Chapitre I

Classification et représentation des signaux

I. Introduction

Le traitement du signal est une discipline indispensable de nos jours. Il a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'informations. Son but est donc de réussir à extraire un maximum d'information utile sur un signal perturbé par du bruit en s'appuyant sur les ressources de l'électronique et de l'informatique.

II. Définitions

II.1. Signal

Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Sa nature physique peut être très variable : acoustique, électronique, optique, etc. Mathématiquement, les signaux sont représentés par une fonction d'une variable généralement le temps. En physique, on s'intéresse qu'au temps $t \geq 0$ (signal causal), alors qu'en mathématiques, on peut définir des temps $t \in]-\infty, +\infty[$.

II.2. Bruit

Un bruit est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.).

II.3. Théorie du signal

La théorie du signal est l'ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire les signaux et les bruits émis par une source, ou modifiés par un système de traitement.

II.4. Traitement du signal

C'est la discipline technique qui, s'appuyant sur les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliqué, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs de l'information. Son application se situe dans tous les domaines concernés par la transmission ou l'exploitation des informations transporter par ces signaux. Un système de mesure a de façon générale la structure de la figure (I.1) ci-dessous, le phénomène physique que l'on veut étudier est présenté à un capteur qui le transforme en un signal électrique tension ou courant, à ce niveau un bruit s'ajoute. Le signal transmit à travers le canal de transmission atteint le récepteur, puis il subit un traitement pour extraire l'information utile sans bruit.

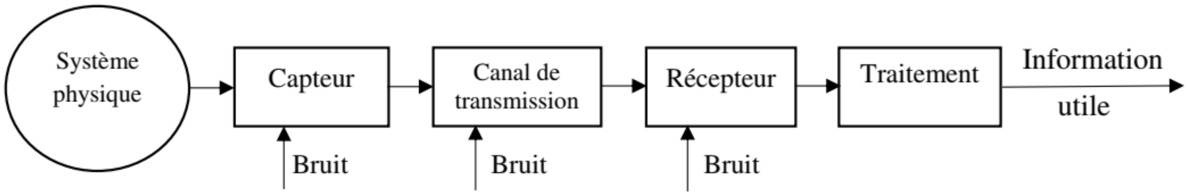


Figure (I.1) : Chaine de transmission d'un signal

III. Classification des signaux

Il existe plusieurs modes de classification pour les signaux suivant leurs propriétés.

III.1. Classification phénoménologique

Cette classification est basée sur l'évolution du signal en fonction du temps, on trouve deux types fondamentaux :

III.1.1. Signaux déterministes

Ce sont des signaux où leurs évolutions en fonction du temps peut être parfaitement modélisé par une fonction mathématique. On retrouve dans cette classe les signaux périodiques, les signaux transitoires, les signaux pseudo-aléatoires, etc…

III.1.2. Signaux aléatoires

Ce sont des signaux où leur comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les décrire. Si leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, on dit qu'ils sont stationnaires.

Exemples :

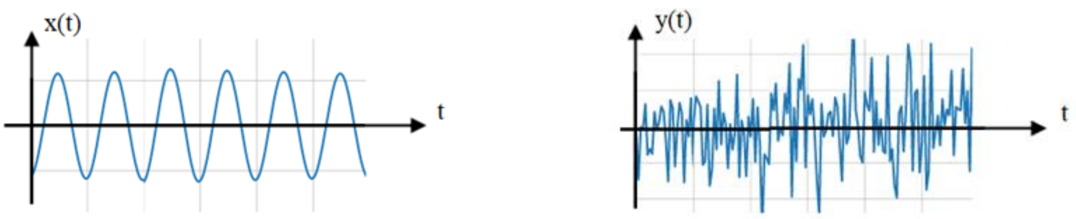


Figure (I.2) : Exemples du classification phénoménologiques des signaux

$x(t)$ est un signal déterministe (sinusoïde) et $y(t)$ est un signal aléatoire.

III.2. Classification morphologique

On distingue les signaux à temps continu des signaux à temps discret ainsi que ceux dont l'amplitude est discrète ou continue, on obtient donc 4 classes de signaux :

III.2.1. Signaux analogiques

Ils sont des signaux dont l'amplitude et le temps sont continus.

III.2.2. Signaux quantifiés

Ils sont des signaux dont l'amplitude est discrète et le temps est continu.

III.2.3. Signaux échantillonnés

Ils sont des signaux dont l'amplitude est continue et le temps est discret.

