

## Chapitre II

---

*Systemes, convolution et  
corrélation des signaux*

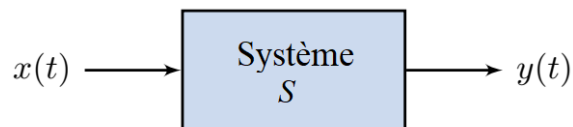
---

## I. Systèmes

### I.1. Définition

Un système est un modèle mathématique d'un processus physique, qui transforme un signal d'entrée (ou plusieurs signaux d'entrée) en un signal de sortie (ou plusieurs signaux de sortie). L'entrée du système s'appelle 'excitation' et la sortie s'appelle 'réponse'.

La Transformation  $T$  du système peut-être une équation mathématique, équation différentielle, opération algébrique, etc. On écrit :  $y(t) = T\{x(t)\}$ .



**Figure (II.1) :** Schéma fonctionnel d'un système

Exemple :

Un système multiplicateur :  $y(t) = A \cdot x(t)$

### I.2. Propriétés des systèmes

#### I.2.1. Linéarité

Un système  $S$  de transformation  $T$  est linéaire si et seulement s'il vérifié l'expression suivante :

$$\begin{aligned} T\{x(t)\} = y(t) &\Rightarrow T\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot T\{x_1(t)\} + b \cdot T\{x_2(t)\} \\ &= a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t) \end{aligned}$$

Exemples :

- $y(t) = A \cdot x(t)$

$$T\{x(t)\} = A \cdot x(t) = y(t)$$

$$\begin{aligned} T\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} &= A(a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)) \\ &= a \cdot A \cdot x_1(t) + b \cdot A \cdot x_2(t) \\ &= a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t) \end{aligned}$$

Donc ce système est linéaire.

- $y(t) = |x(t)|$

$$T\{x(t)\} = |x(t)| = y(t)$$

$$T\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = |a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)|$$

$$a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t) = a \cdot |x_1(t)| + b \cdot |x_2(t)|$$

$$\text{On a : } |a + b| \leq |a| + |b| \Rightarrow T\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} \neq a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

Donc ce système est non linéaire.

### I.2.2. Causalité

On dit qu'un système  $S$  est causal si et seulement s'il vérifié l'expression suivante :

$$\text{Si : } x(t) = 0 \text{ pour } t \leq t_0 \text{ alors : } y(t) = 0 \text{ pour } t \leq t_0$$

Un système est causal si la réponse  $y(t)$  à l'instant  $t = t_0$  ne dépend que des entrées  $x(t)$  aux instants  $t \leq t_0$ , c.à.d. la sortie ne doit pas précéder l'entrée.

Exemples :

$$1. \quad y(t) = A \cdot x(t)$$

$$\text{Si : } x(t) = 0 \text{ pour } t \leq t_0 \text{ alors : } y(t) = A \cdot x(t) = 0 \text{ pour } t \leq t_0$$

Donc ce système est causal.

$$2. \quad y(t) = x(t + 2)$$

$$\text{Si : } x(t) = 0 \text{ pour } t \leq t_0 \text{ alors : } y(t) = x(t + 2) \neq 0 \text{ pour } t \leq t_0$$

Donc ce système est non causal.

### I.2.3. Invariance dans le temps (stationnarité)

On dit qu'un système  $S$  est invariant dans le temps (stationnaire) si et seulement s'il vérifié l'expression suivante :

$$T\{x(t)\} = y(t) \Rightarrow T\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0)$$

Un système est invariant dans le temps si un décalage temporel à l'entrée conduit à un décalage temporel de même valeur à la sortie.

