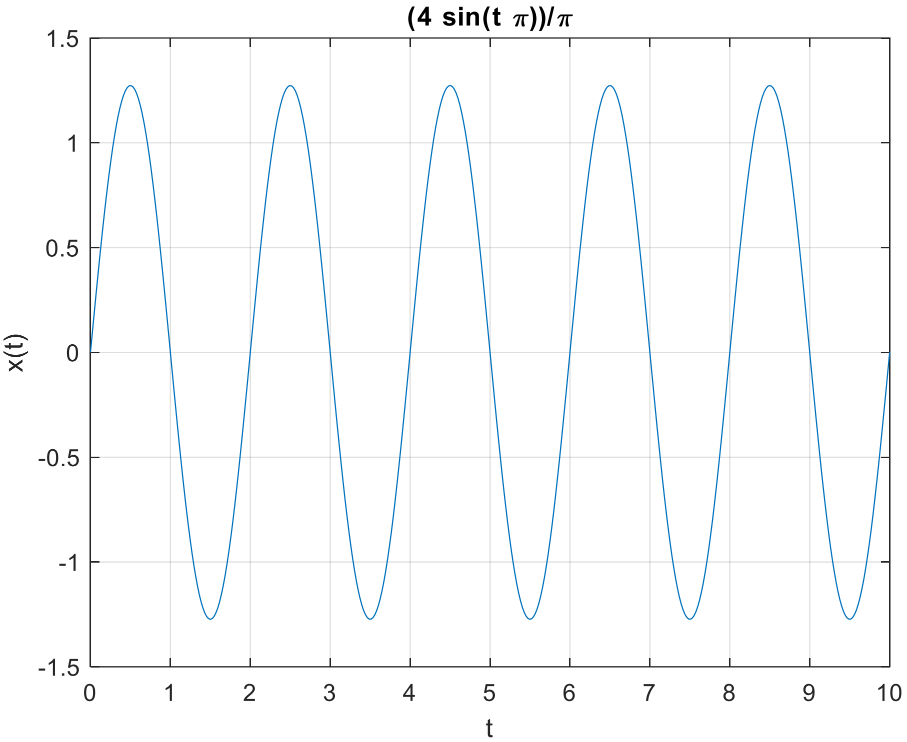
$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi t)$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n) \sin(n\pi t)$$

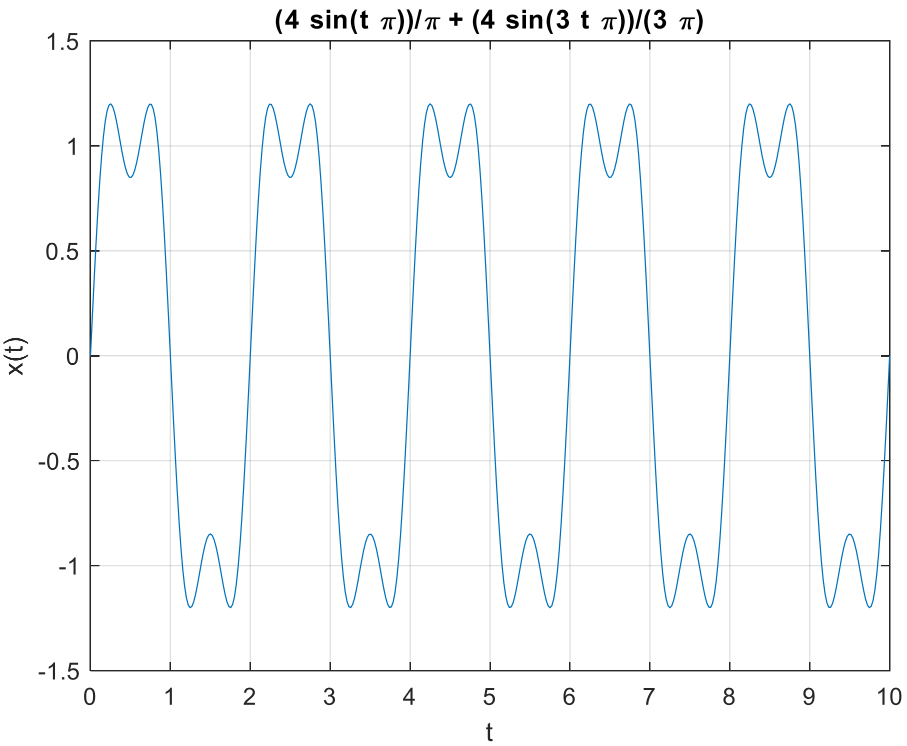
$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\big((2k+1)\pi t\big)$$

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\pi t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\pi t) + \frac{4}{7\pi}\sin(7\pi t) + \frac{4}{9\pi}\sin(9\pi t) + \cdots$$