III.2.4. Signaux numériques

Ils sont des signaux dont l'amplitude et le temps sont discrets.

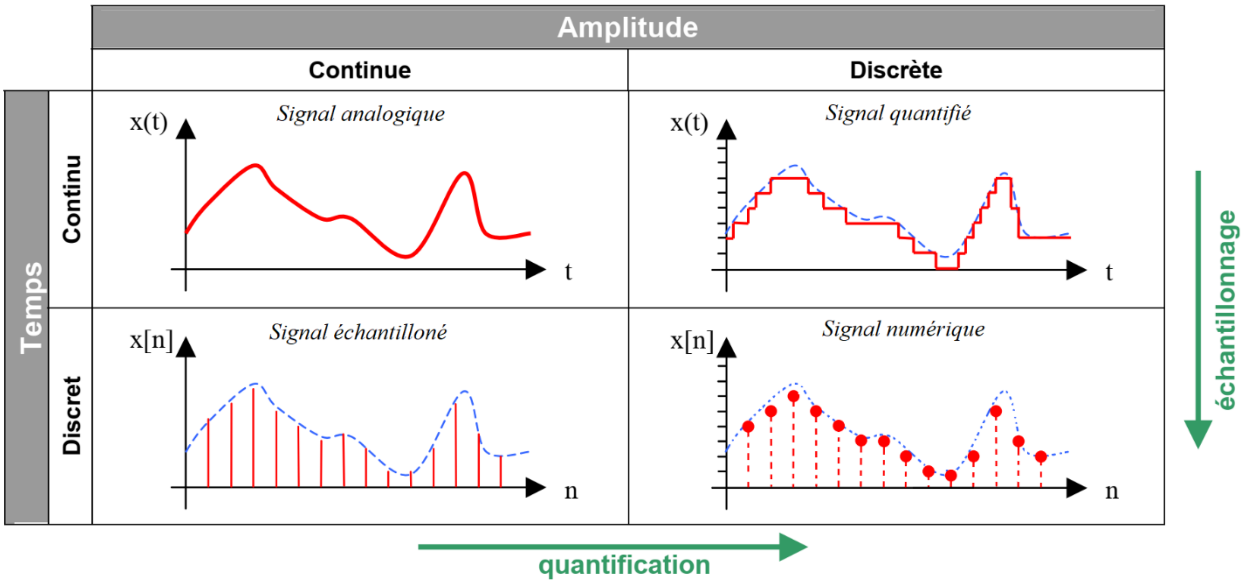


Figure (I.3) : Classification morphologique des signaux

III.3. Classification énergétique

On considère l'énergie des signaux, on distingue :

III.3.1. Signaux à énergie finie

Ils possèdent une énergie finie et une puissance moyenne nulle, ce sont des signaux réalisables.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

III.3.2. Signaux à puissance moyenne finie

Ils possèdent une puissance moyenne finie et une énergie infinie, ils sont donc physiquement irréalisables.

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

Si le signal est périodique :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

*** Règle de calcul :**

On calcul l'énergie E du signal $x(t)$, si cette énergie est finie $(E < \infty)$, alors le signal $x(t)$ est un signal à énergie finie, sinon on calcul la puissance moyenne P, si $P < \infty$, le signal $x(t)$ est un signal à puissance moyenne finie. Si $E = P = \infty$, on dit que le signal $x(t)$ est un signal n'est à énergie finie, n'est à puissance moyenne finie.

Exemples :

1. $x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

$= \int_0^{+\infty} (e^{-t})^2 dt$

$= \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt$

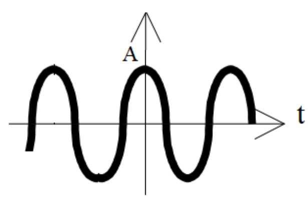
$= -\frac{1}{2} [e^{-2t}|_0^{\infty}]$

$= -\frac{1}{2} [(0 - 1)]$

$E = \frac{1}{2} < \infty$

Le signal $x(t)$ est un signal à énergie finie.