Exemples :

$$1. \quad y(t) = A \cdot x(t)$$

$$T\{x(t)\} = A \cdot x(t) = y(t) \Rightarrow T\{x(t - t_0)\} = A \cdot x(t - t_0) = y(t - t_0)$$

Donc ce système est invariant dans le temps.

$$2. \quad y(t) = t.x(t)$$

$$T\{x(t)\} = t.x(t) = y(t) \Rightarrow T\{x(t - t_0)\} = t.x(t - t_0)$$

$$y(t - t_0) = (t - t_0).x(t - t_0)$$

$$T\{x(t - t_0)\} \neq y(t - t_0)$$

Donc ce système est variant dans le temps.

#### I.2.4. Stabilité

On dit qu'un système  $S$  est stable si et seulement s'il vérifié l'expression suivante :

$$\exists \alpha \in \mathcal{R}^* : |x(t)| \leq \alpha \Rightarrow \exists \beta \in \mathcal{R}^* : |y(t)| = |T\{x(t)\}| \leq \beta$$

Un système est stable si en réponse à une entrée bornée, sa sortie est bornée.

#### Exemples :

$$1. \quad y(t) = 3.x(t)$$

$$\exists \alpha \in \mathcal{R}^* : |x(t)| \leq \alpha \Rightarrow \exists \beta \in \mathcal{R}^* : |y(t)| = |3.x(t)| \leq \beta$$

Donc ce système est stable.

$$2. \quad y(t) = t.x(t)$$

$$\exists \alpha \in \mathcal{R}^* : |x(t)| \leq \alpha \Rightarrow \nexists \beta \in \mathcal{R}^* : |y(t)| = |t.x(t)| \leq \beta$$

Donc ce système est instable.

#### Remarque :

On dit qu'un système  $S$  est un système *LIT* s'il est Linéaire et Invariant dans le Temps.

#### Exercice :

Etudier la linéarité, la causalité, la stabilité et l'invariance dans le temps du système suivant :

$$y(t) = x^2(t)$$

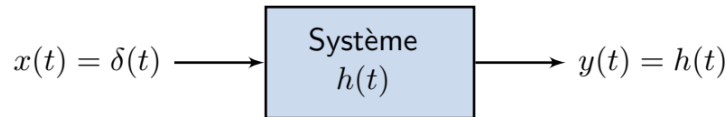
#### Solution :

Le système décrit ci-dessus est non linéaire, causal, stable et invariant dans le temps (stationnaire), donc ce n'est pas un système *LIT*.

## II. Convolution

### II.1. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle  $h(t)$  d'un système *LIT* est définie comme la réponse du système pour l'entrée impulsion de Dirac  $\delta(t)$ . La réponse impulsionnelle est une caractéristique très importante en traitement du signal.



**Figure (II.2) :** Schéma fonctionnel d'un système de réponse impulsionnelle

### II.2. Produit de convolution

#### II.2.1. Définition

Le signal de sortie d'un système *LIT* est obtenu par une opération entre l'entrée  $x(t)$  de ce système et sa réponse impulsionnelle  $h(t)$ , cette opération est appelée : la convolution. C'est l'outil la plus fondamentale du traitement du signal, elle est donnée par :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

#### II.2.2. Calcul de la convolution

Pour calculer le produit de convolution entre deux signaux analogiques  $x(t)$  et  $h(t)$ , on suit les étapes suivantes :

- Traçage des signaux  $x(t)$  et  $h(t)$  avec changement de variable  $t \rightarrow \tau$  :  $x(\tau)$  et  $h(\tau)$ .
- Fixation du signal  $x(\tau)$  et renversement du signal  $h(\tau)$  par rapport au temps :  $h(-\tau)$ .
- Décalage du signal  $h(-\tau)$  par  $t$  :  $h(t - \tau)$ .
- Calcul de l'intégral du produit  $x(\tau) \cdot h(t - \tau)$  en répétant l'opération pour  $t \in ]-\infty, +\infty[$ .