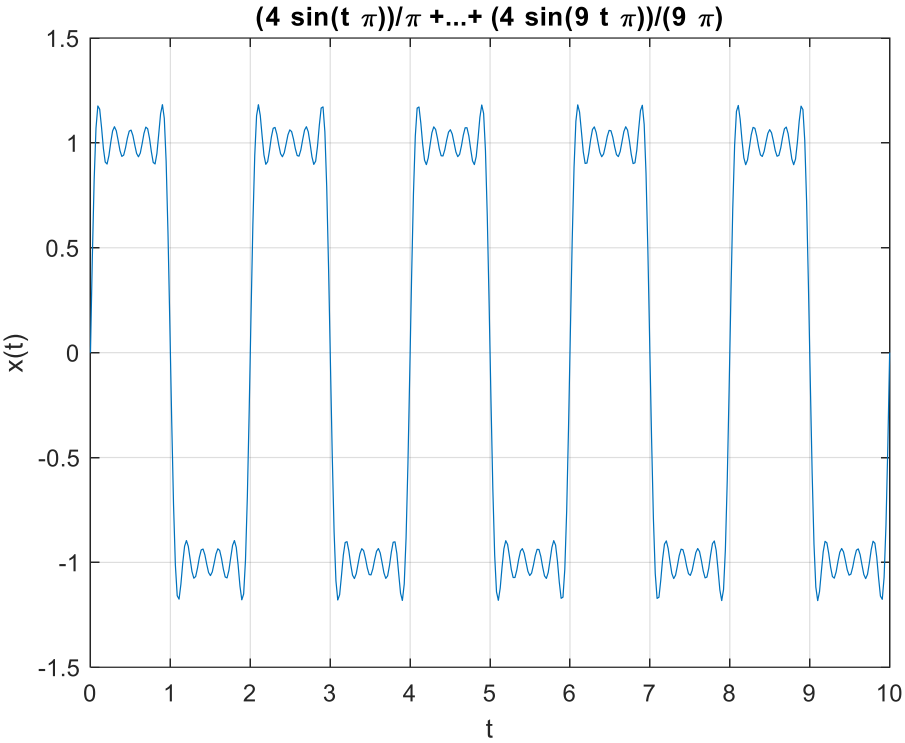
Pour $n = 1$



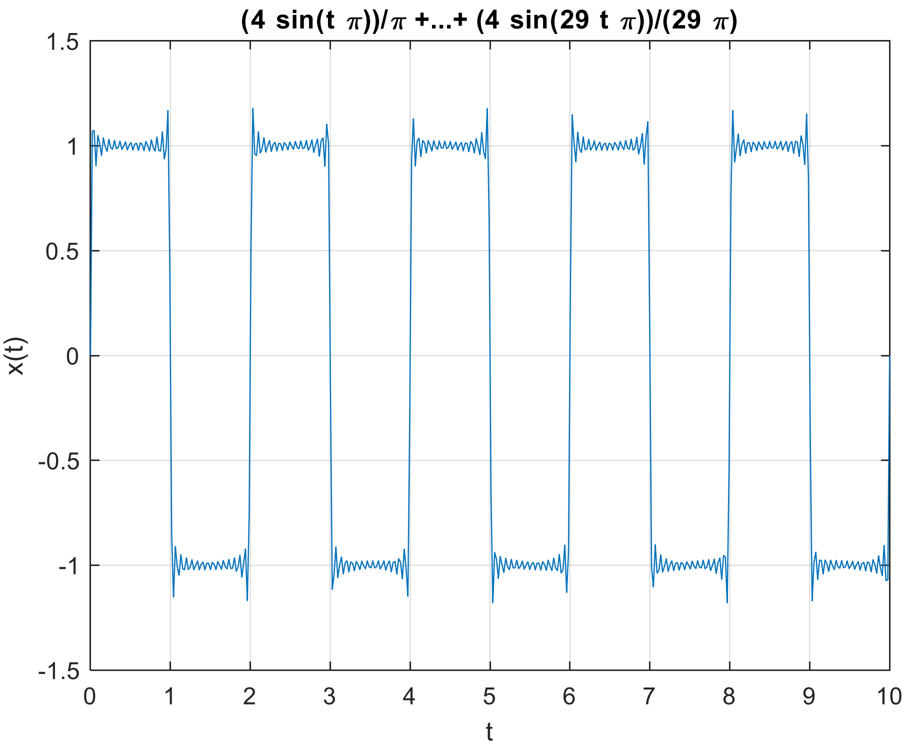
Pour $n = 1:3$



Pour $n = 1:10$

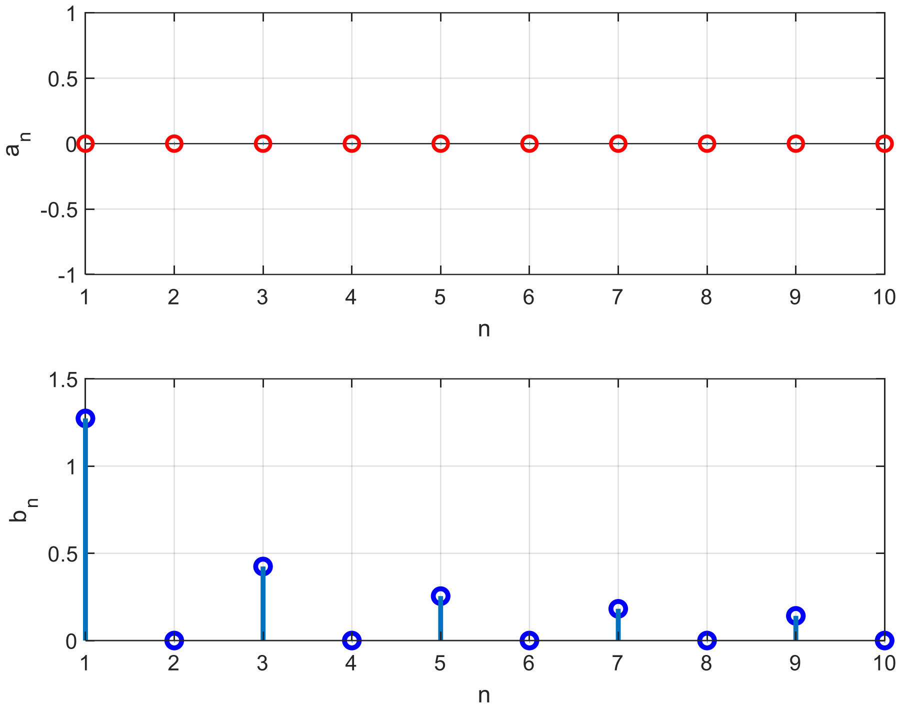


Pour $n = 1:30$



On peut tracer les modules des coefficients A_0 , a_n et b_n

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**...**
a_n	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_n	/	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{4}{5\pi}$	0	$\frac{4}{7\pi}$	...



II.2. Série de Fourier Complexe (S.F.C)

Soit un signal périodique $x(t)$ décomposable en S.F.T telle que :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Les relations d'Euler : $\begin{cases} e^{\,j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha) \\ e^{-j\alpha} = \cos(\alpha) - j\sin(\alpha) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2} \\ \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j} \end{cases}$

On pose :

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$$

$$\sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

On remplace ces formules dans l'expression de $x(t)$:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left(\frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}\right)$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n}{2} e^{-jn\omega t} + \frac{b_n}{2j} e^{jn\omega t} - \frac{b_n}{2j} e^{-jn\omega t}\right)$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j}\right) e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j}\right) e^{-jn\omega t}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right) e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right) e^{-jn\omega t}$$

Posons :

$$C_0 = A_0$$

$$C_n = \left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)$$

$$C_{-n} = \left(\frac{a_{-n} - jb_{-n}}{2}\right) = \left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right)$$

On trouve :

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} e^{-jn\omega t}$$

$$x(t) = C_0 e^{j0\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

C'est la forme complexe (exponentielle) de la série de Fourier avec :

$$C_0 = A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$C_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt - j\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt\right]$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t).(\cos(n\omega t) - j\sin(n\omega t))dt$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jn\omega t}dt$$

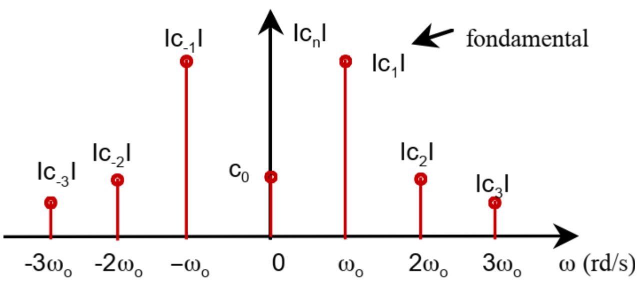
❖ **<u>Spectres de module et de phase (spectres bilatéraux)</u>**

La représentation spectrale graphique porte le nom de **spectre bilatéral**, parce que les fréquences sont négatives et positives car le compteur n varie de -∞ à +∞. Le spectre de module (ou d'amplitude) est une représentation graphique qui permette de donner les modules de C_n en fonction de n ou $n\omega$, ce spectre est symétrique par rapport à l'axe vertical c.à.d. c'est un spectre pair : $|C_n| = |C_{-n}|$.

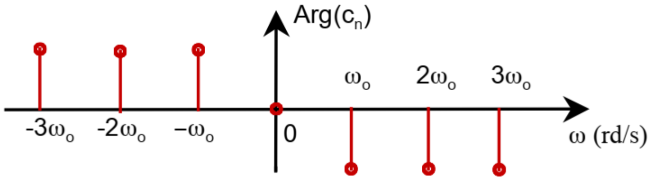
$$|C_n| = \sqrt{\left(Re(C_n)\right)^2 + \left(Im(C_n)\right)^2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$$

Le spectre de phase permet de représenter graphiquement la phase (l'argument) de C_n en fonction de n ou $n\omega$, ce spectre est impair : $\varphi_n = -\varphi_{-n}$.

$$\varphi_n = Arg(C_n) = Arctg\left(\frac{Im(C_n)}{Re(C_n)}\right) = Arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$



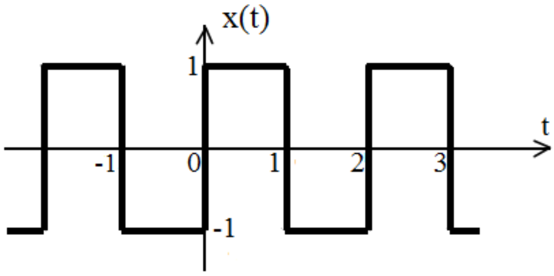
Spectre bilatéral d 'amplitude



Spectre bilatéral de phase

Exemple :

Décomposer le signal représenté sur la figure suivante en S.F.C puis tracer son spectre de module et de phase (spectres bilatéraux) :



Solution :

$$x(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$T = 2s; \;\; \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

On calcul maintenant les coefficients C_0 et C_n

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (1)dt + \int_1^2 (-1)dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[t|\,_0^1 - t|\,_1^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}[(1-0)-(2-1)]$$

$$C_0 = 0$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jn\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 1\, e^{-jn\omega t} dt + \int_1^2 (-1)\, e^{-jn\omega t} dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{jn\omega}.\, e^{-jn\omega t}\Big|_0^1 + \frac{1}{jn\omega}.\, e^{-jn\omega t}\Big|_1^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{jn\omega}.\left(e^{-jn\omega} - 1\right) + \frac{1}{jn\omega}.\left(e^{-jn2\omega} - e^{-jn\omega}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{jn\pi}.\left(e^{-jn\pi} - 1\right) + \frac{1}{jn\pi}.\left(e^{-jn2\pi} - e^{-jn\pi}\right)\right]$$

On a : $\begin{cases} e^{-jn\pi} = \cos(n\pi) - j\sin(n\pi) = (-1)^n \\ e^{-jn2\pi} = \cos(2n\pi) - j\sin(2n\pi) = 1 \end{cases}$

$$C_n = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{jn\pi}.((-1)^n - 1) + \frac{1}{jn\pi}.(1 - (-1)^n)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{jn\pi}.(1 - (-1)^n) + \frac{1}{jn\pi}.(1 - (-1)^n)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{jn\pi}.(1 - (-1)^n)\right]$$

$$= \frac{1}{jn\pi}.(1 - (-1)^n)$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2}{jn\pi} = -j\frac{2}{n\pi}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Donc :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{jn\pi}(1 - (-1)^n)e^{jn\pi t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{j(2k+1)\pi}.e^{j(2k+1)\pi t}$$

$$x(t) = \cdots - \frac{2}{j3\pi}e^{-j3\pi t} - \frac{2}{j\pi}e^{-j\pi t} + \frac{2}{j\pi}e^{j\pi t} + \frac{2}{j3\pi}e^{-j3\pi t} + \cdots$$

Spectre de module :

$$C_0 = 0 \Rightarrow |C_0| = 0$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -j\frac{2}{n\pi}, & n = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow |C_n| = |C_{-n}| = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \left|\frac{2}{n\pi}\right|, & n = 2k+1 \end{cases}$$

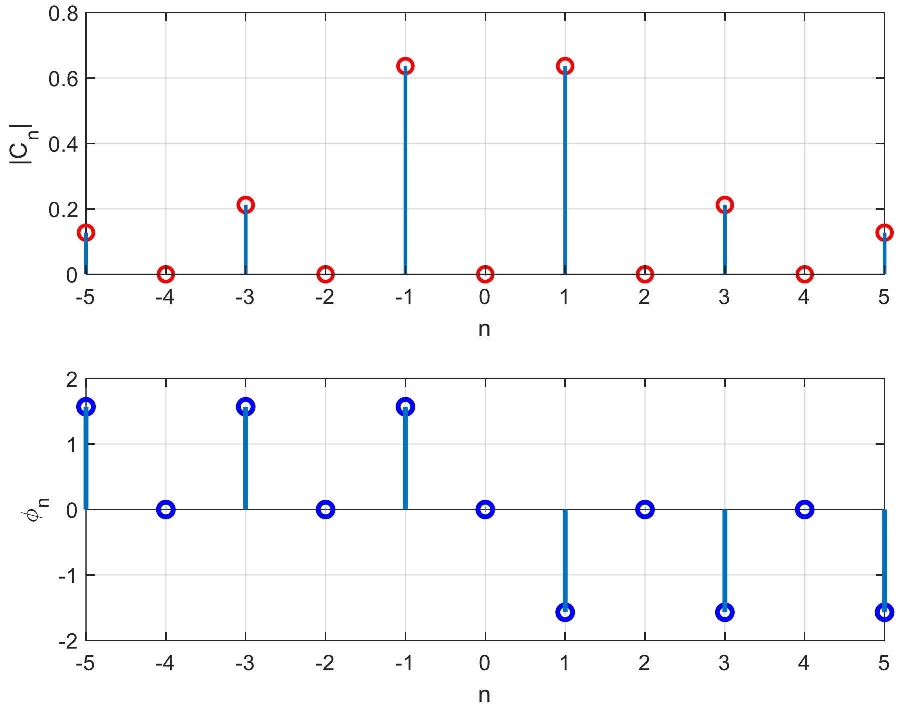
Spectre de phase :

$$\varphi_n = Arg(C_n)$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -j\frac{2}{n\pi}, & n = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow \varphi_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{\pi}{2}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$C_{-n} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ j\frac{2}{n\pi}, & n = 2k+1 \end{cases} \Longrightarrow \varphi_{-n} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ +\frac{\pi}{2}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

n	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$\|C_n\|$	...	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	...
φ_n	...	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	...



