

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



**Université Amar Telidji - Laghouat -
Faculté de Technologie
Département d'électronique**



Polycopié du module

Théorie du Signal

Cours et Exercices corrigés

Niveau : 2^{ème} Année : Licence LMD, Tronc commun ingénieur (S4)

Domaine : Sciences et Technologie (ST)

Options : Télécommunications

Électronique

Automatique

Électrotechnique

Réalisé par : Mr. Ilyas ROUGAB

- 2022/2023 -

Avant-Propos

Le présent document est le fruit d'un long parcours dans ma carrière d'enseignement. Il se veut un guide et un outil d'accessibilité, dédié principalement aux étudiants de 2^{ème} Année Licence (Télécommunication, Electronique, Automatique et Electrotechnique) dans le cadre du programme officiel, ou même aux étudiants en cycle de Master, qui désirent approfondir leurs connaissances ou avoir un document de base en Traitement du signal.

Cet ouvrage se veut solution aux constats multiples faits quant à la disponibilité de travaux spécifiques relatifs aux principes de la Théorie et Traitement du Signal. Ce travail est venu en cela répondre à un besoin profondément ressenti par les étudiants en Licence en particulier ou même en Master, de pouvoir disposer d'un ouvrage soigneusement conçu par un enseignant du module.

La démarche méthodologique de ce polycopié s'articule autour de quatre chapitres qui s'enchaînent des définitions les plus simples aux principes mathématiques les plus approfondis. Chacun de ces chapitres est généreusement parcouru de représentations graphiques obtenues par simulation sous Matlab, permettant d'illustrer notamment toute nouvelle notion introduite.

Le premier chapitre présente quelques définitions de base et généralités utiles sur la Théorie du Signal en particulier les signaux fondamentaux et leurs représentations.

Le deuxième chapitre dresse une étude des systèmes linéaires invariants analogiques ainsi que les opérations de la convolution et corrélation.

Le troisième chapitre est réservé aux Séries et Transformées de Fourier, leurs différentes formes et ses représentations harmoniques.

Le quatrième chapitre est consacré à la transformée de Laplace et à l'analyse de circuit utilisant cette transformée.

Nous souhaitons une très bonne lecture à tous nos lecteurs dont les remarques pertinentes seraient la lumière qui éclairera tout point obscure ou manque constaté dans ce travail.

Dr. Ilyas ROUGAB

Sommaire

Chapitre I : Classification et représentation des signaux

I. Introduction.....	1
II. Définitions	1
II.1. Signal	1
II.2. Bruit	1
II.3. Théorie du signal.....	1
II.4. Traitement du signal.....	1
III. Classification des signaux	2
III.1. Classification phénoménologique.....	2
III.1.1. Signaux déterministes	2
III.1.2. Signaux aléatoires	2
III.2. Classification morphologique.....	2
III.2.1. Signaux analogiques	3
III.2.2. Signaux quantifiés.....	3
III.2.3. Signaux échantillonnés	3
III.2.4. Signaux numériques.....	3
III.3. Classification énergétique.....	3
III.3.1. Signaux à énergie finie.....	3
III.3.2. Signaux à puissance moyenne finie	3
III.4. Autres classifications	5
III.4.1. Signaux causals et signaux non causals	5
III.4.2. Signaux pairs et signaux impairs	6
III.4.3. Signaux périodiques et signaux apériodiques	7
IV. Opérations sur les signaux	8
IV.1. Décalage temporel.....	8
IV.2. Inversement temporelle	8

IV.3. Compression ou dilatation temporelle	8
V. Signaux fondamentaux (particuliers)	9
V.1. Fonction signe.....	9
V.2. Fonction échelon unité (fonction d'Heaviside)	9
V.3. Fonction rampe	10
V.4. Fonction rectangle (porte).....	10
* Fonction rectangulaire périodique	10
V.5. Fonction triangle.....	10
V.6. Fonction sinus cardinal	10
V.7. Impulsion de Dirac	11
V.8. Peigne de Dirac.....	12

Chapitre II : Systèmes, convolution et corrélation des signaux

I. Systèmes	13
I.1. Définition	13
I.2. Propriétés des systèmes.....	13
I.2.1. Linéarité.....	13
I.2.2. Causalité	14
I.2.3. Invariance dans le temps (stationnarité)	14
I.2.4. Stabilité.....	15
II. Convolution	16
II.1. Réponse impulsionnelle	16
II.2. Produit de convolution.....	16
II.2.1. Définition	16
II.2.2. Calcul de la convolution.....	16
II.2.3. Propriétés de la convolution.....	18
III. Technique de corrélation.....	19
III.1. Définition.....	19
III.2. Calcul de la corrélation.....	19

III.3. Propriétés de la corrélation	20
---	----

Chapitre III : Analyse fréquentielle de Fourier

I. Introduction.....	24
II. Série de Fourier	24
II.1. Série de Fourier Trigonométrique (S.F.T)	24
II.2. Série de Fourier Complexe (S.F.C).....	29
II.3. Série de Fourier Polaire (S.F.P)	34
II.4. Relation entre les trois formes de la série de Fourier.....	38
II.5. Série de Fourier de quelques signaux périodiques.....	46
III. Transformée de Fourier.....	48
III.1. Définition.....	48
III.2. Propriétés de la transformée de Fourier.....	52
III.3. Transformée de Fourier de quelques signaux.....	56
IV. Théorème de Parseval	58
IV.1. Théorème de Parseval pour la série de Fourier (signaux périodiques)	58
IV.2. Théorème de Parseval pour la transformée de Fourier (signaux apériodiques)	60

Chapitre IV : Transformée de Laplace

I. Introduction.....	62
II. Transformée de Laplace	62
II.1. Définition	62
II.2. Table de la Transformée de Laplace	65
II.3. Propriétés de la transformée de Laplace	65
III. Transformée inverse de Laplace	67
III.1. Définition.....	67
III.2. Méthode de calcul.....	67
III.2.1. Décomposition en éléments simples (pôles simples distinctes).....	67
III.2.2. Pôles doubles ou multiples.....	71
III.2.3. Division euclidienne	76

Chapitre I

Classification et représentation des signaux

I. Introduction

Le traitement du signal est une discipline indispensable de nos jours. Il a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'informations. Son but est donc de réussir à extraire un maximum d'information utile sur un signal perturbé par du bruit en s'appuyant sur les ressources de l'électronique et de l'informatique.

II. Définitions

II.1. Signal

Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Sa nature physique peut être très variable : acoustique, électronique, optique, etc. Mathématiquement, les signaux sont représentés par une fonction d'une variable généralement le temps. En physique, on s'intéresse qu'au temps $t \geq 0$ (signal causal), alors qu'en mathématiques, on peut définir des temps $t \in]-\infty, +\infty[$.

II.2. Bruit

Un bruit est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.).

II.3. Théorie du signal

La théorie du signal est l'ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire les signaux et les bruits émis par une source, ou modifiés par un système de traitement.

II.4. Traitement du signal

C'est la discipline technique qui, s'appuyant sur les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs de l'information. Son application se situe dans tous les domaines concernés par la transmission ou l'exploitation des informations transporter par ces signaux. Un système de mesure a de façon générale la structure de la figure (I.1) ci-dessous, le phénomène physique que l'on veut étudier est présenté à un capteur qui le transforme en un signal électrique tension ou courant, à ce niveau un bruit s'ajoute. Le signal transmit à travers le canal de transmission atteint le récepteur, puis il subit un traitement pour extraire l'information utile sans bruit.

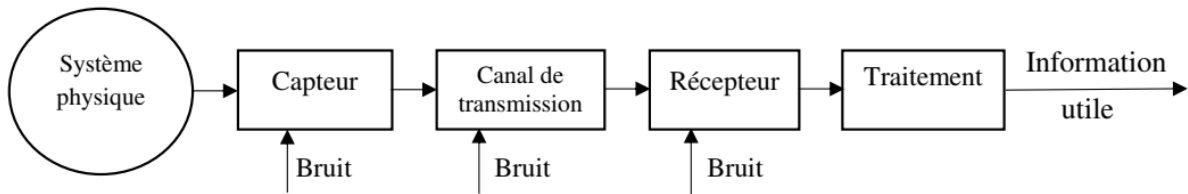


Figure (I.1) : Chaîne de transmission d'un signal

III. Classification des signaux

Il existe plusieurs modes de classification pour les signaux suivant leurs propriétés.

III.1. Classification phénoménologique

Cette classification est basée sur l'évolution du signal en fonction du temps, on trouve deux types fondamentaux :

III.1.1. Signaux déterministes

Ce sont des signaux où leurs évolutions en fonction du temps peut être parfaitement modélisé par une fonction mathématique. On retrouve dans cette classe les signaux périodiques, les signaux transitoires, les signaux pseudo-aléatoires, etc...