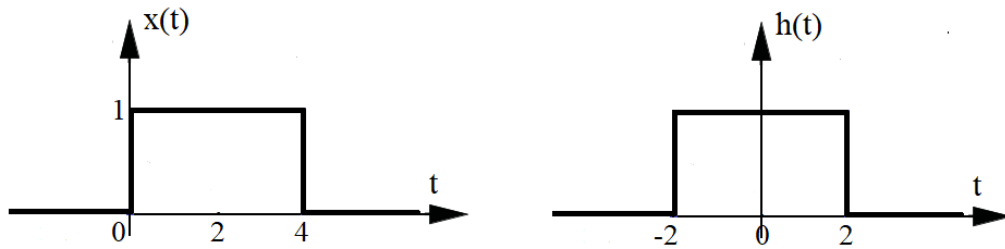
#### Exemple :

Soit un système  $S$  linéaire invariant dans le temps caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  telle que :  $h(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$ , l'entrée de ce système est :  $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$ .

1. Tracer les signaux  $x(t)$  et  $h(t)$ .
2. Calculer et tracer  $y(t)$  la réponse de ce système à l'entrée  $x(t)$ .

Solution :

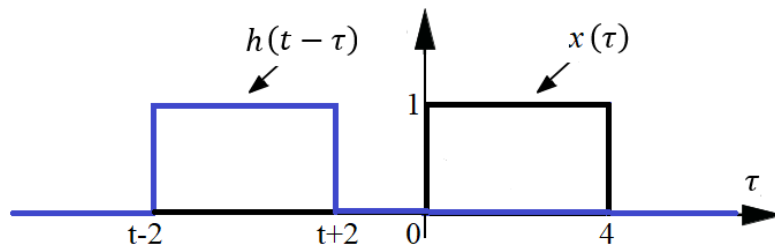
1. Traçage des signaux  $x(t)$  et  $h(t)$  :



2. La réponse  $y(t)$  de ce système est le produit de convolution entre  $x(t)$  et  $h(t)$  :

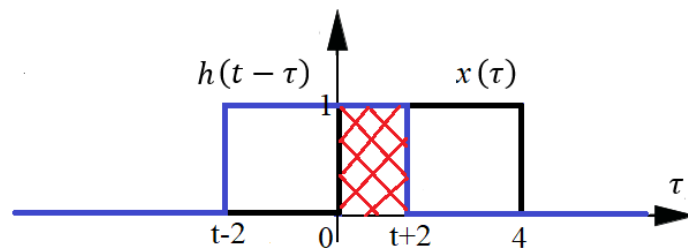
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

1<sup>er</sup> Cas :  $t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq -2$  :



$y(t) = 0$ , car il n'y a pas d'intersection entre les deux signaux.

2<sup>ème</sup> Cas :  $0 \leq t + 2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 2$  :

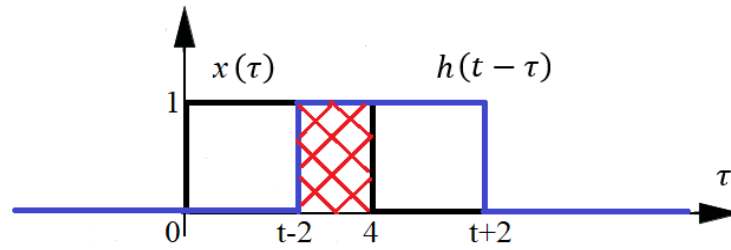


$$y(t) = \int_0^{t+2} (1 \cdot 1) d\tau$$

$$= \tau \Big|_0^{t+2}$$

$$y(t) = t + 2$$

3<sup>ème</sup> Cas :  $0 \leq t - 2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 6$  :