II.3. Série de Fourier Polaire (S.F.P)

Soit un signal périodique $x(t)$ décomposable en S.F.T telle que :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

On pose : $\begin{cases} a_n = P_n \cos(\theta_n) \\ b_n = P_n \sin(\theta_n) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos(\theta_n) = \frac{a_n}{P_n} \\ \sin(\theta_n) = \frac{b_n}{P_n} \end{cases} \Longrightarrow \tan(\theta_n) = \frac{b_n}{a_n}$

$$a_n^2 + b_n^2 = P_n^2 \cos^2(\theta_n) + P_n^2 \sin^2(\theta_n) = P_n^2[\cos^2(\theta_n) + \sin^2(\theta_n)] = P_n^2$$

$$\Longrightarrow \quad P_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Remplaçons a_n et b_n dans l'expression de $x(t)$, on trouve :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (P_n \cos(\theta_n)\cos(n\omega t) + P_n \sin(\theta_n)\sin(n\omega t))$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n(\cos(\theta_n)\cos(n\omega t) + \sin(\theta_n)\sin(n\omega t))$$

On a : $\cos(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha \mp \beta)$, alors :

$$x(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

C'est la forme polaire de la série de Fourier avec :

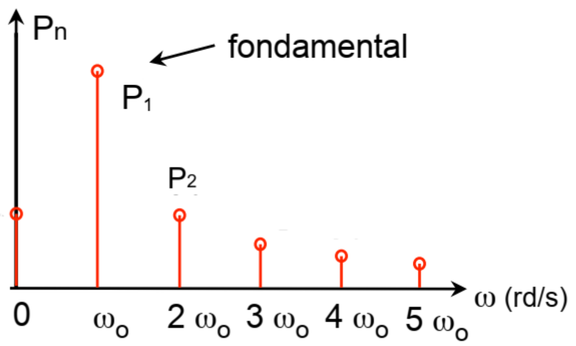
$$P_0 = A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$P_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

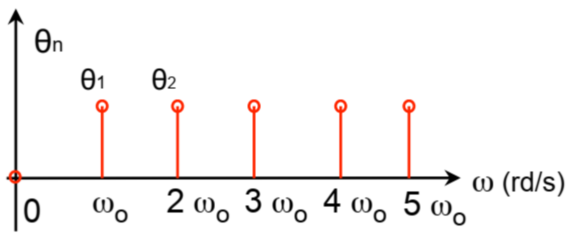
$$\theta_n = Arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

❖ **<u>Spectres de module et de phase (spectres unilatéraux)</u>**

C'est la représentation de P_n et θ_n en fonction de n ou $n\omega$, la représentation spectrale graphique qui lui est associée porte le nom de **spectre unilatéral**, parce que les fréquences sont positives ou nulles car le compteur n des harmoniques varie de 0 à +∞.



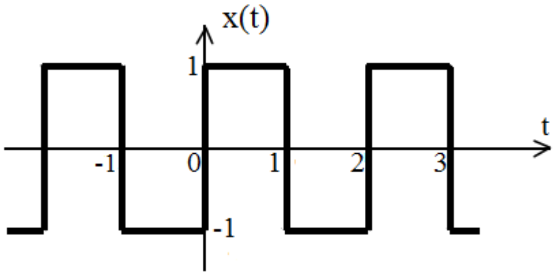
Spectre unilatéral d 'amplitude



Spectre unilatéral de phase

<u>Exemple :</u>

Décomposer le signal représenté sur la figure suivante en S.F.P puis tracer son spectre de module et de phase (spectres unilatéraux) :



Solution :

$$x(t)=\begin{cases}+1, & 0\le t\le 1\\ -1, & 1\le t\le 2\end{cases}$$

$$T=2s;\ \ \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

On a trouvé : $A_0=0$; $a_n=0$ et $b_n=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{4}{n\pi}, & n=2k+1\end{cases}$

$$P_0=A_0=0\ ;\ P_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=b_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{4}{n\pi}, & n=2k+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\theta_n)=\frac{a_n}{P_n}=0\\ \sin(\theta_n)=\frac{b_n}{P_n}=\begin{cases}0, & n=2k\\ 1, & n=2k+1\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\ \theta_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{\pi}{2}, & n=2k+1\end{cases}$$

Donc :

$$x(t)=P_0+\sum_{n=1}^{+\infty}P_n\cos(n\omega t-\theta_n)$$

$$x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\cos\left((2k+1)\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t)=\frac{4}{\pi}\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4}{3\pi}\cos\left(3\pi t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4}{5\pi}\cos\left(5\pi t-\frac{\pi}{2}\right)+\cdots$$

Spectre de module :

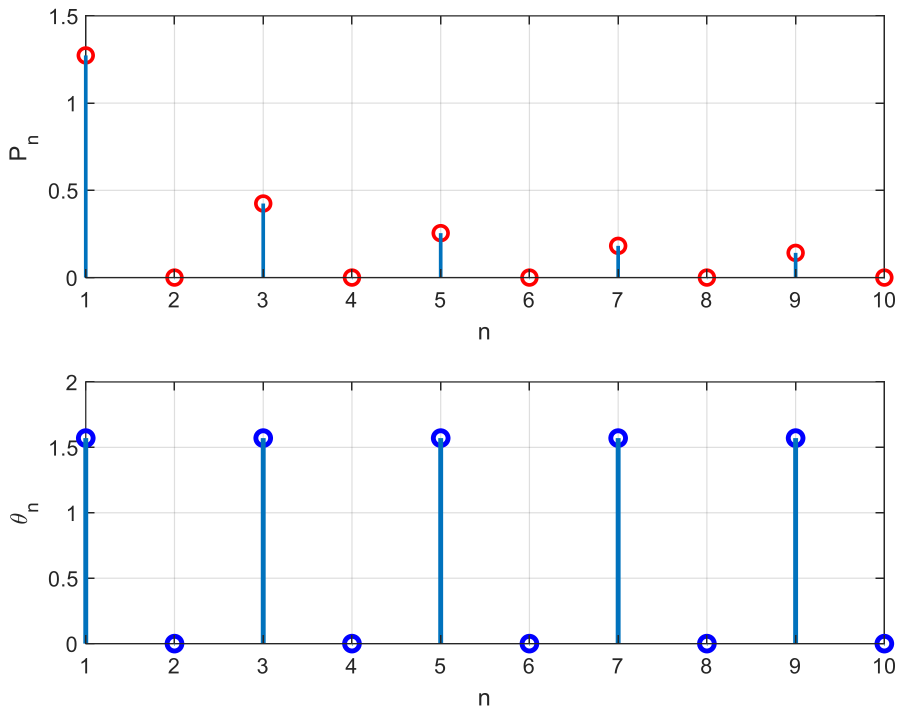
$$P_0=0\rightarrow|P_0|=0$$

$$P_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{4}{n\pi}, & n=2k+1\end{cases}\ \Rightarrow\ |P_n|=\begin{cases}0, & n=2k\\ \left|\frac{4}{n\pi}\right|, & n=2k+1\end{cases}$$

Spectre de phase :

$$\theta_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{\pi}{2}, & n=2k+1\end{cases}$$

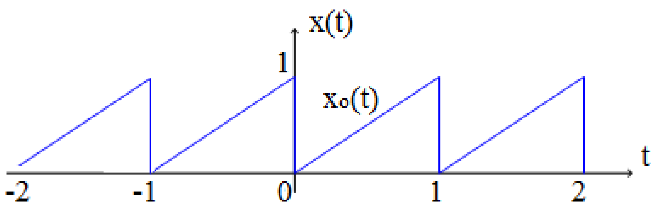
n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**...**
P_n	0	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{4}{5\pi}$	0	$\frac{4}{7\pi}$	$\cdots$
θ_n	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	...



<u>*Remarque :*</u>

Une fonction $x_0(t)$ non périodique et finie (définie sur l'intervalle $[a, b]$ et nulle ailleurs) peut être aussi développée en série de Fourier, pour cela nous considérons la fonction $x(t)$ périodique de période $T = [a, b]$ et elle est égal à $x_0(t)$ sur cet intervalle.

<u>*Exemple*</u> *:* $x_0(t) = t; \ \ t \in [0,1]$



II.4. Relation entre les trois formes de la série de Fourier

Les relations existantes entre les trois représentations de Fourier sont présentées dans le tableau suivant, ce tableau est important car elle permet de voir en un coup d'œil les relations simples liant les trois représentations spectrales.

$$S.F.T: x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$S.F.C: x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

$$S.F.P: x(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

Forme de la série de Fourier	*Trigonométrique (Réelle)*	*Complexe (Exponentielle)*	*Polaire (En cosinus)*
Trigonométrique (Réelle)	$\boldsymbol{A_0}$ **,** $\boldsymbol{a_n}$ **et** $\boldsymbol{b_n}$	$C_0 = A_0$ $C_n = \left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)$ $C_{-n} = \left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right)$ $\varphi_n = Arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$	$P_0 = A_0$ $P_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\theta_n = Arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$
Complexe (Exponentielle)	$A_0 = C_0$ $a_n = C_n + C_{-n}$ $= 2.Re(C_n)$ $b_n = j(C_n - C_{-n})$ $= -2.Im(C_n)$	$\boldsymbol{C_0}$ **,** $\boldsymbol{C_n}$ **et** $\boldsymbol{C_{-n}}$ $\boldsymbol{\varphi_n}$ **,** $\boldsymbol{\varphi_{-n}}$	$P_0 = C_0$ $P_n = 2C_n e^{-j\varphi_n}$ $= 2\lvert C_n\rvert$ $\theta_n = -\varphi_n$
Polaire (En cosinus)	$A_0 = P_0$ $a_n = P_n \cos(\theta_n)$ $b_n = P_n \sin(\theta_n)$	$C_0 = P_0$ $C_n = \frac{1}{2} P_n e^{-j\theta_n}$ $C_{-n} = \frac{1}{2} P_n e^{j\theta_n}$ $\lvert C_n\rvert = \frac{1}{2} P_n$ $\varphi_n = -\theta_n$	$\boldsymbol{P_0}$ **,** $\boldsymbol{P_n}$ $\boldsymbol{\theta_n}$