III.1.2. Signaux aléatoires

Ce sont des signaux où leur comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les décrire. Si leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, on dit qu'ils sont stationnaires.

Exemples :

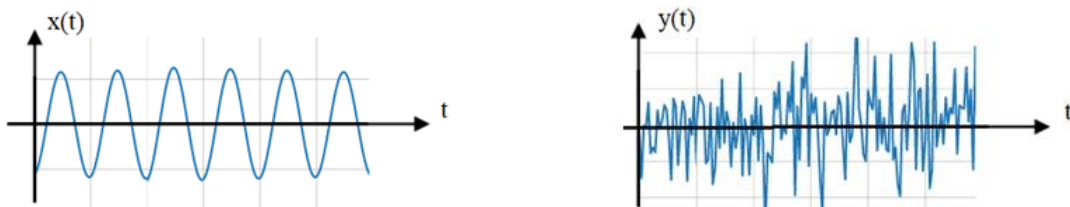


Figure (I.2) : Exemples du classification phénoménologiques des signaux

$x(t)$ est un signal déterministe (sinusoïde) et $y(t)$ est un signal aléatoire.

III.2. Classification morphologique

On distingue les signaux à temps continu des signaux à temps discret ainsi que ceux dont l'amplitude est discrète ou continue, on obtient donc 4 classes de signaux :

III.2.1. Signaux analogiques

Ils sont des signaux dont l'amplitude et le temps sont continus.

III.2.2. Signaux quantifiés

Ils sont des signaux dont l'amplitude est discrète et le temps est continu.

III.2.3. Signaux échantillonnés

Ils sont des signaux dont l'amplitude est continue et le temps est discret.

III.2.4. Signaux numériques

Ils sont des signaux dont l'amplitude et le temps sont discrets.

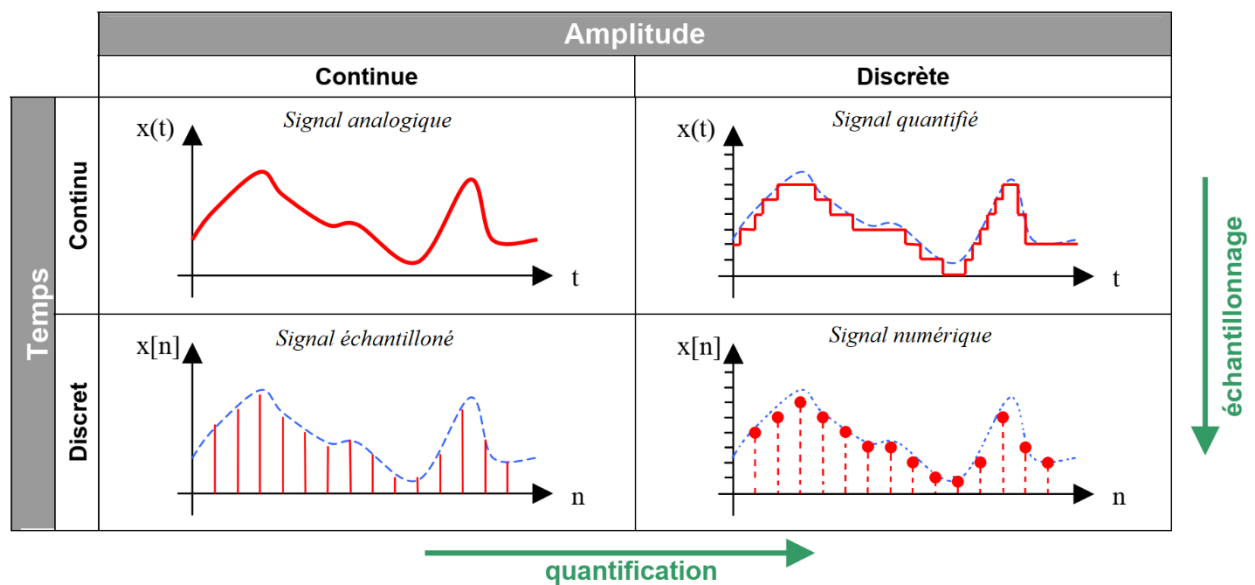


Figure (I.3) : Classification morphologique des signaux

III.3. Classification énergétique

On considère l'énergie des signaux, on distingue :

III.3.1. Signaux à énergie finie

Ils possèdent une énergie finie et une puissance moyenne nulle, ce sont des signaux réalisables.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

III.3.2. Signaux à puissance moyenne finie

Ils possèdent une puissance moyenne finie et une énergie infinie, ils sont donc physiquement irréalisables.

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

Si le signal est périodique :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

*** Règle de calcul :**

On calcul l'énergie E du signal $x(t)$, si cette énergie est finie ($E < \infty$), alors le signal $x(t)$ est un signal à énergie finie, sinon on calcul la puissance moyenne P , si $P < \infty$, le signal $x(t)$ est un signal à puissance moyenne finie. Si $E = P = \infty$, on dit que le signal $x(t)$ est un signal n'est à énergie finie, n'est à puissance moyenne finie.

Exemples :

$$1. \quad x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$= \int_0^{+\infty} (e^{-t})^2 dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt$$

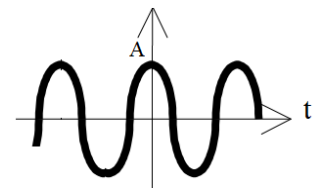
$$= -\frac{1}{2} [e^{-2t}]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{2} [(0) - 1]$$

$$E = \frac{1}{2} < \infty$$

Le signal $x(t)$ est un signal à énergie finie.

$$2. \quad y(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$$



$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (A \cdot \cos(\omega_0 t))^2 dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t) dt \\
&= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2} \right) dt \\
&= \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \cos(2\omega_0 t)) dt \\
&= \frac{A^2}{2} \left(t + \frac{1}{2\omega_0} [\sin(2\omega_0 t)]_{-\infty}^{+\infty} \right) \\
&= \frac{A^2}{2} \left(\underbrace{t}_{+\infty} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\omega_0} \underbrace{[\sin(2\omega_0 t)]_{-\infty}^{+\infty}}_{-1 \leq \sin \leq +1} \right)
\end{aligned}$$

$$E = +\infty$$

L'énergie du signal $y(t)$ est infinie, donc on calcul la puissance moyenne :

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \int_0^T |y(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T (A \cdot \cos(\omega_0 t))^2 dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t) dt \\
&= \frac{A^2}{T} \int_0^T \left(\frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2} \right) dt \\
&= \frac{A^2}{2T} \int_0^T (1 + \cos(2\omega_0 t)) dt \\
&= \frac{A^2}{2T} \left(t \Big|_0^T + \frac{1}{2\omega_0} \left[\sin \left(2 \frac{2\pi}{T} t \right) \Big|_0^T \right] \right) \\
&= \frac{A^2}{2T} \left((T - 0) + \frac{1}{2\omega_0} \underbrace{[\sin(4\pi) - \sin(0)]}_{=0} \right) \\
P &= \frac{A^2}{2} < \infty
\end{aligned}$$

Le signal $y(t)$ est un signal à puissance moyenne finie.

III.4. Autres classifications

On peut trouver d'autres classifications importantes :

III.4.1. Signaux causals et signaux non causals

Un signal $x(t)$ est dit causal si et seulement si $x(t) = 0$, pour $t < 0$.

Exemples :



Figure (I.4) : Exemples des signaux causals et non causals

$x(t)$ est un signal causal et $y(t)$ est un signal non causal.

III.4.2. Signaux pairs et signaux impairs

Un signal réel est pair si, pour tout $t \in \mathcal{R}$, on a : $x(-t) = x(t)$. Graphiquement, il présente une symétrie horizontale par rapport à l'axe des ordonnées.

Un signal réel est impair si, pour tout $t \in \mathcal{R}$, on a : $x(-t) = -x(t)$. Graphiquement, il présente une symétrie par rapport à l'origine.

Exemples :

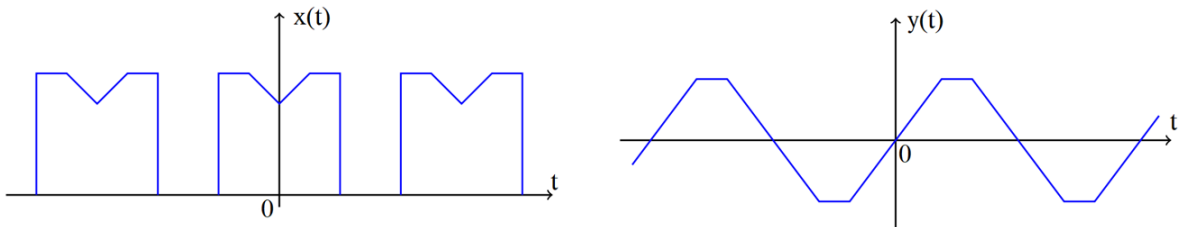


Figure (I.5) : Exemples des signaux pairs et impairs

$x(t)$ est un signal pair ($x(t) = x(-t)$) et $y(t)$ est un signal impair ($y(t) = -y(-t)$).