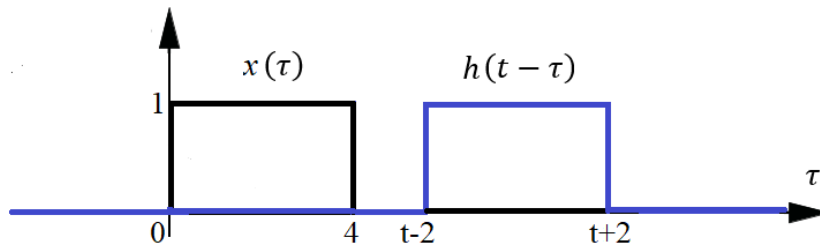
$$y(t) = \int_{t-2}^4 (1.1) d\tau$$

$$= \tau \Big|_{t-2}^4$$

$$y(t) = 4 - t + 2$$

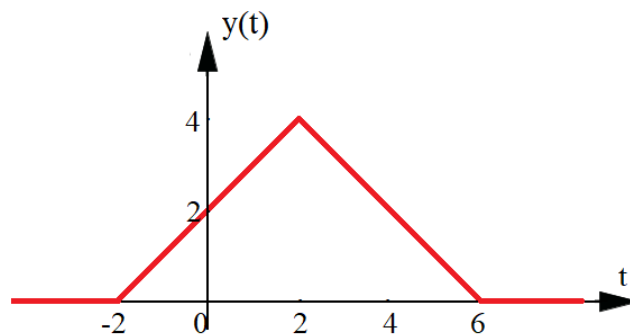
$$y(t) = -t + 6$$

4<sup>ème</sup> Cas :  $t - 2 \geq 4 \Leftrightarrow t \geq 6$  :



$$y(t) = 0$$

$$\text{Donc : } y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -2 \\ t + 2, & -2 \leq t \leq 2 \\ -t + 6, & 2 \leq t \leq 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$



### II.2.3. Propriétés de la convolution

- La commutativité :  $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
- La distributivité :  $[x(t) + y(t)] * h(t) = x(t) * h(t) + y(t) * h(t)$
- L'associativité :  $[x(t) * y(t)] * h(t) = x(t) * [y(t) * h(t)]$
- L'élément neutre :  $x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$

### III. Technique de corrélation

#### III.1. Définition

La fonction de corrélation (ou intercorrélation) est une technique de comparaison sert à mesurer le degré de ressemblance entre deux signaux analogiques  $x(t)$  et  $y(t)$ , elle est utilisée dans les radars, les sonars, les communications numériques, la mesure de temps de transmission, etc. La corrélation est une fonction de  $\tau$  définie comme suit :

- Pour les signaux à énergie finie :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

- Pour les signaux à puissance moyenne finie :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

- Pour les signaux périodiques :

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

La fonction d'autocorrélation est une technique de comparaison entre un signal analogique  $x(t)$  et ses copies décalées, elle est définie comme suit :

- Pour un signal à énergie finie :

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) dt$$

- Pour un signal à puissance moyenne finie :

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt$$

- Pour un signal périodique :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt$$

#### III.2. Calcul de la corrélation

Pour calculer la fonction de corrélation entre deux signaux analogiques  $x(t)$  et  $y(t)$ , on suit les étapes suivantes :

- Traçage des signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ .
- Fixation du signal  $x(t)$  et décalage du signal  $y(t)$  par  $\tau$  :  $y(t + \tau)$ .
- Calcul de l'intégral du produit  $x(t) \cdot y(t + \tau)$  en répétant l'opération pour  $\tau \in ]-\infty, +\infty[$ .

### III.3. Propriétés de la corrélation

- $C_{xy}(\tau) \neq C_{yx}(\tau)$
- $C_{xx}(\tau)$  est maximale pour  $\tau = 0$
- $C_{xx}(\tau)$  est une fonction paire c.à.d.  $C_{xx}(\tau) = C_{xx}(-\tau)$
- $C_{xx}(0) = E_x$  (ou  $P_x$ ), l'énergie (ou puissance) du signal  $x(t)$
- $C_{xy}(t) = x(t) * y(-t)$

#### Exercice :

On considère les deux signaux analogiques  $x(t)$  et  $h(t)$  définis par :

$$x(t) = e^{-t} \cdot u(t) \quad \& \quad h(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

1. Représenter les signaux  $x(t)$ ,  $h(t)$  et  $y(t)$  où  $y(t) = h(-t)$ .
2. Calculer le produit de convolution entre les deux signaux  $x(t)$  et  $h(t)$ .
3. Calculer la fonction de corrélation  $C_{xy}(\tau)$ .
4. En déduire une relation entre la corrélation et la convolution.