Exercice 1 :

Décomposer le signal périodique $x(t)$ suivant en *S.F.T*, *S.F.C* et *S.F.P* puis tracer ses spectres de module et de phase unilatéraux et bilatéraux correspondants

$$x(t) = A.\cos^2(\omega t), T = 1s$$

Solution :

On a : $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \implies x(t) = A\left(\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\right) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}.\cos(2\omega t)$

$$S.F.T: x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$x(t) = A_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \cdots$$

On compare les deux expressions :

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}.\cos(2\omega t) = A_0 + a_2 \cos(2\omega t)$$

On déduit que : $A_0 = \frac{A}{2}$; $a_2 = \frac{A}{2}$; $b_n = 0$ et $a_n = 0, \forall\, n \neq 2$

$$S.F.P : x(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

$$x(t) = P_0 + P_1 \cos(\omega t - \theta_1) + P_2 \cos(2\omega t - \theta_2) + P_3 \cos(3\omega t - \theta_3) + \cdots$$

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}.\cos(2\omega t) = P_0 + P_2 \cos(2\omega t - \theta_2)$$

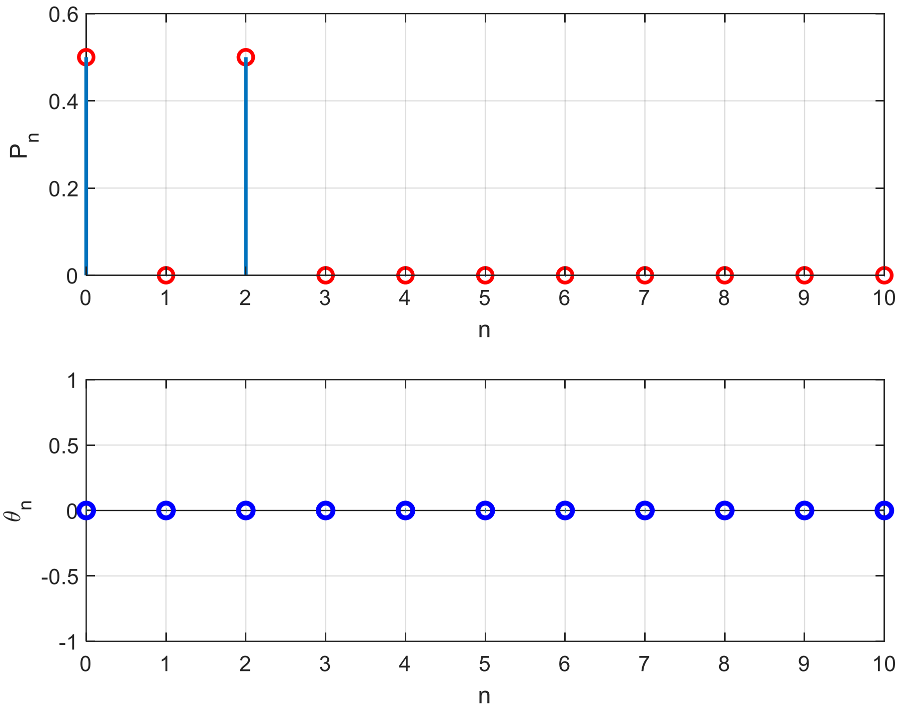
On trouve : $P_0 = \frac{A}{2}$; $P_2 = \frac{A}{2}$; $\theta_2 = 0$ et $P_n = 0, \forall\, n \neq 2$; $\theta_n = 0$

Ou bien : $P_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = a_n \implies P_0 = A_0 = \frac{A}{2}$ et $P_2 = a_2 = \frac{A}{2}$

$$\theta_n = Arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = Arctg(0) \implies \theta_n = 0$$

Spectres de module et de phase (spectres unilatéraux) :

On prend $A = 1$:



$$S.F.C: \; x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

$$x(t) = \ldots + C_{-2}e^{-j2\omega t} + C_{-1}e^{-j\omega t} + C_0 + C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{j2\omega t} + \cdots$$

On a : $\cos(\alpha) = \frac{e^{-j\alpha}+e^{j\alpha}}{2} \;\; \Longrightarrow \;\; \cos(2\omega t) = \frac{e^{-j2\omega t}+e^{j2\omega t}}{2}$

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}.\cos(2\omega t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}\left(\frac{e^{-j2\omega t}+e^{j2\omega t}}{2}\right) = \frac{A}{2} + \frac{A}{4}e^{-j2\omega t} + \frac{A}{4}e^{j2\omega t}$$

On compare avec la forme complexe :

$$x(t) = \frac{A}{4}e^{-j2\omega t} + \frac{A}{2} + \frac{A}{4}e^{j2\omega t} = C_{-2}e^{-j2\omega t} + C_0 + C_2 e^{j2\omega t}$$

On trouve que : $C_{-2} = C_2 = \frac{A}{4}$; $C_0 = \frac{A}{2}$ et $C_n = 0 \; \forall \, n \neq \pm 2$

$$\varphi_n = Arctg\left(\frac{Im(C_n)}{Re(C_n)}\right) = Arctg(0) \;\rightarrow\; \varphi_n = 0$$

Ou bien : $C_n = \left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right) = \frac{a_n}{2} \;\rightarrow\; C_2 = \frac{a_2}{2} = \frac{A}{4}$

$$C_{-n} = \left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right) = \frac{a_n}{2} \;\rightarrow\; C_{-2} = \frac{a_2}{2} = \frac{A}{4}$$

$$C_0 = A_0 = \frac{A}{2}$$

$\varphi_n = Arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = Arctg(0) \Rightarrow \varphi_n = 0$

Ou bien : $C_n = \frac{1}{2}P_n e^{-j\theta_n} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}P_2 e^{-j0} = \frac{A}{4}$

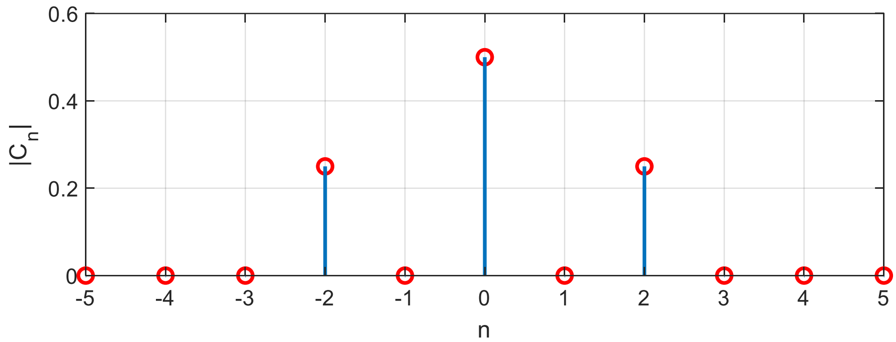
$C_{-n} = \frac{1}{2}P_n e^{j\theta_n} \Rightarrow C_{-2} = \frac{1}{2}P_2 e^{j0} = \frac{A}{4}$

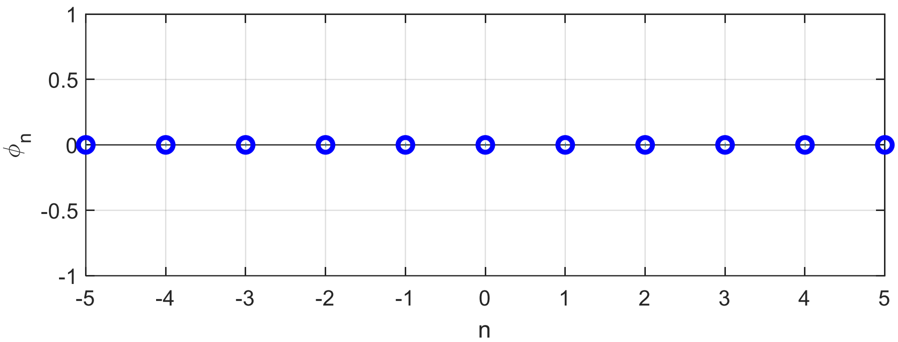
$C_0 = P_0 = \frac{A}{2}$

$\varphi_n = -\theta_n \Rightarrow \varphi_n = 0$

Spectres de module et de phase (spectres bilatéraux) :

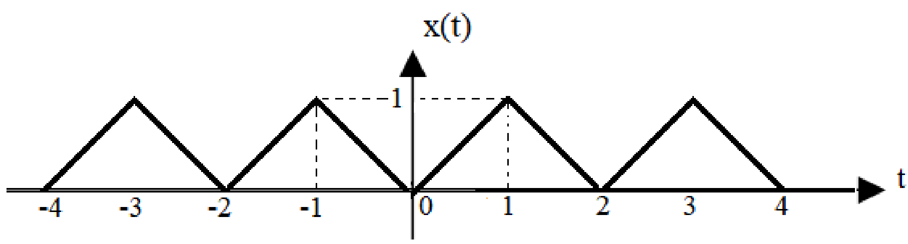
On prend $A = 1$:





Exercice 2 :

On considère le signal périodique $x(t)$ représenté sur la figure suivante :



1. Donner l'expression du signal $x(t)$ sur une période T, en déduire la pulsation propre ω.

2. Décomposer ce signal en série de Fourier trigonométrique.

3. En déduire les formes complexe et polaire.

4. Tracer les spectres de module et phase bilatéraux et unilatéraux pour $n = 0, 1, 2, 3$.

Solution :