On peut remarquer qu'il est toujours possible de décomposer un signal $x(t)$ en une somme d'un signal pair $x_p(t)$ et d'un signal impair $x_i(t)$: $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$ avec :

$$\begin{cases} x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \\ x_i(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \end{cases}$$

Exemple :

Déterminer les parties paire et impaire du signal : $x(t) = 1 + t \cos(t) + t^3 \sin(t) \cos(t)$

La partie paire est : $x_p(t) = 1 + t^3 \sin(t) \cos(t)$, et la partie impaire est : $x_i(t) = t \cos(t)$

❖ **Propriétés**

Signal pair \oplus signal pair = signal pair.

Signal impair \oplus signal impair = signal impair.

Signal pair \oplus signal impair = signal ni pair ni impair.

Signal pair \otimes signal pair = signal pair.

Signal impair \otimes signal impair = signal pair.

Signal pair \otimes signal impair = signal impair.

III.4.3. Signaux périodiques et signaux apériodiques

Un signal $x(t)$ est dit périodique s'il existe un réel $T > 0$, tel que : $x(t) = x(t + kT)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Exemples :



Figure (I.6) : Exemples des signaux périodiques et apériodiques

$x(t)$ est un signal périodique et $y(t)$ est un signal non périodique.

❖ **Combinaison de signaux périodiques**

La période commune d'une combinaison de sinusoïdes est la plus courte durée pendant laquelle chaque sinusoïde complète un nombre entier de cycles. C'est le plus petit commun multiple (PPCM) des périodes individuelles. On peut seulement trouver une période commune si le rapport entre les périodes est un nombre rationnel.

Exemple :

Trouver la période commune du signal suivant : $x(t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$

La période de la première sinusoïde est : $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{0.25\pi} = 8s$.

La période de la deuxième sinusoïde est : $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{0.5\pi} = 4s$.

La période commune est : $T = PPCM(4,8) = 8s$.

IV. Opérations sur les signaux

Les opérations sur les signaux (décalage, inversement, compression, dilatation) sont utiles dans le traitement du signal lors de l'application de la série de Fourier, ou les différentes transformées (Fourier, Laplace, Z).

IV.1. Décalage temporel

Le décalage temporel est l'action d'avancer ou retarder un signal dans le temps. Mathématiquement, un signal décalé $y(t)$ est décrit selon :

$$y(t) = x(t')|_{t'=t-t_0} = x(t - t_0), t_0 \in \mathfrak{R}.$$

Si $t_0 > 0$, le signal $y(t)$ est une version retardée du signal original $x(t)$.

Si $t_0 < 0$, le signal $y(t)$ est une version avancée du signal original $x(t)$.

IV.2. Inversement temporelle

L'inversion temporelle est l'opération de faire une image miroir d'un signal par rapport à l'axe des ordonnées. Mathématiquement, le nouveau signal $y(t)$ est obtenu à partir du signal original $x(t)$ selon :

$$y(t) = x(t')|_{t'=-t} = x(-t).$$

IV.3. Compression ou dilatation temporelle

La compression ou la dilatation temporelle d'un signal original $x(t)$ est obtenu comme suit :

$$y(t) = x(t')|_{t'=at} = x(at), \alpha \in \mathfrak{R}^*.$$

Si $|\alpha| > 1$, le signal $y(t)$ est une version compressée du signal original $x(t)$.

Si $|\alpha| < 1$, le signal $y(t)$ est une version dilatée du signal original $x(t)$.

* Règle générale :

Pour tracer un signal d'équation générale : $y(t) = -at + b$, il faut suivre les étapes suivantes :

Mettez le coefficient a en facteur : $y(t) = a(-t + (b/a))$

Si on a le signe $(-)$, mettez-le en facteur : $y(t) = -a(t - (b/a))$

Inverser le signal si on a le signe $(-)$ puis enlevez-le : $y(t) = a(t - (b/a))$

Décalez le signal par (b/a) .

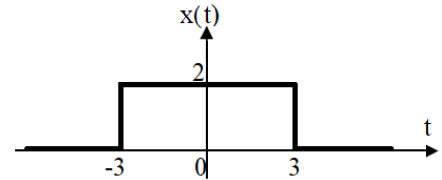
Compressez ou dilatez le signal ($t' = at$).

Exemples :

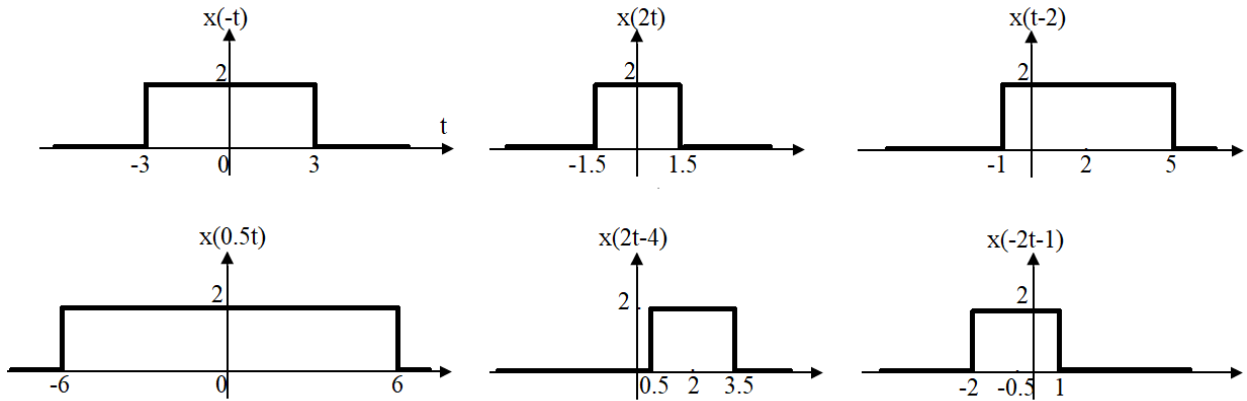
Soit le signal représenté sur la figure ci-contre :

Représenter graphiquement les signaux suivants :

$x(-t)$, $x(2t)$, $x(t - 2)$, $x(0.5t)$, $x(2t - 4)$, $x(-2t - 1)$



Solution :



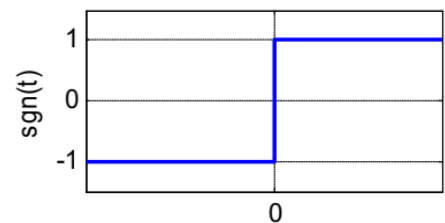
V. Signaux fondamentaux (particuliers)

Dans cette partie, nous présentons quelques signaux analogiques communs, qui apparaissent souvent en traitement du signal, et qui servent à approximer des signaux plus complexes.

V.1. Fonction signe

La fonction signe est définie par :

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} = \frac{t}{|t|}, t \neq 0$$

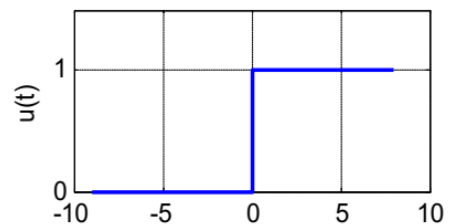


V.2. Fonction échelon unité (fonction d'Heaviside)

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

En générale :

$$A \cdot u(t - t_0) = \begin{cases} A, & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

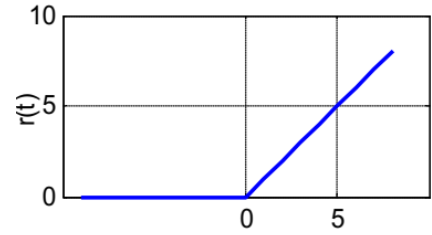


V.3. Fonction rampe

$$r(t) = t.u(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

En générale :

$$A.r(t - t_0) = \begin{cases} A(t - t_0), & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

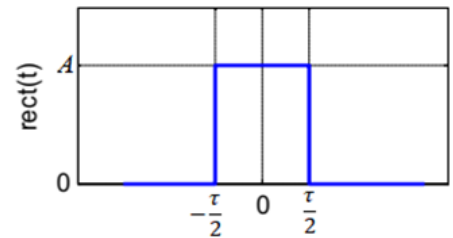


V.4. Fonction rectangle (porte)

$$A.\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

En générale :

$$A.\text{rect}\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right) = \begin{cases} A, & t_0 - \frac{\tau}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



* Fonction rectangulaire périodique

On peut rendre la fonction rectangulaire en fonction rectangulaire périodique :