2. $y(t) = A.\cos(\omega_0 t)$



$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A.\cos(\omega_0 t)\right)^2 dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 . \cos^2(\omega_0 t) dt$$

$$= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}\right) dt$$

$$= \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \cos(2\omega_0 t)\right) dt$$

$$= \frac{A^2}{2} \left(t + \frac{1}{2\omega_0} [\sin(2\omega_0 t)|_{-\infty}^{+\infty}]\right)$$

$$= \frac{A^2}{2} \left(\underbrace{t|_{-\infty}^{+\infty}}_{+\infty} + \frac{1}{2\omega_0} \underbrace{[\sin(2\omega_0 t)|_{-\infty}^{+\infty}]}_{-1 \leq \ \leq +1}\right)$$

$$E = +\infty$$

L'énergie du signal $y(t)$ est infinie, donc on calcul la puissance moyenne :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |y(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \left(A . \cos(\omega_0 t)\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T A^2 . \cos^2(\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{A^2}{T} \int_0^T \left(\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}\right) dt$$

$$= \frac{A^2}{2T} \int_0^T \left(1 + \cos(2\omega_0 t)\right) dt$$

$$= \frac{A^2}{2T} \left(t|_0^T + \frac{1}{2\omega_0} \left[\sin\left(2 \frac{2\pi}{T} t\right)\Big|_0^T \right]\right)$$

$$= \frac{A^2}{2T} \left((T - 0) + \frac{1}{2\omega_0} \underbrace{[\sin(4\pi) - \sin(0)]}_{=0}\right)$$

$$P = \frac{A^2}{2} < \infty$$

Le signal $y(t)$ est un signal à puissance moyenne finie.

III.4. Autres classifications

On peut trouver d'autres classifications importantes :

III.4.1. Signaux causals et signaux non causals

Un signal $x(t)$ est dit causal si et seulement si $x(t) = 0$, pour $t < 0$.

Exemples :

Figure (I.4) : Exemples des signaux causals et non causals

$x(t)$ est un signal causal et $y(t)$ est un signal non causal.

III.4.2. Signaux pairs et signaux impairs

Un signal réel est pair si, pour tout $t \in \mathcal{R}$, on a : $x(-t) = x(t)$. Graphiquement, il présente une symétrie horizontale par rapport à l'axe des ordonnées.

Un signal réel est impair si, pour tout $t \in \mathcal{R}$, on a : $x(-t) = -x(t)$. Graphiquement, il présente une symétrie par rapport à l'origine.

Exemples :

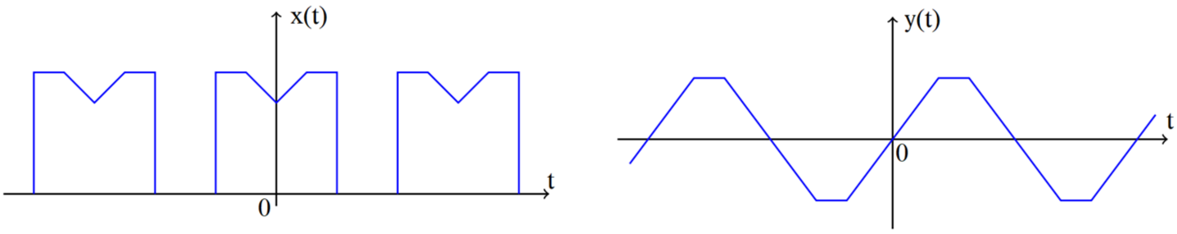


Figure (I.5) : Exemples des signaux pairs et impairs

$x(t)$ est un signal pair ($x(t) = x(-t)$) et $y(t)$ est un signal impair ($y(t) = -y(-t)$).

On peut remarquer qu'il est toujours possible de décomposer un signal $x(t)$ en une somme d'un signal pair $x_p(t)$ et d'un signal impair $x_i(t)$: $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$ avec :

$$\begin{cases} x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \\ x_i(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \end{cases}$$

Exemple :

Déterminer les parties paire et impaire du signal : $x(t) = 1 + t\cos(t) + t^3 \sin(t)\cos(t)$

La partie paire est : $x_p(t) = 1 + t^3 \sin(t)\cos(t)$, et la partie impaire est : $x_i(t) = t\cos(t)$

❖ **Propriétés**

Signal pair $\oplus$ signal pair $=$ signal pair.

Signal impair $\oplus$ signal impair $=$ signal impair.

Signal pair $\oplus$ signal impair $=$ signal ni pair ni impair.

Signal pair $\otimes$ signal pair $=$ signal pair.