1. $x(t) = |t|,\ -1 \leq t \leq 1$

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ -t, & -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

$$T = 2s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

2. S.F.T :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0}(-t).dt + \int_0^1 t.dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-t^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0\right)\right]$$

$A_0 = \frac{1}{2}$; c'est la valeur moyenne du signal

$x(t)$ est un signal pair alors : $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$= \frac{2}{2}\left[\underbrace{\int_{-1}^{0}(-t).\cos(n\omega t)dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 t.\cos(n\omega t)dt}_{I_2}\right]$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0}(-t).\cos(n\omega t)dt = \int_0^1 t.\cos(n\omega t)dt = I_2$$

$$a_n = 2.I_1 = \int_0^1 2t.\cos(n\omega t)dt$$

C'est un intégral par partie :

$$\begin{cases} u = 2t \quad \rightarrow u' = 2 \\ v' = \cos(n\omega t) \rightarrow v = \frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t) \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2t}{n\omega}.\sin(n\omega t)|_0^1 - \left(\frac{2}{n\omega}\right).\int_0^1 \sin(n\omega t)\,dt$$

$$= \frac{2t}{n\omega}.\sin(n\omega t)|_0^1 + \frac{2}{(n\omega)^2}.\cos(n\omega t)|_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}(\sin(n\pi) - 0) + \frac{2}{(n\pi)^2}(\cos(n\pi) - \cos(0))$$

On a : $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$a_n = \frac{2}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1)$$

$$a_n = \begin{cases} 0\,, \quad n = 2k \\ \dfrac{-4}{(n\pi)^2}\,, n = 2k+1 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1)\cos(n\pi t)$$

$$x(t) = \frac{A}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{\left((2k+1)\pi\right)^2}\cos\left((2k+1)\pi t\right)$$

3. S.F.C :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

$$C_0 = A_0 = \frac{1}{2}$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1) - j.0\right]$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1)$$

$$C_n = \begin{cases} 0\,, \quad n = 2k \\ \dfrac{-2}{(n\pi)^2}\,, n = 2k+1 \end{cases}$$

S.F.P :

$$x(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

$$P_0 = A_0 = \frac{1}{2}$$

$$P_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{a_n^2}$$

$$P_n = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ \dfrac{4}{(n\pi)^2}\,, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Ou bien :

$$P_0 = C_0 = \frac{1}{2}$$

$$P_n = 2|C_n|$$

$$P_n = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ \dfrac{4}{(n\pi)^2}\,, & n = 2k+1 \end{cases}$$

4. Spectres de module et phase :

- Spectres bilatéraux :

$$C_0 = \tfrac{1}{2} \Longrightarrow |C_0| = \tfrac{1}{2}$$

$$C_n = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ \frac{-2}{(n\pi)^2}\,, & n = 2k+1 \end{cases} \Longrightarrow |C_n| = |C_{-n}| = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2}{n^2\pi^2}\,, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Le spectre de module est pair.

$$\varphi_n = Arg(C_n)$$

$C_0 = \tfrac{1}{2} \Longrightarrow \varphi_0 = 0$ (Parce que C_0 est réel positif)

$$C_n = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ \frac{-2}{(n\pi)^2}\,, & n = 2k+1 \end{cases} \Longrightarrow \varphi_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \pm\pi, & n = 2k+1 \end{cases}$$

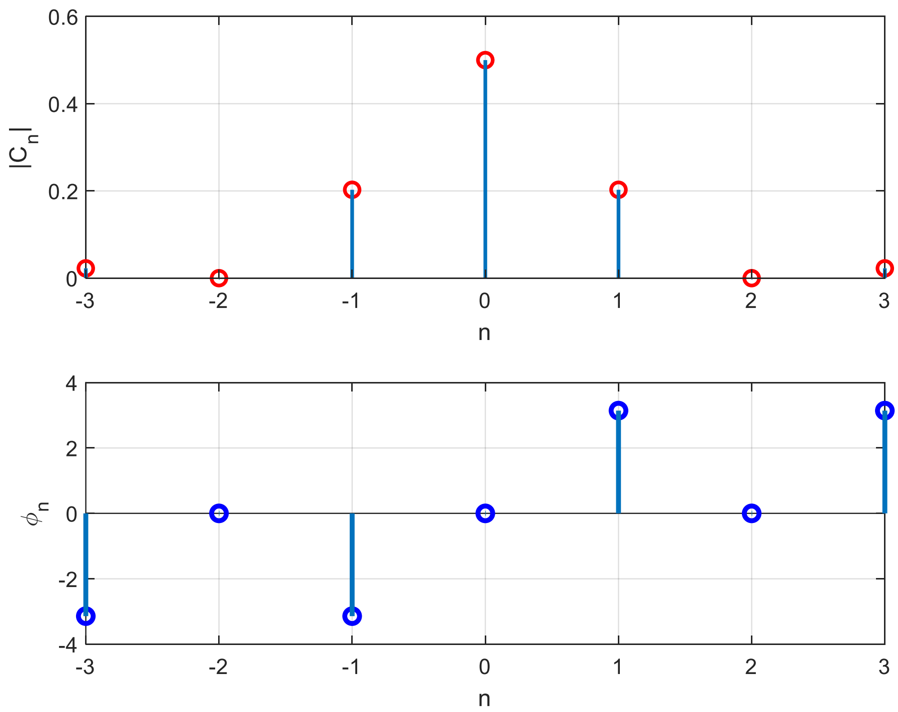
(Si C_n est nul alors φ_n est nul, si C_n est réel négatif alors $\varphi_n = \pm\pi$)

$$C_{-n} = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ \frac{-2}{(-n\pi)^2}\,, & n = 2k+1 \end{cases} \Longrightarrow \varphi_{-n} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \mp\pi, & n = 2k+1 \end{cases}$$

(Si C_{-n} est nul alors φ_{-n} est nul, si C_{-n} est réel négatif alors $\varphi_{-n} = \mp\pi$)

Le spectre de phase est impair donc il faut choisir $\varphi_n = -\varphi_{-n}$

n	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$\|C_n\|$	...	$\frac{2}{9\pi^2}$	0	$\frac{2}{\pi^2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi^2}$	0	$\frac{2}{9\pi^2}$	...
φ_n	...	$-\pi$	0	$-\pi$	0	π	0	π	...



Spectres unilatéraux :

$$P_0 = \frac{1}{2} \Longrightarrow |P_0| = \frac{1}{2}$$

$$P_n = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ \frac{4}{(n\pi)^2}\,, & n = 2k+1 \end{cases} \Longrightarrow |P_n| = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{n^2\pi^2}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta_0 = 0$$

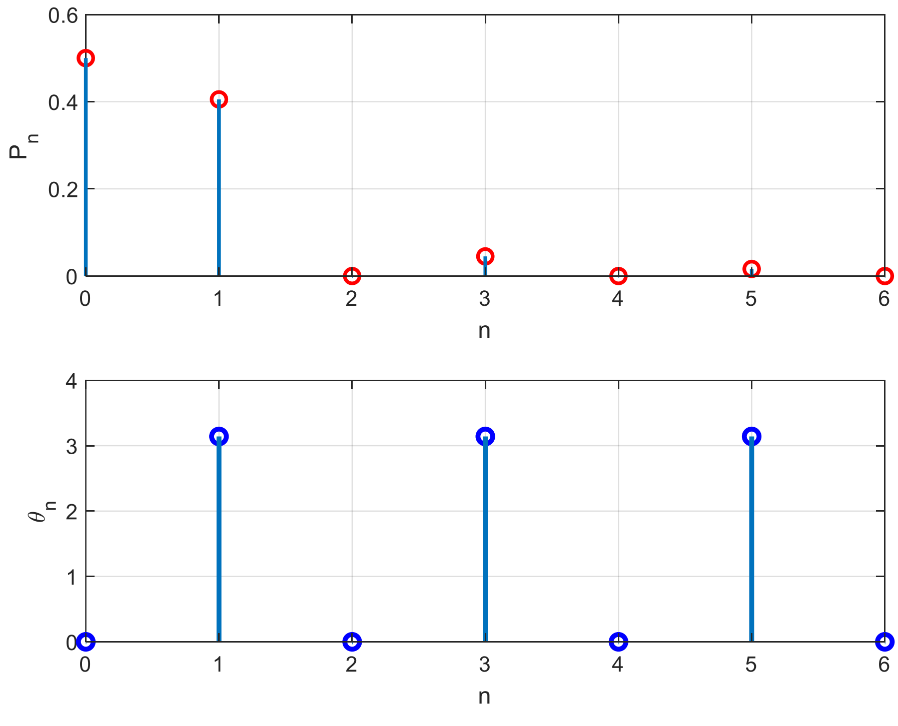
$$\theta_n = Arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$a_n = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ \frac{-4}{(n\pi)^2}\,, & n = 2k+1 \end{cases} \text{ et } b_n = 0$$

$$P_n = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ \frac{4}{(n\pi)^2}\,, & n = 2k+1 \end{cases}$$

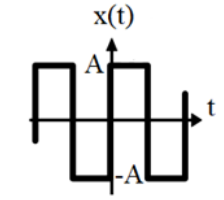
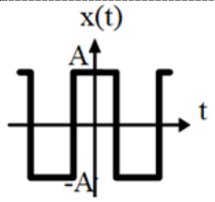
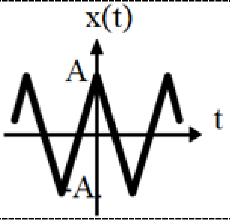
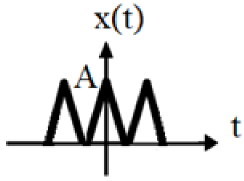
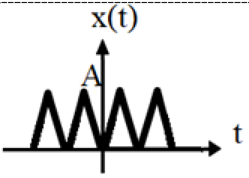
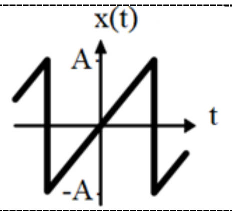
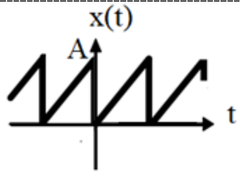
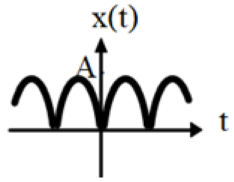
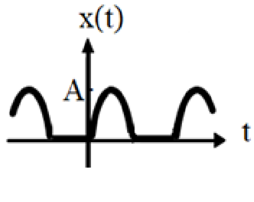
$$\begin{cases} \cos(\theta_n) = \frac{a_n}{P_n} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -1, & n = 2k+1 \end{cases} \\ \sin(\theta_n) = \frac{b_n}{P_n} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \theta_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \pi, & n = 2k+1 \end{cases}$$

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**...**
P_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{\pi^2}$	0	$\frac{4}{9\pi^2}$	0	$\frac{4}{25\pi^2}$	0	$\frac{4}{49\pi^2}$	0
θ_n	0	π	0	π	0	π	0	π	...