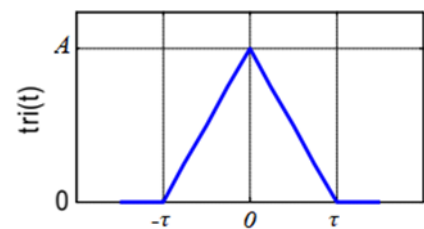
$$A.\text{rect}_T\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} + kT \leq t \leq \frac{\tau}{2} + kT \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

V.5. Fonction triangle

$$A.\text{tri}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right), & -\tau \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

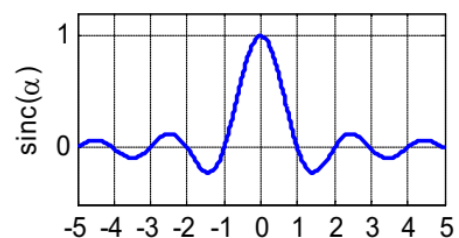
En générale :

$$A.\text{tri}\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t - t_0|}{\tau}\right), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 + \tau \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



V.6. Fonction sinus cardinal

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



❖ **Propriétés**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(t) dt = 1$$

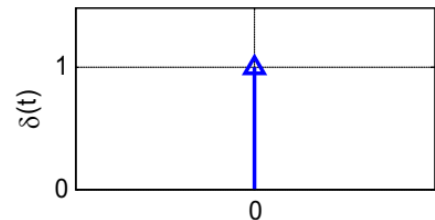
V.7. Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac correspond à une fonction porte dont la largeur τ tendrait vers 0 et dont l'aire est égale à 1.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$\delta(t)$ ne peut être représentée graphiquement, on la schématise par une flèche marquée par 1, ce dernier représente l'aire de cette impulsion et non sa hauteur.

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

❖ **Propriétés**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t) dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t) = +\infty$$

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) = +\infty$$

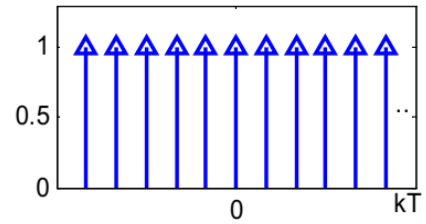
$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

V.8. Peigne de Dirac

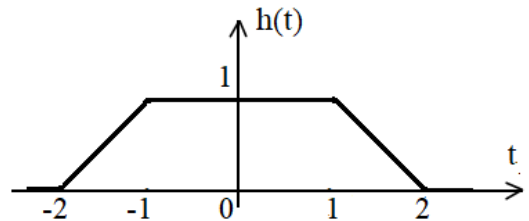
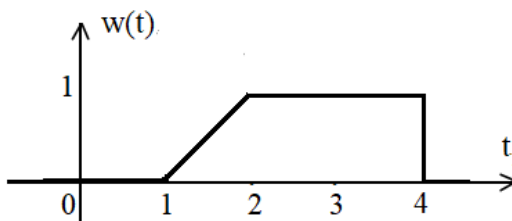
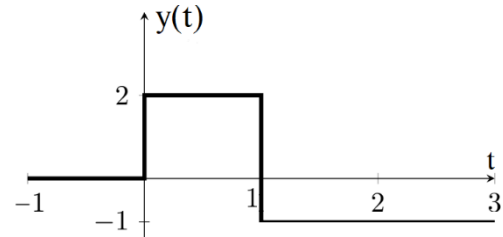
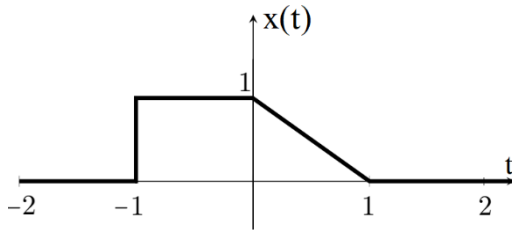
On appelle peigne de Dirac, une succession périodique d'impulsion de Dirac.

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \begin{cases} 1, & t = kT \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Application :

Ecrire les signaux représentés ci-dessous en fonctions des signaux fondamentaux :



Solution :

$$x(t) = u(t + 1) - r(t) + r(t - 1)$$

$$y(t) = 2u(t) - 3u(t - 1)$$

$$w(t) = r(t - 1) - r(t - 2) - u(t - 4)$$

$$h(t) = r(t + 2) - r(t + 1) - r(t - 1) + r(t - 2)$$

Chapitre II

*Systemes, convolution et
corrélation des signaux*

I. Systèmes

I.1. Définition

Un système est un modèle mathématique d'un processus physique, qui transforme un signal d'entrée (ou plusieurs signaux d'entrée) en un signal de sortie (ou plusieurs signaux de sortie). L'entrée du système s'appelle 'excitation' et la sortie s'appelle 'réponse'.

La Transformation T du système peut-être une équation mathématique, équation différentielle, opération algébrique, etc. On écrit : $y(t) = T\{x(t)\}$.

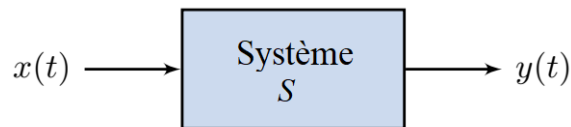


Figure (II.1) : Schéma fonctionnel d'un système

Exemple :

Un système multiplicateur : $y(t) = A \cdot x(t)$

I.2. Propriétés des systèmes

I.2.1. Linéarité

Un système S de transformation T est linéaire si et seulement s'il vérifié l'expression suivante :

$$\begin{aligned} T\{x(t)\} = y(t) &\Rightarrow T\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot T\{x_1(t)\} + b \cdot T\{x_2(t)\} \\ &= a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t) \end{aligned}$$

Exemples :

1. $y(t) = A \cdot x(t)$

$$T\{x(t)\} = A \cdot x(t) = y(t)$$

$$\begin{aligned} T\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} &= A(a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)) \\ &= a \cdot A \cdot x_1(t) + b \cdot A \cdot x_2(t) \\ &= a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t) \end{aligned}$$

Donc ce système est linéaire.

2. $y(t) = |x(t)|$

$$T\{x(t)\} = |x(t)| = y(t)$$

$$T\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = |a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)|$$

$$a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t) = a \cdot |x_1(t)| + b \cdot |x_2(t)|$$

On a : $|a + b| \leq |a| + |b| \Rightarrow T\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} \neq a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$

Donc ce système est non linéaire.

I.2.2. Causalité

On dit qu'un système S est causal si et seulement s'il vérifié l'expression suivante :

Si : $x(t) = 0$ pour $t \leq t_0$ alors : $y(t) = 0$ pour $t \leq t_0$

Un système est causal si la réponse $y(t)$ à l'instant $t = t_0$ ne dépend que des entrées $x(t)$ aux instants $t \leq t_0$, c.à.d. la sortie ne doit pas précéder l'entrée.

Exemples :

1. $y(t) = A \cdot x(t)$

Si : $x(t) = 0$ pour $t \leq t_0$ alors : $y(t) = A \cdot x(t) = 0$ pour $t \leq t_0$

Donc ce système est causal.

2. $y(t) = x(t + 2)$

Si : $x(t) = 0$ pour $t \leq t_0$ alors : $y(t) = x(t + 2) \neq 0$ pour $t \leq t_0$

Donc ce système est non causal.

I.2.3. Invariance dans le temps (stationnarité)

On dit qu'un système S est invariant dans le temps (stationnaire) si et seulement s'il vérifié l'expression suivante :

$$T\{x(t)\} = y(t) \Rightarrow T\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0)$$

Un système est invariant dans le temps si un décalage temporel à l'entrée conduit à un décalage temporel de même valeur à la sortie.

Exemples :

1. $y(t) = A \cdot x(t)$

$$T\{x(t)\} = A \cdot x(t) = y(t) \Rightarrow T\{x(t - t_0)\} = A \cdot x(t - t_0) = y(t - t_0)$$

Donc ce système est invariant dans le temps.

$$2. \quad y(t) = t \cdot x(t)$$

$$T\{x(t)\} = t \cdot x(t) = y(t) \Rightarrow T\{x(t - t_0)\} = t \cdot x(t - t_0)$$

$$y(t - t_0) = (t - t_0) \cdot x(t - t_0)$$

$$T\{x(t - t_0)\} \neq y(t - t_0)$$

Donc ce système est variant dans le temps.

I.2.4. Stabilité

On dit qu'un système S est stable si et seulement s'il vérifié l'expression suivante :

$$\exists \alpha \in \mathcal{R}^* : |x(t)| \leq \alpha \Rightarrow \exists \beta \in \mathcal{R}^* : |y(t)| = |T\{x(t)\}| \leq \beta$$

Un système est stable si en réponse à une entrée bornée, sa sortie est bornée.