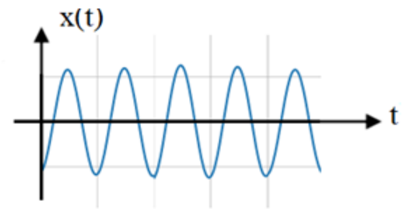
Signal impair $\otimes$ signal impair $=$ signal pair.

Signal pair $\otimes$ signal impair $=$ signal impair.

III.4.3. Signaux périodiques et signaux apériodiques

Un signal $x(t)$ est dit périodique s'il existe un réel $T > 0$, tel que : $x(t) = x(t + kT), \forall k \in \mathbb{Z}$.

Exemples :



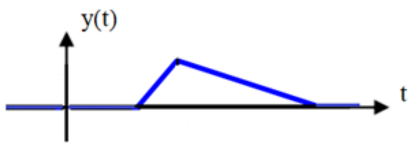


Figure (I.6) : Exemples des signaux périodiques et apériodiques

$x(t)$ est un signal périodique et $y(t)$ est un signal non périodique.

❖ **Combinaison de signaux périodiques**

La période commune d'une combinaison de sinusoïdes est la plus courte durée pendant laquelle chaque sinusoïde complète un nombre entier de cycles. C'est le plus petit commun multiple (PPCM) des périodes individuelles. On peut seulement trouver une période commune si le rapport entre les périodes est un nombre rationnel.

Exemple :

Trouver la période commune du signal suivant : $x(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$

La période de la première sinusoïde est : $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{0.25\pi} = 8s$.

La période de la première sinusoïde est : $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{0.5\pi} = 4s$.

La période commune est : $T = PPCM(4,8) = 8s$.

IV. Opérations sur les signaux

Les opérations sur les signaux (décalage, inversement, compression, dilatation) sont utiles dans le traitement du signal lors de l'application de la série de Fourier, ou les déférentes transformées (Fourier, Laplace, Z).

IV.1. Décalage temporel

Le décalage temporel est l'action d'avancer ou retarder un signal dans le temps. Mathématiquement, un signal décalé $y(t)$ est décrit selon :

$$y(t) = x(t')|_{t'=t-t_0} = x(t - t_0), t_0 \in \Re.$$

Si $t_0 > 0$, le signal $y(t)$ est une version retardée du signal original $x(t)$.

Si $t_0 < 0$, le signal $y(t)$ est une version avancée du signal original $x(t)$.

IV.2. Inversement temporelle

L'inversion temporelle est l'opération de faire une image miroir d'un signal par rapport à l'axe des ordonnées. Mathématiquement, le nouveau signal $y(t)$ est obtenu à partir du signal original $x(t)$ selon :

$$y(t) = x(t')|_{t'=-t} = x(-t).$$

IV.3. Compression ou dilatation temporelle

La compression ou la dilatation temporelle d'un signal original $x(t)$ est obtenu comme suit :

$$y(t) = x(t')|_{t'=\alpha t} = x(\alpha t), \alpha \in \Re^*.$$

Si $|\alpha| > 1$, le signal $y(t)$ est une version compressée du signal original $x(t)$.

Si $|\alpha| < 1$, le signal $y(t)$ est une version dilatée du signal original $x(t)$.

*** Règle générale :**

Pour tracer un signal d'équation générale : $y(t) = -at + b$, il faut suivre les étapes suivantes :

Mettez le coefficient a en facteur : $y(t) = a(-t + (b/a))$

Si on a le signe $(-)$, mettez-le en facteur : $y(t) = -a(t - (b/a))$

Inverser le signal si on a le signe $(-)$ puis enlevez-le : $y(t) = a(t - (b/a))$

Décalez le signal par (b/a).

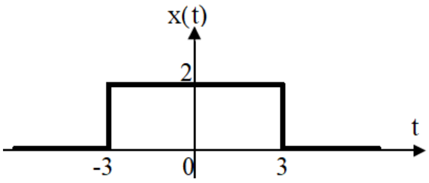
Compressez ou dilatez le signal ($t' = at$).