II.5. Série de Fourier de quelques signaux périodiques

Les séries de Fourier de certains signaux périodiques sont présentées dans le tableau suivant :

Signal x(t)	**Expression de x(t)**	**Série de Fourier (Forme Trigonométrique)**
	$\begin{cases} A; & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ -A; & \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$	$x(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin(2\pi(2k+1)f_0 t)$
	$\begin{cases} A; & -\frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{4} \\ -A; & \frac{T}{4} \le t \le \frac{3T}{4} \end{cases}$	$x(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cos(2\pi(2k+1)f_0 t)$
	$\begin{cases} -\frac{4A}{T} t + A; & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ \frac{4A}{T} t + A; & -\frac{T}{2} \le t \le 0 \end{cases}$	$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2\pi(2k+1)f_0 t)$
	$\begin{cases} -\frac{2A}{T} t + A; & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ \frac{2A}{T} t + A; & -\frac{T}{2} \le t \le 0 \end{cases}$	$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2\pi(2k+1)f_0 t)$
	$\begin{cases} -\frac{2A}{T} t; & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ \frac{2A}{T} t; & -\frac{T}{2} \le t \le 0 \end{cases}$	$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2\pi(2k+1)f_0 t)$
	$\frac{2A}{T} t; \quad -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$	$x(t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(2\pi k f_0 t)$
	$\frac{A}{T} t; \quad 0 \le t \le T$	$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi k f_0 t)$
	$\lvert A.\sin(\omega_0 t)\rvert; \quad 0 \le t \le T$	$x(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2\pi 2k f_0 t)$
	$\begin{cases} A.\sin(\omega_0 t); & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 \quad ; & \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$	$x(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin(2\pi f_0 t) - \frac{A}{\pi} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\left((-1)^k + 1\right)}{k^2 - 1} \cos(2\pi k f_0 t)$

III. Transformée de Fourier

La transformée de Fourier s'applique aux signaux non périodiques (signaux d'énergie finie), elle effectue le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel.

III.1. Définition

On définit la transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ par :

$$TF\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

La transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$TF^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df$$

$$x(t) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Condition d'existence :

La T.F existe si la condition de Dirichlet est vérifiée (suffisante et non nécessaire) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| < \infty$$

❖ **Spectres de module et de phase**

$X(f)$ est une fonction de f, généralement complexe :

$$X(f) = Re\{X(f)\} + Im\{X(f)\} = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$$

$$X(f) = |X(f)|\cos\big(\varphi(f)\big) + j.|X(f)|\sin\big(\varphi(f)\big)$$

Où : $|X(f)|$ et $\varphi(f)$ sont respectivement le module et la phase de $X(f)$ avec :

$$|X(f)| = \sqrt{(Re\{X(f)\})^2 + (Im\{X(f)\})^2}$$

$$\varphi(f) = Arctg\left(\frac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}\right)$$

Le spectre de module est pair et le spectre de phase est impair.

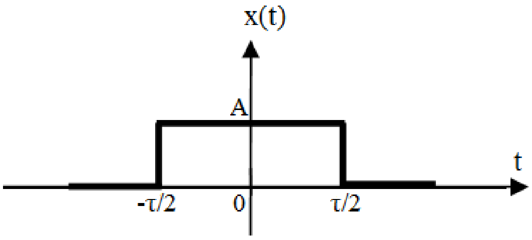
Exemple :

Calculer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ puis tracer leurs spectres de module et de phase :

$$x(t) = A.rect\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Solution :

$$x(t) = A.rect\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$



On calcule la transformée de Fourier du signal $x(t)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} Ae^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$= \frac{-A}{j2\pi f}.\,e^{-j2\pi ft}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{-A}{j2\pi f}.\left(e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}} - e^{+j2\pi f\frac{\tau}{2}}\right)$$

$$= \frac{A}{j2\pi f}.\left(e^{j\pi f\tau} - e^{-j\pi f\tau}\right)$$

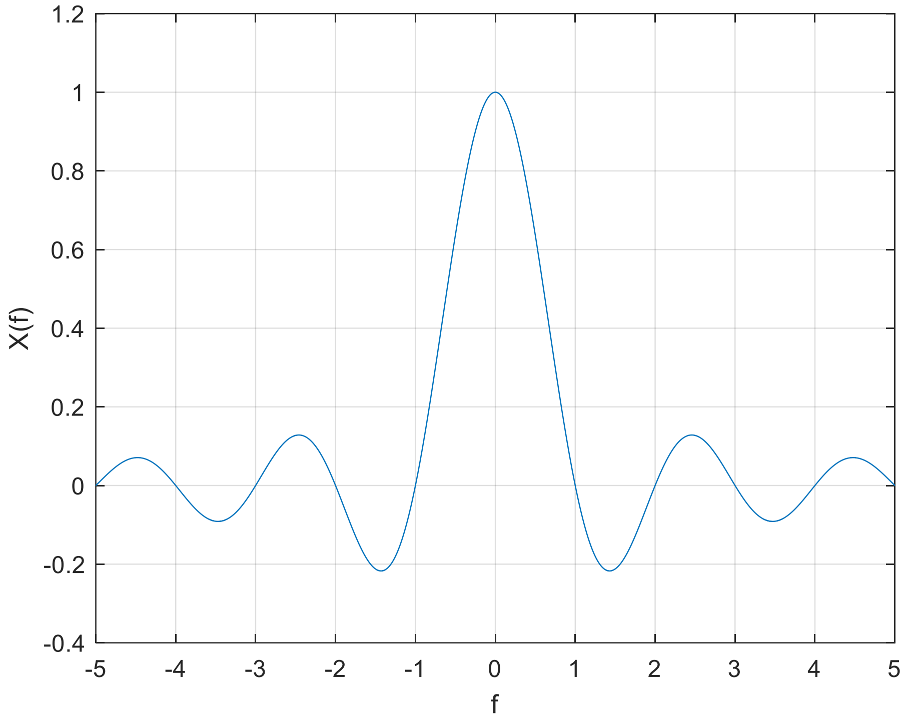
$$= \frac{A}{\pi f}.\frac{\left(e^{j\pi f\tau} - e^{-j\pi f\tau}\right)}{2j}$$

$$= \frac{A}{\pi f}.\sin(\pi f\tau) \qquad .\frac{\tau}{\tau}$$

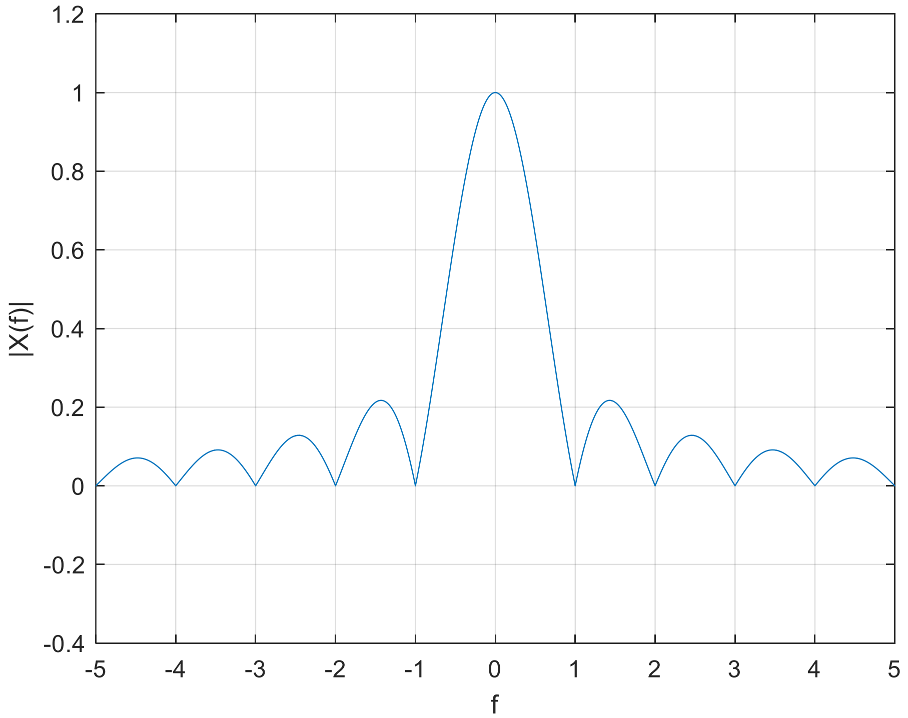
$$= A\tau.\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$$