Exemples :

$$1. \quad y(t) = 3 \cdot x(t)$$

$$\exists \alpha \in \mathcal{R}^* : |x(t)| \leq \alpha \Rightarrow \exists \beta \in \mathcal{R}^* : |y(t)| = |3 \cdot x(t)| \leq \beta$$

Donc ce système est stable.

$$2. \quad y(t) = t \cdot x(t)$$

$$\exists \alpha \in \mathcal{R}^* : |x(t)| \leq \alpha \Rightarrow \nexists \beta \in \mathcal{R}^* : |y(t)| = |t \cdot x(t)| \leq \beta$$

Donc ce système est instable.

Remarque :

On dit qu'un système S est un système *LIT* s'il est Linéaire et Invariant dans le Temps.

Exercice :

Etudier la linéarité, la causalité, la stabilité et l'invariance dans le temps du système suivant :

$$y(t) = x^2(t)$$

Solution :

Le système décrit ci-dessus est non linéaire, causal, stable et invariant dans le temps (stationnaire), donc ce n'est pas un système *LIT*.

II. Convolution

II.1. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système *LIT* est définie comme la réponse du système pour l'entrée impulsion de Dirac $\delta(t)$. La réponse impulsionnelle est une caractéristique très importante en traitement du signal.

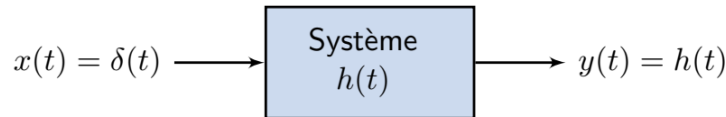


Figure (II.2) : Schéma fonctionnel d'un système de réponse impulsionnelle

II.2. Produit de convolution

II.2.1. Définition

Le signal de sortie d'un système *LIT* est obtenu par une opération entre l'entrée $x(t)$ de ce système et sa réponse impulsionnelle $h(t)$, cette opération est appelée : la convolution. C'est l'outil la plus fondamentale du traitement du signal, elle est donnée par :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

II.2.2. Calcul de la convolution

Pour calculer le produit de convolution entre deux signaux analogiques $x(t)$ et $h(t)$, on suit les étapes suivantes :

- Traçage des signaux $x(t)$ et $h(t)$ avec changement de variable $t \rightarrow \tau$: $x(\tau)$ et $h(\tau)$.
- Fixation du signal $x(\tau)$ et renversement du signal $h(\tau)$ par rapport au temps : $h(-\tau)$.
- Décalage du signal $h(-\tau)$ par t : $h(t - \tau)$.
- Calcul de l'intégral du produit $x(\tau) \cdot h(t - \tau)$ en répétant l'opération pour $t \in]-\infty, +\infty[$.

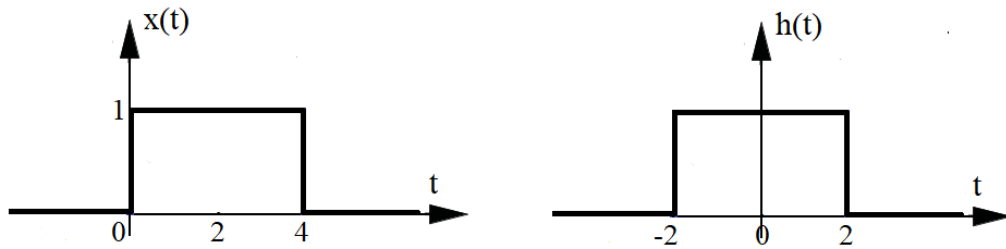
Exemple :

Soit un système S linéaire invariant dans le temps caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ telle que : $h(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$, l'entrée de ce système est : $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$.

1. Tracer les signaux $x(t)$ et $h(t)$.
2. Calculer et tracer $y(t)$ la réponse de ce système à l'entrée $x(t)$.

Solution :

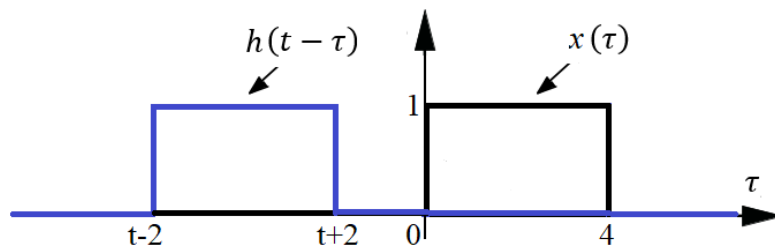
1. Traçage des signaux $x(t)$ et $h(t)$:



2. La réponse $y(t)$ de ce système est le produit de convolution entre $x(t)$ et $h(t)$:

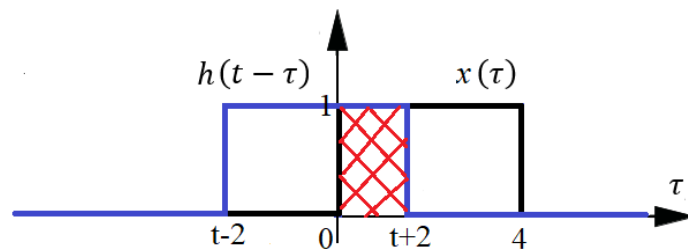
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

1^{er} Cas : $t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq -2$:



$y(t) = 0$, car il n'y a pas d'intersection entre les deux signaux.

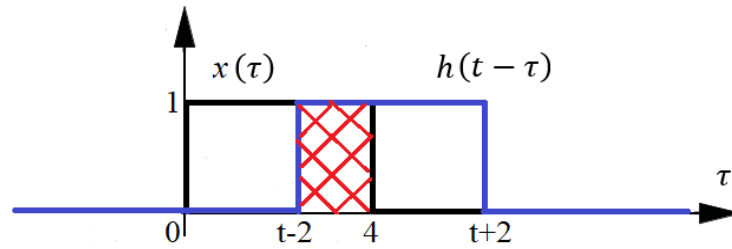
2^{ème} Cas : $0 \leq t + 2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 2$:



$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{t+2} (1 \cdot 1) d\tau \\ &= \tau \Big|_0^{t+2} \end{aligned}$$

$$y(t) = t + 2$$

3^{ème} Cas : $0 \leq t - 2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 6$:



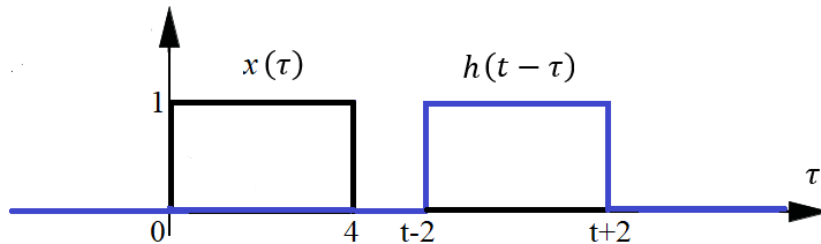
$$y(t) = \int_{t-2}^4 (1 \cdot 1) d\tau$$

$$= \tau \Big|_{t-2}^4$$

$$y(t) = 4 - t + 2$$

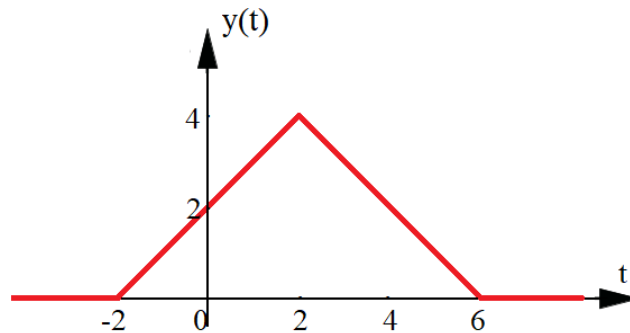
$$y(t) = -t + 6$$

4^{ème} Cas : $t - 2 \geq 4 \Leftrightarrow t \geq 6$:



$$y(t) = 0$$

$$\text{Donc : } y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -2 \\ t + 2, & -2 \leq t \leq 2 \\ -t + 6, & 2 \leq t \leq 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$



II.2.3. Propriétés de la convolution

- La commutativité : $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
- La distributivité : $[x(t) + y(t)] * h(t) = x(t) * h(t) + y(t) * h(t)$
- L'associativité : $[x(t) * y(t)] * h(t) = x(t) * [y(t) * h(t)]$
- L'élément neutre : $x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$

III. Technique de corrélation

III.1. Définition

La fonction de corrélation (ou intercorrélation) est une technique de comparaison sert à mesurer le degré de ressemblance entre deux signaux analogiques $x(t)$ et $y(t)$, elle est utilisée dans les radars, les sonars, les communications numériques, la mesure de temps de transmission, etc. La corrélation est une fonction de τ définie comme suit :

- Pour les signaux à énergie finie :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

- Pour les signaux à puissance moyenne finie :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

- Pour les signaux périodiques :

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

La fonction d'autocorrélation est une technique de comparaison entre un signal analogique $x(t)$ et ses copies décalées, elle est définie comme suit :

- Pour un signal à énergie finie :

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) dt$$

- Pour un signal à puissance moyenne finie :

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt$$

- Pour un signal périodique :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt$$

III.2. Calcul de la corrélation

Pour calculer la fonction de corrélation entre deux signaux analogiques $x(t)$ et $y(t)$, on suit les étapes suivantes :

- Traçage des signaux $x(t)$ et $y(t)$.
- Fixation du signal $x(t)$ et décalage du signal $y(t)$ par τ : $y(t - \tau)$.
- Calcul de l'intégral du produit $x(t) \cdot y(t - \tau)$ en répétant l'opération pour $\tau \in]-\infty, +\infty[$.