Exemples :

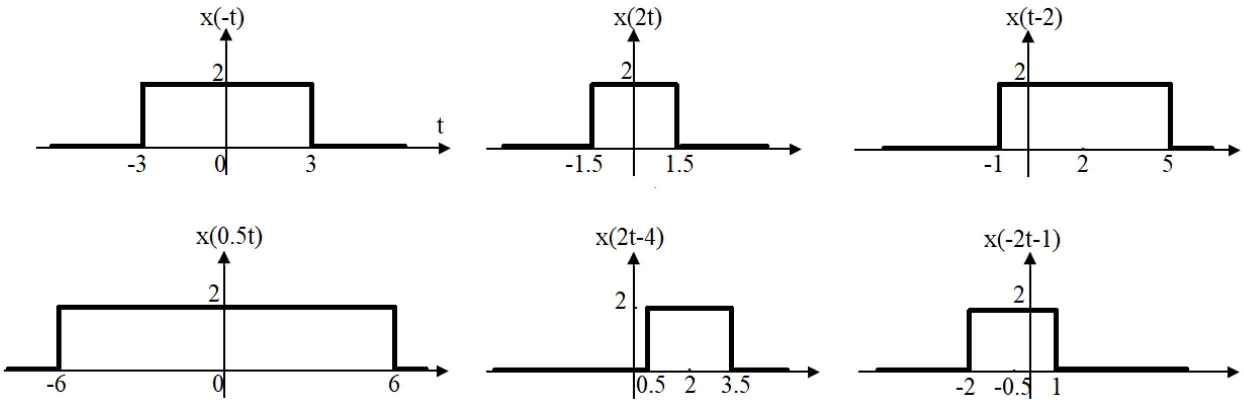
Soit le signal représenté sur la figure ci-contre :

Représenter graphiquement les signaux suivants :

$x(-t),\ x(2t),\ x(t-2),\ x(0.5t), x(2t-4), x(-2t-1)$



Solution :



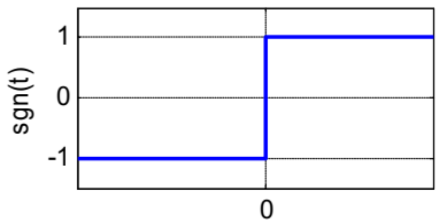
V. Signaux fondamentaux (particuliers)

Dans cette partie, nous présentons quelques signaux analogiques communs, qui apparaissent souvent en traitement du signal, et qui servent à approximer des signaux plus complexes.

V.1. Fonction signe

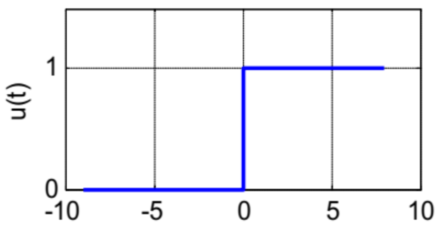
La fonction signe est définie par :

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ -1, t < 0 \end{cases} = \frac{t}{|t|}\ , t \neq 0$$



V.2. Fonction échelon unité (fonction d'Heaviside)

$$u(t) = \begin{cases} 1,\ \ t \geq 0 \\ 0,\ \ t < 0 \end{cases}$$

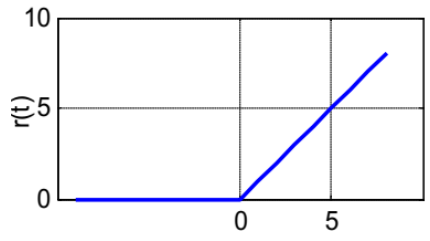


En générale :

$$A.u(t-t_0) = \begin{cases} A,\ \ t \geq t_0 \\ 0,\ \ t < t_0 \end{cases}$$

V.3. Fonction rampe

$$r(t) = t.u(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

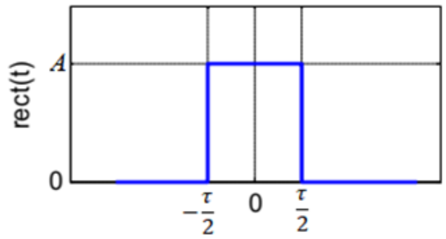


En générale :

$$A.r(t - t_0) = \begin{cases} A(t - t_0), & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

V.4. Fonction rectangle (porte)

$$A.rect\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$



En générale :

$$A.rect\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right) = \begin{cases} A, & t_0 - \frac{\tau}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{\tau}{2} \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

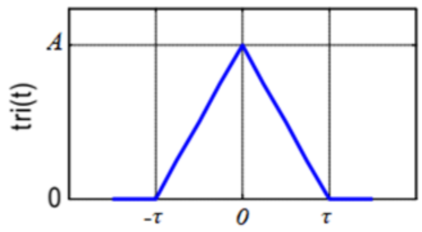
* Fonction rectangulaire périodique

On peut rendre la fonction rectangulaire en fonction rectangulaire périodique :

$$A.rect_T\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} + kT \leq t \leq \frac{\tau}{2} + kT \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