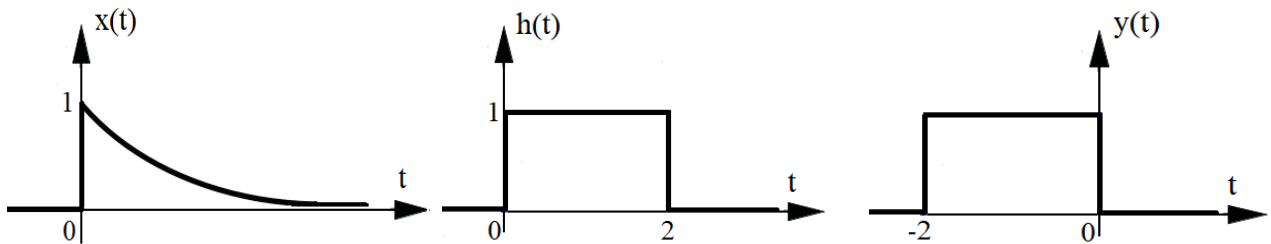
#### Solution :

1. Représentation des signaux :

$$x(t) = e^{-t} \cdot u(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$h(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

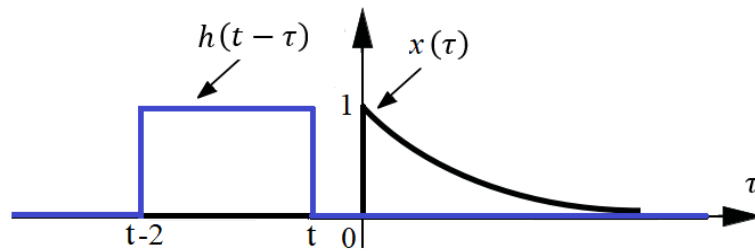
$$y(t) = h(-t) = \begin{cases} 1, & -2 \leq t \leq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



2. La convolution entre  $x(t)$  et  $h(t)$  :

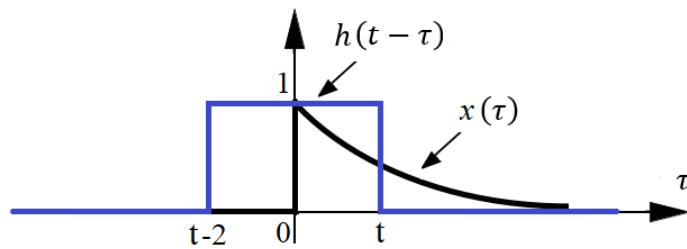
$$g(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

1<sup>er</sup> Cas :  $t \leq 0$  :



$g(t) = 0$ , car il n'y a pas d'intersection entre les deux signaux.

2<sup>ème</sup> Cas :  $t - 2 \leq 0$  &  $t \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2$  :

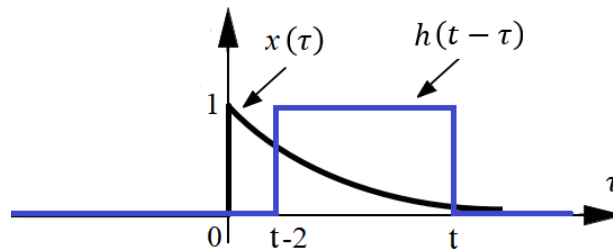


$$g(t) = \int_0^t (e^{-\tau} \cdot 1) d\tau$$

$$= -e^{-\tau} \Big|_0^t$$

$$g(t) = 1 - e^{-t}$$

3<sup>ème</sup> Cas :  $t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$  :