III.3. Propriétés de la corrélation

- $C_{xy}(\tau) \neq C_{yx}(\tau)$
- $C_{xx}(\tau)$ est maximale pour $\tau = 0$
- $C_{xx}(\tau)$ est une fonction paire c.à.d. $C_{xx}(\tau) = C_{xx}(-\tau)$
- $C_{xx}(0) = E_x$ (ou P_x), l'énergie (ou puissance) du signal $x(t)$
- $C_{xy}(t) = x(t) * y(-t)$

Exercice :

On considère les deux signaux analogiques $x(t)$ et $h(t)$ définis par :

$$x(t) = e^{-t} \cdot u(t) \quad \& \quad h(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

1. Représenter les signaux $x(t)$, $h(t)$ et $y(t)$ où $y(t) = h(-t)$.
2. Calculer le produit de convolution entre les deux signaux $x(t)$ et $h(t)$.
3. Calculer la fonction de corrélation $C_{xy}(\tau)$.
4. En déduire une relation entre la corrélation et la convolution.

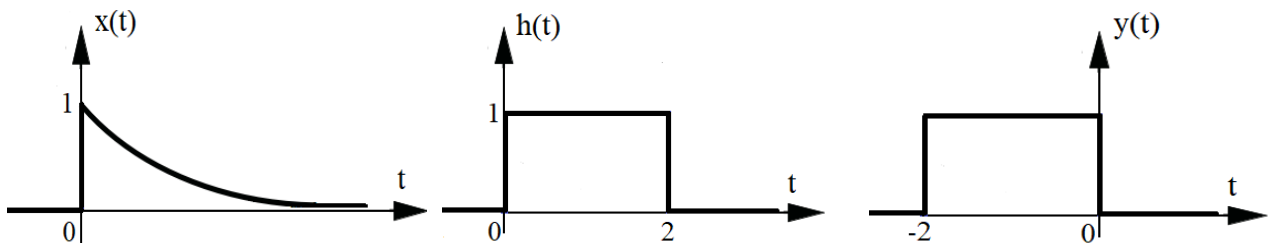
Solution :

1. Représentation des signaux :

$$x(t) = e^{-t} \cdot u(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$h(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

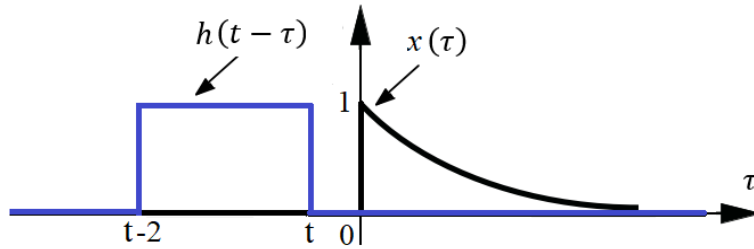
$$y(t) = h(-t) = \begin{cases} 1, & -2 \leq t \leq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



2. La convolution entre $x(t)$ et $h(t)$:

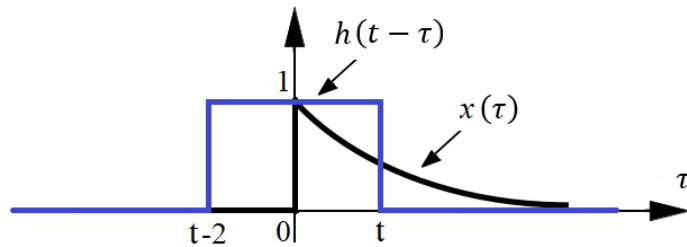
$$g(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

1^{er} Cas : $t \leq 0$:



$g(t) = 0$, car il n'y a pas d'intersection entre les deux signaux.

2^{ème} Cas : $t - 2 \leq 0$ & $t \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2$:

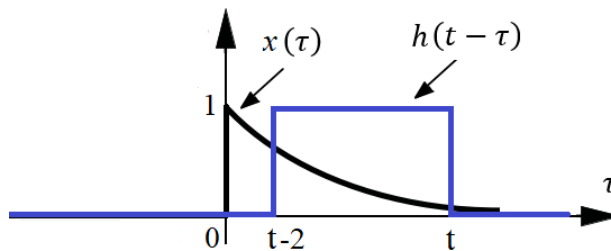


$$g(t) = \int_0^t (e^{-\tau} \cdot 1) d\tau$$

$$= -e^{-\tau} \Big|_0^t$$

$$g(t) = 1 - e^{-t}$$

3^{ème} Cas : $t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$:



$$g(t) = \int_{t-2}^t (e^{-\tau} \cdot 1) d\tau$$

$$= -e^{-\tau} \Big|_{t-2}^t$$

$$g(t) = -(e^{-t} - e^{-(t-2)})$$

$$= -(e^{-t} - e^{-t} \cdot e^2)$$

$$g(t) = e^{-t}(e^2 - 1)$$

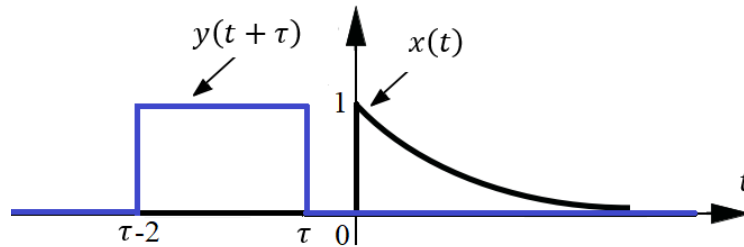
Donc :

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t}, & 0 \leq t \leq 2 \\ e^{-t}(e^2 - 1), & t \geq 2 \end{cases}$$

3. La fonction de corrélation $C_{xy}(\tau)$:

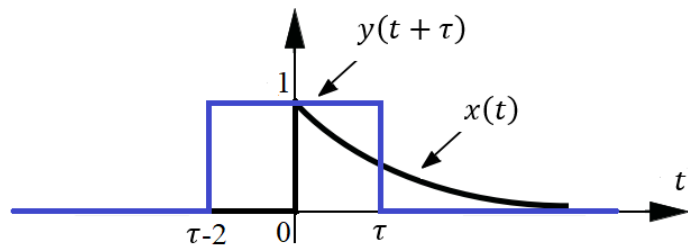
$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

1^{er} Cas : $\tau \leq 0$:



$C_{xy}(\tau) = 0$, car il n'y a pas d'intersection entre les deux signaux.

2^{ème} Cas : $\tau - 2 \leq 0$ & $\tau \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \tau \leq 2$:

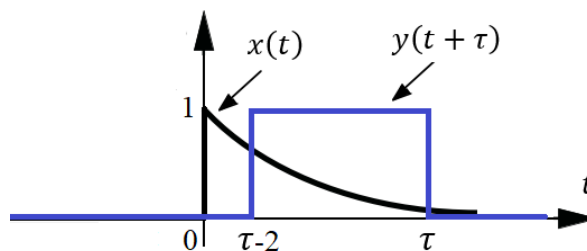


$$C_{xy}(\tau) = \int_0^{\tau} (e^{-t} \cdot 1) dt$$

$$= -e^{-t} \Big|_0^{\tau}$$

$$C_{xy}(\tau) = 1 - e^{-\tau}$$

3^{ème} Cas : $\tau - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \tau \geq 2$:



$$C_{xy}(\tau) = \int_{\tau-2}^{\tau} (e^{-t} \cdot 1) dt$$

$$= -e^{-t} \Big|_{\tau-2}^{\tau}$$

$$\begin{aligned}C_{xy}(\tau) &= -(e^{-\tau} - e^{-(\tau-2)}) \\ &= -(e^{-\tau} - e^{-\tau} \cdot e^2)\end{aligned}$$

$$C_{xy}(\tau) = e^{-\tau}(e^2 - 1)$$

Donc :

$$C_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0 \\ 1 - e^{-\tau}, & 0 \leq \tau \leq 2 \\ e^{-\tau}(e^2 - 1), & \tau \geq 2 \end{cases}$$

4. Relation entre la corrélation et la convolution :

On voit clairement que : $C_{xy}(t) = x(t) * h(t)$ et puisque $h(t) = y(-t)$, on peut déduire que :

$$C_{xy}(t) = x(t) * y(-t).$$

Chapitre III

Analyse fréquentielle de Fourier

I. Introduction

Le développement en série ou transformée de Fourier permet d'obtenir une représentation spectrale (fréquentielle) des signaux déterministes. Celle-ci exprime la répartition de l'amplitude, de la phase, de l'énergie ou de la puissance des signaux considérés en fonction de la fréquence. L'analyse harmonique est l'instrument majeur de la théorie des signaux et des systèmes.