V.5. Fonction triangle

$$A.tri\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right), & -\tau \leq t \leq \tau \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

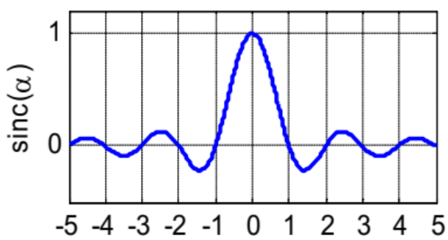


En générale :

$$A.tri\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t - t_0|}{\tau}\right), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 + \tau \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

V.6. Fonction sinus cardinal

$$sinc(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$$



❖ **Propriétés**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(t)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(t)\,dt = 1$$

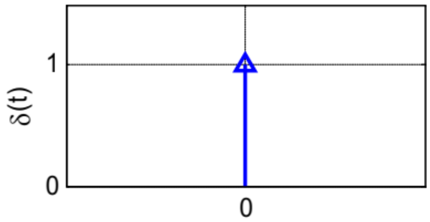
V.7. Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac correspond à une fonction porte dont la largeur τ tendrait vers 0 et dont l'aire est égale à 1.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$\delta(t)$ ne peut être représentée graphiquement, on la schématise par une flèche marquée par 1, ce dernier représente l'aire de cette impulsion et non sa hauteur.

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$



❖ **Propriétés**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t)\,dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

$$x(t).\delta(t) = x(0).\delta(t) = +\infty$$

$$x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0) = +\infty$$

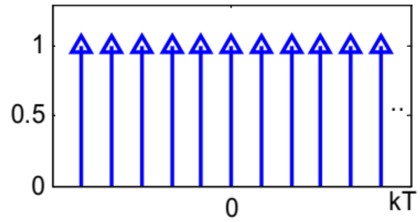
$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

V.8. Peigne de Dirac

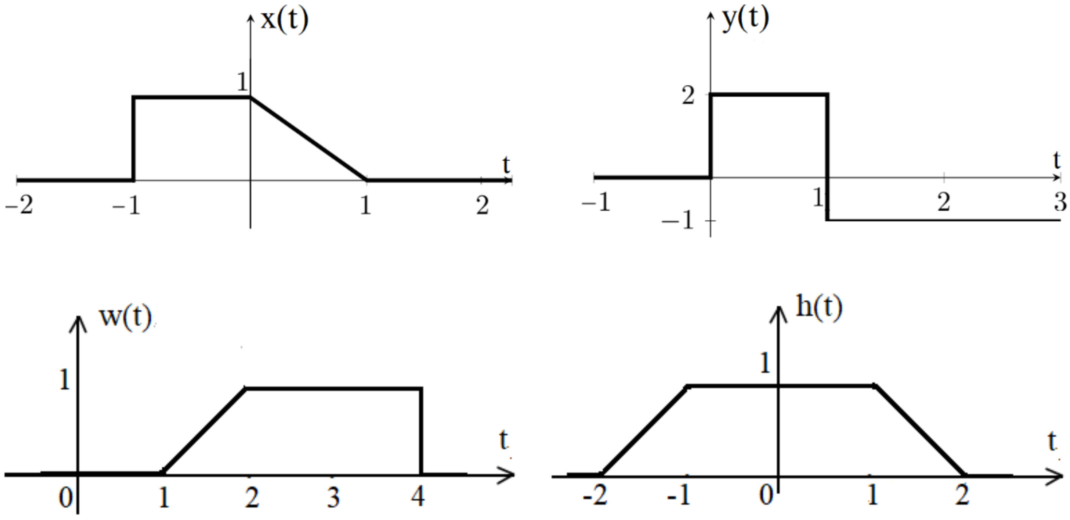
On appelle peigne de Dirac, une succession périodique d'impulsion de Dirac.

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \begin{cases} 1\,, & t = kT \\ 0\,, & ailleurs \end{cases}$$



Application :

Ecrire les signaux représentés ci-dessous en fonctions des signaux fondamentaux :



Solution :

$x(t) = u(t+1) - r(t) + r(t-1)$

$y(t) = 2u(t) - 3u(t-1)$

$w(t) = r(t-1) - r(t-2) - u(t-4)$

$h(t) = r(t+2) - r(t+1) - r(t-1) + r(t-2)$