$$g(t) = \int_{t-2}^t (e^{-\tau} \cdot 1) d\tau$$

$$= -e^{-\tau} \Big|_{t-2}^t$$

$$g(t) = -(e^{-t} - e^{-(t-2)})$$

$$= -(e^{-t} - e^{-t} \cdot e^2)$$

$$g(t) = e^{-t}(e^2 - 1)$$

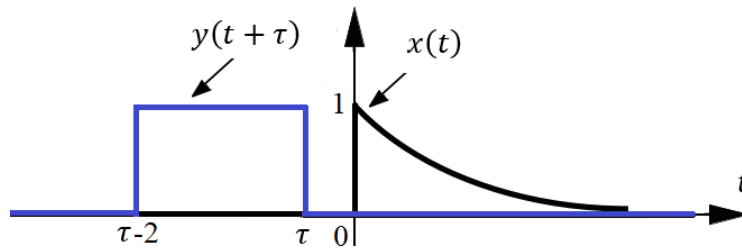
Donc :

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t}, & 0 \leq t \leq 2 \\ e^{-t}(e^2 - 1), & t \geq 2 \end{cases}$$

3. La fonction de corrélation  $C_{xy}(\tau)$  :

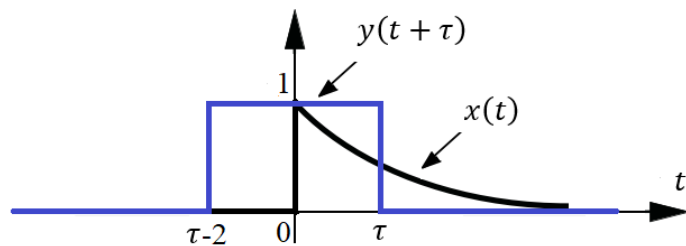
$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

1<sup>er</sup> Cas :  $\tau \leq 0$  :



$C_{xy}(\tau) = 0$ , car il n'y a pas d'intersection entre les deux signaux.

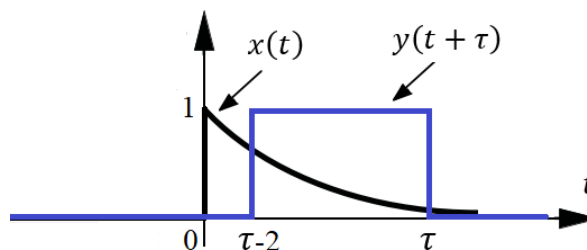
2<sup>ème</sup> Cas :  $\tau - 2 \leq 0$  &  $\tau \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \tau \leq 2$  :



$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau) &= \int_0^{\tau} (e^{-t} \cdot 1) dt \\ &= -e^{-t} \Big|_0^{\tau} \end{aligned}$$

$$C_{xy}(\tau) = 1 - e^{-\tau}$$

3<sup>ème</sup> Cas :  $\tau - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \tau \geq 2$  :



$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau) &= \int_{\tau-2}^{\tau} (e^{-t} \cdot 1) dt \\ &= -e^{-t} \Big|_{\tau-2}^{\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{xy}(\tau) &= -(e^{-\tau} - e^{-(\tau-2)}) \\ &= -(e^{-\tau} - e^{-\tau} \cdot e^2)\end{aligned}$$

$$C_{xy}(\tau) = e^{-\tau}(e^2 - 1)$$

Donc :

$$C_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0 \\ 1 - e^{-\tau}, & 0 \leq \tau \leq 2 \\ e^{-\tau}(e^2 - 1), & \tau \geq 2 \end{cases}$$

4. Relation entre la corrélation et la convolution :

On voit clairement que :  $C_{xy}(t) = x(t) * h(t)$  et puisque  $h(t) = y(-t)$ , on peut déduire que :

$$C_{xy}(t) = x(t) * y(-t).$$