II. Série de Fourier

La série de Fourier s'applique aux signaux périodiques, elle permet de décomposer un signal périodique en somme infinie de termes : sinus ou/et cosinus, exponentielles, ...

II.1. Série de Fourier Trigonométrique (S.F.T)

Un signal périodique $x(t)$ de période T peut être écrit sous la somme suivante :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

Où :

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: est la pulsation propre

$n\omega$: harmonique de rang n ; l'harmonique $n = 1$ s'appelle le fondamental.

a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier trigonométriques où :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt ; n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt ; n \geq 1$$

A_0 : est la valeur moyenne du signal ou la composante continue :

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

❖ Propriétés

* Si le signal $x(t)$ est pair c.à.d. $x(-t) = x(t)$ alors :

$$b_n = 0 \text{ et } a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(n\omega t) dt$$

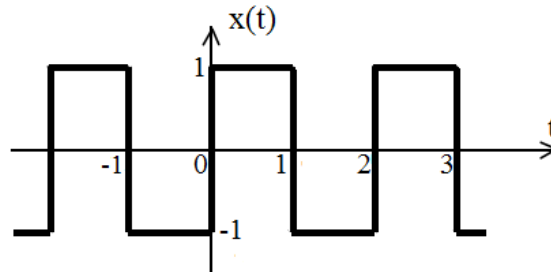
* Si le signal $x(t)$ est impair c.à.d. $x(-t) = -x(t)$ alors :

$$A_0 = a_n = 0 \text{ et } b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin(n\omega t) dt$$

* Si le signal $x(t)$ est réel alors a_n et b_n sont aussi réels.

Exemple :

Décomposer le signal représenté sur la figure suivante en S.F.T :



Solution :

D'abord, on détermine l'expression du signal $x(t)$ sur une période T :

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq 0 \\ +1, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$T = 2s; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

On calcul maintenant les coefficients A_0 , a_n et b_n

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 (-1) dt + \int_0^1 (1) dt \right] \\ &= \frac{1}{2} [-t]_{-1}^0 + [t]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} [(0 - 1) + (1 - 0)] \end{aligned}$$

$A_0 = 0$; la valeur moyenne est nulle.

Le signal $x(t)$ est un signal impair alors $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{2} \left[\int_{-1}^0 -1 \cdot \sin(n\omega t) dt + \int_0^1 1 \cdot \sin(n\omega t) dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n\omega} \cdot \cos(n\omega t) \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{n\omega} \cdot \cos(n\omega t) \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{n\pi} (\cos(0) - \cos(-n\pi)) - \frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi) - \cos(0)) \\
&= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) - \frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \\
&= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) + \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \\
&= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))
\end{aligned}$$

On a : $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Alors : $b_n = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

On peut écrire maintenant le signal $x(t)$ sous la forme trigonométrique suivante :

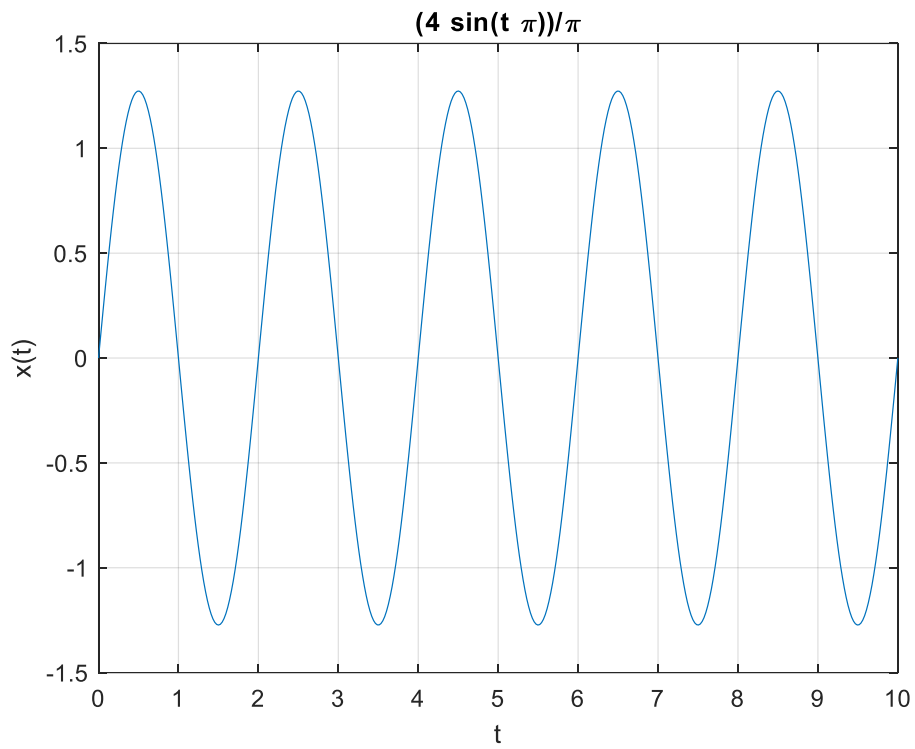
$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi t)$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin(n\pi t)$$

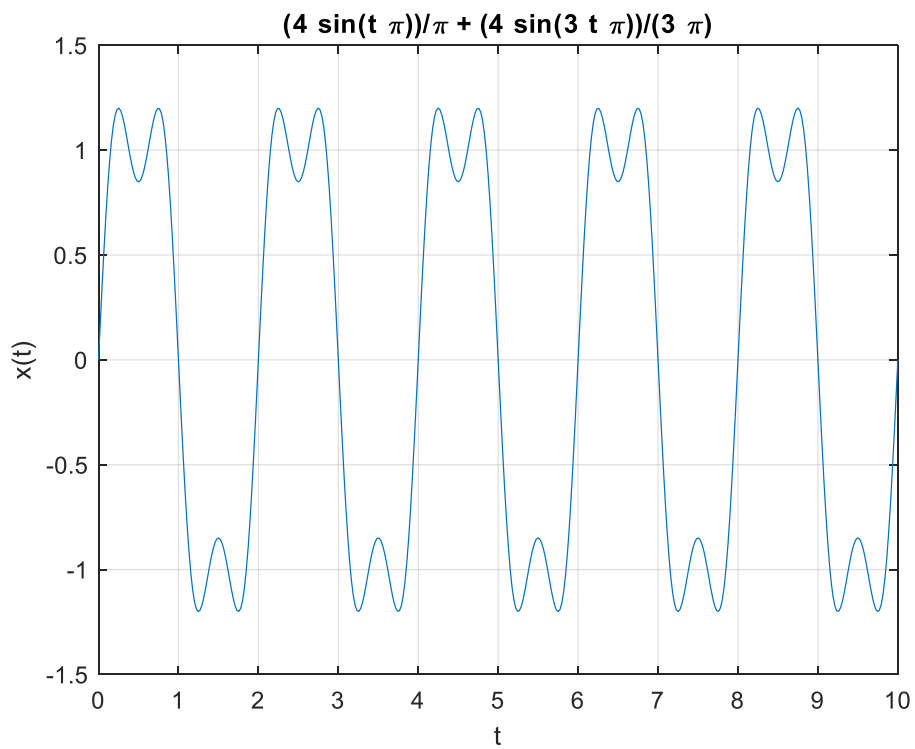
$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi t)$$

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sin(\pi t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\pi t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5\pi t) + \frac{4}{7\pi} \sin(7\pi t) + \frac{4}{9\pi} \sin(9\pi t) + \dots$$