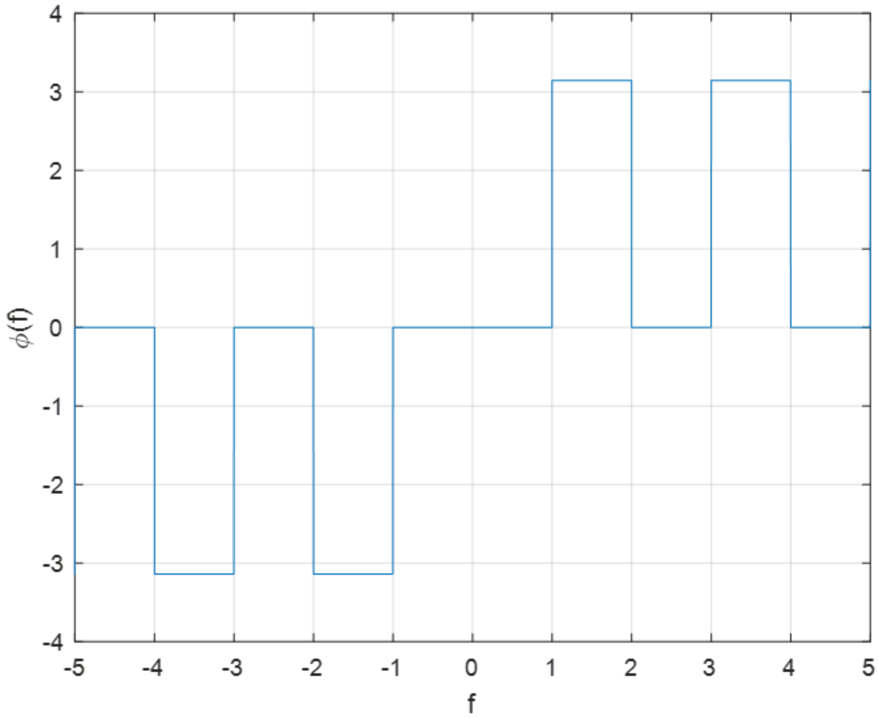
$$X(f) = A\tau.\mathrm{sinc}(f\tau)$$

Si : $A = \tau = 1 \implies X(f) = \mathrm{sinc}(f)$



Spectres de module et de phase :





Cas particuliers :

$$TF\{\delta(t)\} = 1$$

$$TF\{1\} = \delta(f)$$

$$TF\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0}$$

$$TF\{e^{\pm j2\pi f_0 t}\} = \delta(f \mp f_0)$$

Exemple :

Calculer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ puis tracer leurs spectres de module et de phase :

$$x(t) = A.\cos(2\pi f_0 t)$$

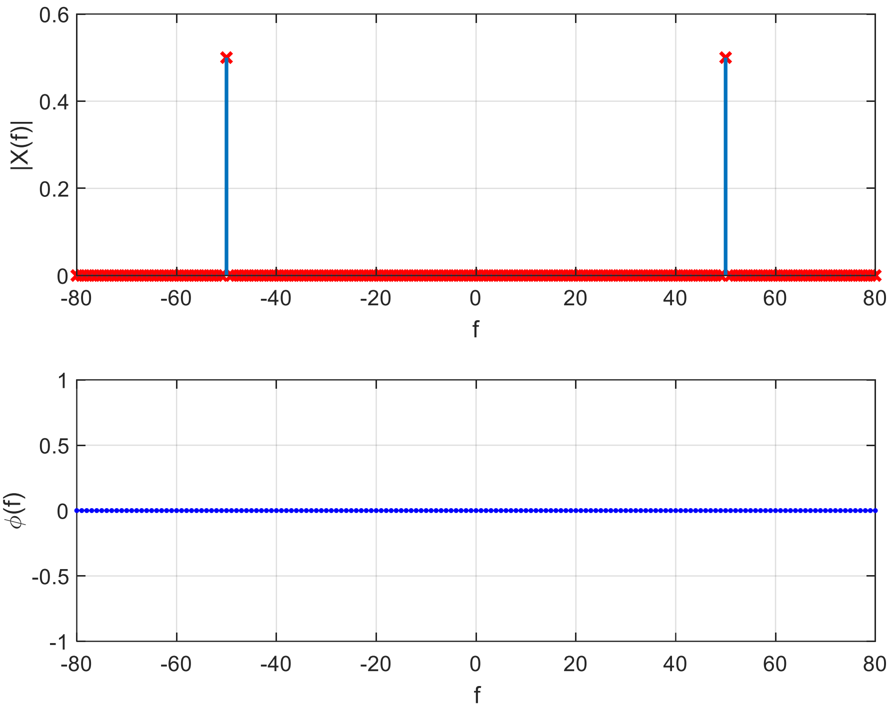
Solution :

$$x(t) = A.\cos(2\pi f_0 t) = A\left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)$$

$$X(f) = \frac{A}{2} TF\{e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{A}{2} TF\{e^{-j2\pi f_0 t}\}$$

$$X(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)$$

On prend : $A = 1$ et $f_0 = 50\ Hz$:



III.2. Propriétés de la transformée de Fourier

- Linéarité :

$$\alpha . x(t) + \beta . y(t) \xrightarrow{T.F} \alpha . X(f) + \beta . Y(f)$$

- Translation temporelle :

$$x(t - t_0) \xrightarrow{T.F} e^{-j2\pi f t_0} . X(f)$$

- Translation fréquentielle :

$$X(f - f_0) \xrightarrow{T.F^{-1}} e^{j2\pi f_0 t} . x(t)$$

- Conjugaison :

$$x^*(\pm t) \xrightarrow{T.F} X^*(\mp f)$$

- Dérivation temporelle :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{T.F} (j2\pi f)^n . X(f)$$

- Dérivation fréquentielle :

$$\frac{d^n X(f)}{df^n} \xrightarrow{T.F^{-1}} (-j2\pi t)^n . x(t)$$

- Intégration temporelle :

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \xrightarrow{T.F} \frac{1}{j2\pi f}.X(f) + \frac{1}{2}.X(0).\delta(f)$$

- Intégration fréquentielle :

$$\int_{-\infty}^{f} X(f)df \xrightarrow{T.F^{-1}} \frac{-1}{j2\pi t}.x(t)$$

- Changement d'échelle :

$$x(at) \xrightarrow{T.F} \frac{1}{|a|}.X\left(\frac{f}{a}\right), \quad a \neq 0$$

- L'inverse :

$$x(-t) \xrightarrow{T.F} X(-f)$$

- Dualité (symétrie) :

$$X(t) \xrightarrow{T.F} x(-f)$$

- Convolution :

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{T.F} X(f).Y(f)$$

$$x(t).y(t) \xrightarrow{T.F} X(f) * Y(f)$$

Exemple 1 :

Soit le signal analogique suivant : $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ avec :

$$x_1(t) = e^{-t}.u(t) \quad \& \quad x_2(t) = e^{t}.u(-t)$$

1. Représenter les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

2. Calculer la transformée de Fourier du signal $x(t)$.

3. Tracer le spectre de module et de phase du signal $x(t)$.

Solution :

1. Représentation graphique des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$x_1(t) = e^{-t}.u(t) = \begin{cases} e^{-t}; t \geq 0 \\ 0 ; \quad t < 0 \end{cases}$$

$$x_2(t) = e^t.u(-t) = \begin{cases} 0 & ; t \geq 0 \\ e^t ; & t < 0 \end{cases}$$

2. La transformée de Fourier du signal $x(t)$:

En utilisant la propriété de la linéarité : $\alpha.x(t) + \beta.y(t) \xrightarrow{T.F} \alpha.X(f) + \beta.Y(f)$, donc :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j2\pi ft} \, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}.e^{-j2\pi ft} \, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(1+j2\pi f)t} \, dt$$

$$= \frac{-1}{1+j2\pi f}.e^{-(1+j2\pi f)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{1+j2\pi f}.(0-1)$$

$$X_1(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

On voit que $x_2(t) = x_1(-t)$, donc on utilise la propriété de l'inverse : $x(-t) \xrightarrow{T.F} X(-f)$

$$X_2(f) = X_1(-f)$$

$$X_2(f) = \frac{1}{1+j2\pi(-f)}$$

$$X_2(f) = \frac{1}{1-j2\pi f}$$

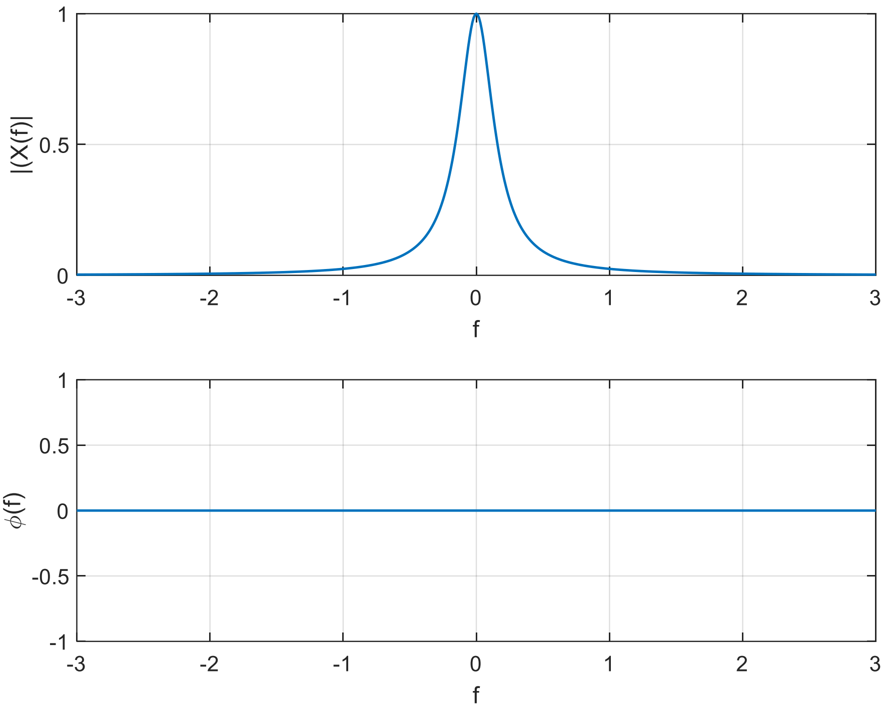
$$X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{1-j2\pi f}$$

$$X(f) = \frac{1-j2\pi f+1+j2\pi f}{(1+j2\pi f)(1-j2\pi f)}$$

$$X(f) = \frac{2}{1+4\pi^2 f^2}$$

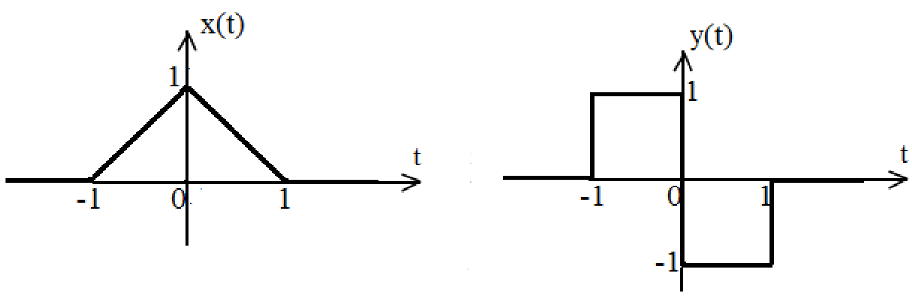
3. Spectre de module et de phase du signal $x(t)$.

$X(f)$ est purement réel positif alors $|X(f)| = X(f)$ et $\varphi = 0$.



Exemple 2 :

Soit les deux signaux analogiques $x(t)$ et $y(t)$ représentés par les figures ci-dessous :



1. Trouver la relation mathématique liant $y(t)$ à $x(t)$.

2. En utilisant les propriétés de la T.F et sachant que : $TF\left\{A.rect\left(\frac{t}{\tau}\right)\right\} = A\tau.sinc(\tau f)$, calculer $X(f)$ et $Y(f)$ les transformées de Fourier respectives de $x(t)$ et $y(t)$.

Solution :

1. Relation mathématique liant $y(t)$ à $x(t)$:

On voit que : $x(t) = \int y(t)\,dt$, ou bien : $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

2. $X(f)$ et $Y(f)$:

On a : $TF\left\{A.rect\left(\frac{t}{\tau}\right)\right\} = A\tau.sinc(\tau f) \Longrightarrow TF\{rect(t)\} = sinc(f)$

$$y(t) = rect\left(t + \frac{1}{2}\right) - rect\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

En utilisant la propriété de décalage : $x(t - t_0) \xrightarrow{T.F} e^{-j2\pi f t_0}.X(f)$

$$Y(f) = e^{+j2\pi f\frac{1}{2}}.sinc(f) - e^{-j2\pi f\frac{1}{2}}.sinc(f)$$

$$= \left(e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}\right).sinc(f)$$

$$= (2j.\sin(\pi f)).sinc(f) \quad .\frac{\pi f}{\pi f}$$

$$= j2\pi f.sinc(f).sinc(f)$$

$$Y(f) = j2\pi f.sinc^2(f)$$

$$x(t) = \int y(t)\,dt$$

En utilisant la propriété de l'intégral : $\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \xrightarrow{T.F} \frac{1}{j2\pi f}.X(f) + \frac{1}{2}.X(0).\delta(f)$

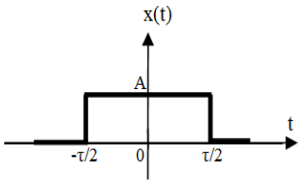
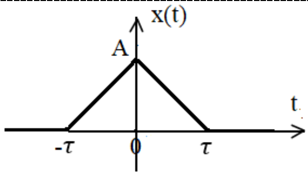
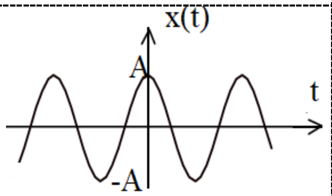
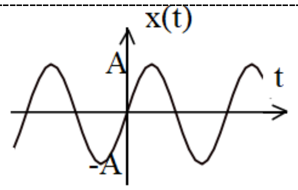
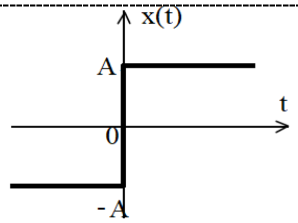
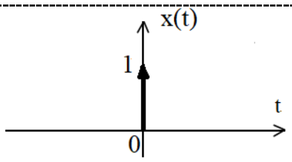
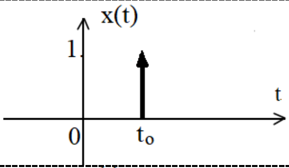
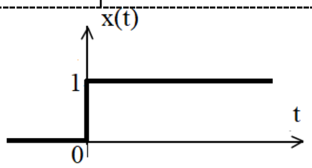
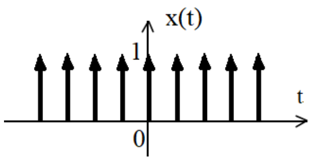
$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f}.Y(f) + \frac{1}{2}.\cancelto{0}{Y(0)}.\delta(f)$$

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f}.j2\pi f.sinc^2(f)$$

$$X(f) = sinc^2(f)$$

III.3. Transformée de Fourier de quelques signaux

Les transformées de Fourier de certains signaux sont présentées dans le tableau suivant :

Signal x(t)	Expression de x(t)	Transformée de Fourier
	$A.rect\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$A\tau.sinc(\tau f)$
	$A.tri\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$A\tau.sinc^2(\tau f)$
	$\mathrm{A}.\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{A}{2}.\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}.\delta(f+f_0)$
	$\mathrm{A}.\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{A}{2j}.\delta(f-f_0)-\frac{A}{2j}.\delta(f+f_0)$
	$A.sgn(t)$	$\frac{A}{j\pi f}$
	$\delta(t)$	1
	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
	$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)$	$\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-kf_0)$

IV. Théorème de Parseval

IV.1. Théorème de Parseval pour la série de Fourier (signaux périodiques)

Soit un signal périodique $x(t)$ décomposable en série de Fourier Trigonométrique :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

La puissance moyenne de $x(t)$:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t).x(t)dt$$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T A_0.x(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\left[\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]\right]dt$$

$$P_x = A_0.\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

$$P_x = A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n^2}{2}$$

$$P_x = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

C'est la forme trigonométrique de l'égalité de Parseval.

$$P_x = P_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} P_n^2$$

C'est la forme polaire de l'égalité de Parseval.

La forme complexe :

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t).x^*(t)dt$$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{jn\omega t}\right].x^*(t)dt$$

$$P_x = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_0^T x^*(t).\, e^{jn\omega t} dt$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \overline{x(t).\, e^{-jn\omega t}} dt$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \,.\, \overline{C_n}$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^2$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{-1} |C_n|^2 + |C_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2$$

$$P_x = \sum_{n=1}^{+\infty} |C_{-n}|^2 + |C_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2$$

Si $x(t)$ est réel : $|C_n| = |C_{-n}|$

$$P_x = |C_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2$$

C'est la forme complexe de l'égalité de Parseval.

Exemple :

En utilisant les trois formes du théorème de Parseval pour les signaux périodiques, calculer la puissance moyenne du signal suivant :

$$x(t) = A.\cos^2(\omega t)\ ;\ A = 1, T = 1s$$

Solution :

La forme trigonométrique :

On a trouvé : $A_0 = \frac{A}{2}$; $a_2 = \frac{A}{2}$; $b_n = 0$ et $a_n = 0, \forall\, n \neq 2$

$$P_x = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$P_x = A_0^2 + \frac{1}{2} a_2^2$$

$$P_x = \frac{3}{8}\ Watt$$

La forme polaire :

On a trouvé : $P_0 = \frac{A}{2}$; $P_2 = \frac{A}{2}$; $\theta_2 = 0$ et $P_n = 0, \forall\, n \neq 2$; $\theta_n = 0$

$$P_x = P_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} P_n^2$$

$$P_x = P_0^2 + \frac{1}{2}P_2^2$$

$$P_x = \frac{3}{8}\ Watt$$

La forme complexe :

On a trouvé : : $C_{-2} = C_2 = \frac{A}{4}$; $C_0 = \frac{A}{2}$ et $C_n = 0\ \forall\, n \neq \pm 2$

$$P_x = |C_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2$$

$$P_x = |C_0|^2 + 2|C_2|^2$$

$$P_x = \frac{3}{8}\ Watt$$

IV.2. Théorème de Parseval pour la transformée de Fourier (signaux apériodiques)

L'énergie d'un signal $x(t)$ est :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{-\infty} x(t).x^*(t)dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\, df$$

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)e^{-j2\pi ft}\, df$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)e^{-j2\pi ft}\, df.dt$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f). \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\, dt. df$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f). X(f). df$$

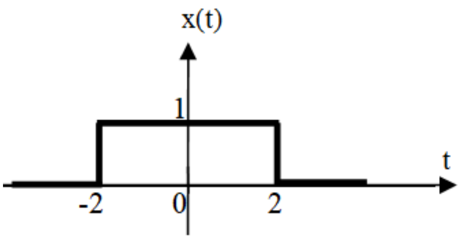
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2. df$$

C'est l'énergie fréquentielle du signal $x(t)$.

$|X(f)|^2$: s'appelle la densité spectrale d'énergie du signal $x(t)$.

Exemple :

En utilisant le théorème de Parseval pour les signaux non périodiques, calculer l'énergie du signal représenté ci-contre puis déduire sa densité spectrale d'énergie DSE.



Solution :

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right)$$

On a : $TF\left\{A.rect\left(\frac{t}{\tau}\right)\right\} = A\tau. sinc(\tau f) \Longrightarrow\; TF\left\{rect\left(\frac{t}{4}\right)\right\} = 4. sinc(4f)$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 16. sinc^2(4f)\, df$$

L'une des propriétés de la fonction sinus cardinal est : $\int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(f)\, df = 1$

On pose : $f' = 4f \Longrightarrow df = \frac{1}{4} df'$

$$E_x = \frac{16}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(f')\, df'$$

$$E_x = 4\, Joules$$

$$DSE = |X(f)|^2$$

$$DSE = 16. sinc^2(4f).$$