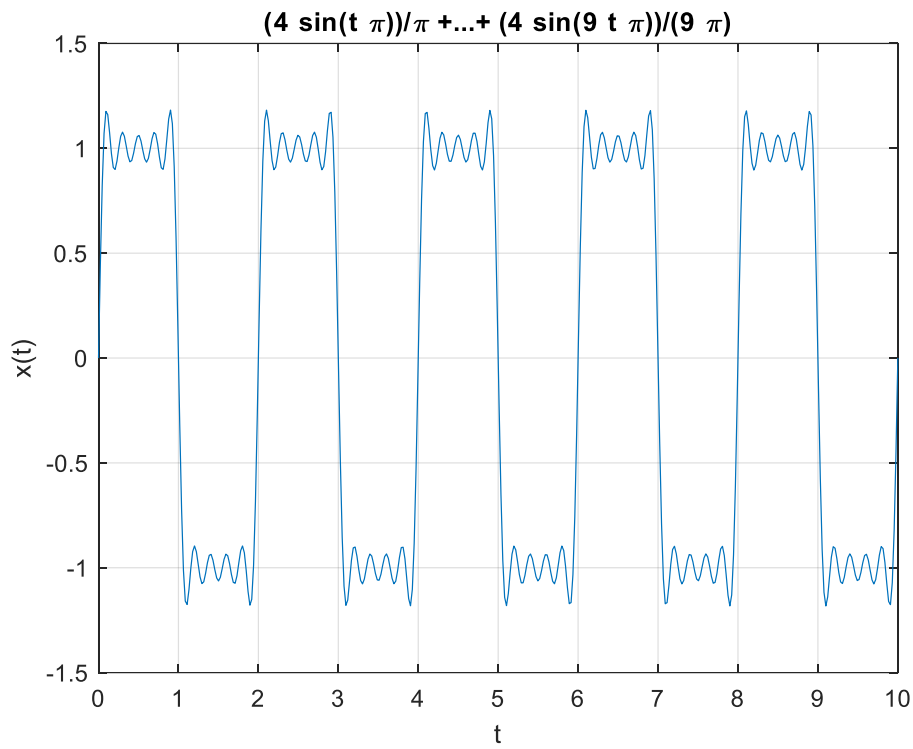
Pour $n = 1$



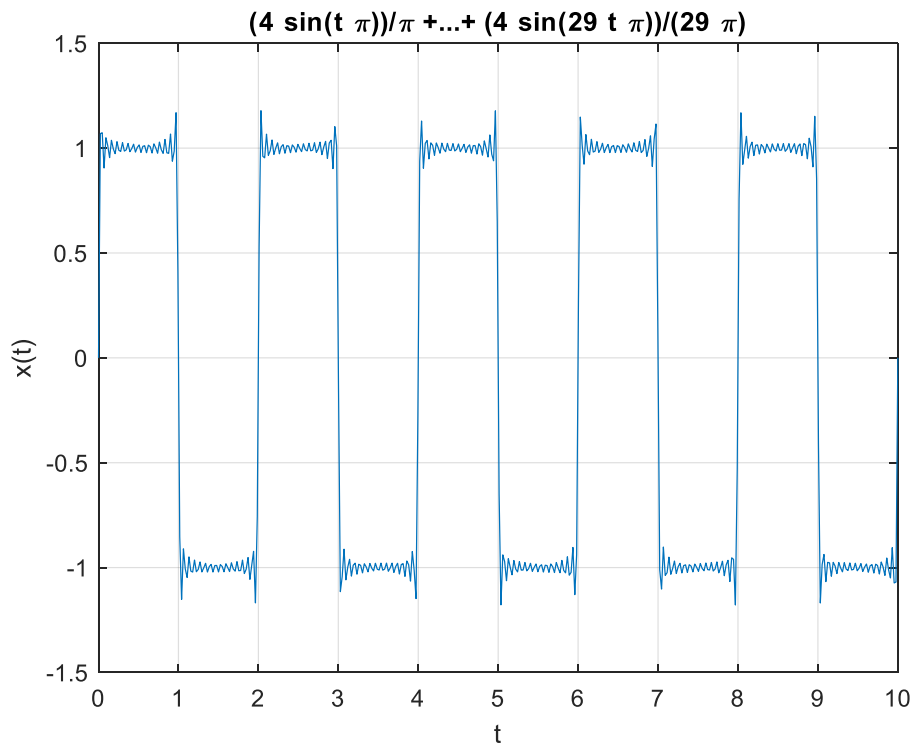
Pour $n = 1:3$



Pour $n = 1:10$

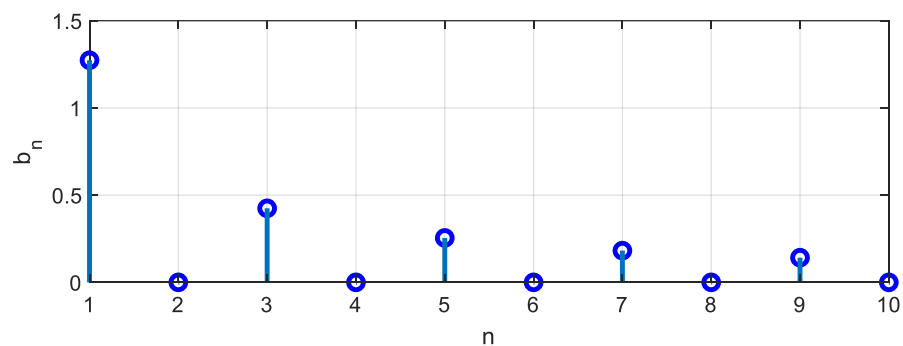
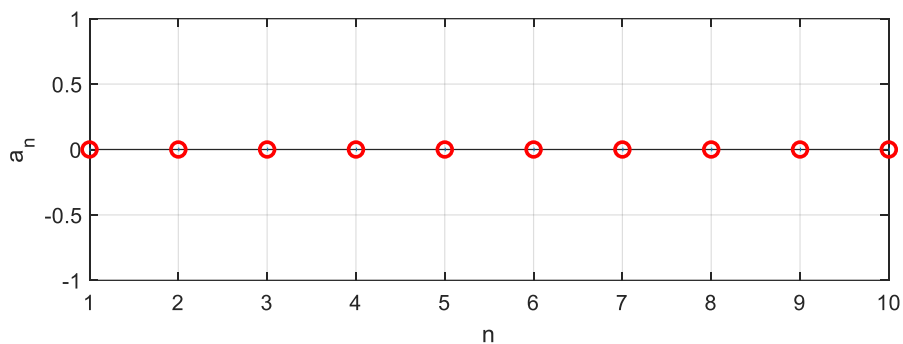


Pour $n = 1:30$



On peut tracer les modules des coefficients A_0 , a_n et b_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_n	/	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{4}{5\pi}$	0	$\frac{4}{7\pi}$...



II.2. Série de Fourier Complexe (S.F.C)

Soit un signal périodique $x(t)$ décomposable en S.F.T telle que :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Les relations d'Euler : $\begin{cases} e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha) \\ e^{-j\alpha} = \cos(\alpha) - j \sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \\ \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \end{cases}$

On pose :

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$$

$$\sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

On remplace ces formules dans l'expression de $x(t)$:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left(\frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \right)$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n}{2} e^{-jn\omega t} + \frac{b_n}{2j} e^{jn\omega t} - \frac{b_n}{2j} e^{-jn\omega t} \right)$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right) e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right) e^{-jn\omega t}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega t}$$

Posons :

$$C_0 = A_0$$

$$C_n = \left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right)$$

$$C_{-n} = \left(\frac{a_{-n} - jb_{-n}}{2} \right) = \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right)$$

On trouve :

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} e^{-jn\omega t}$$

$$x(t) = C_0 e^{j0\omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

C'est la forme complexe (exponentielle) de la série de Fourier avec :

$$C_0 = A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

$$C_n = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt - j \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt \right]$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot (\cos(n\omega t) - j \sin(n\omega t)) dt$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt$$

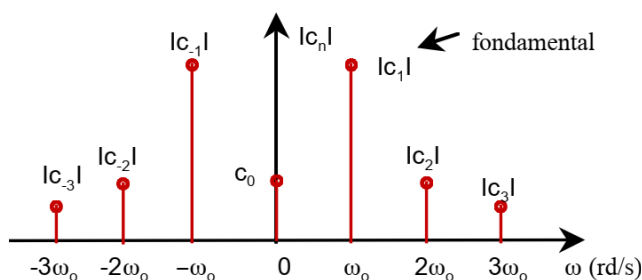
❖ **Spectres de module et de phase (spectres bilatéraux)**

La représentation spectrale graphique porte le nom de **spectre bilatéral**, parce que les fréquences sont négatives et positives car le compteur n varie de $-\infty$ à $+\infty$. Le spectre de module (ou d'amplitude) est une représentation graphique qui permette de donner les modules de C_n en fonction de n ou $n\omega$, ce spectre est symétrique par rapport à l'axe vertical c.à.d. c'est un spectre pair : $|C_n| = |C_{-n}|$.

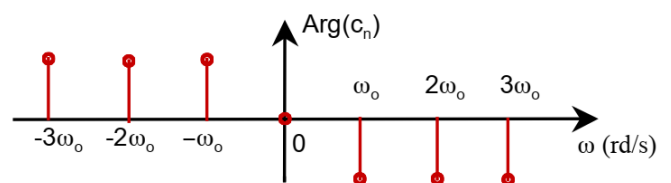
$$|C_n| = \sqrt{(Re(C_n))^2 + (Im(C_n))^2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$$

Le spectre de phase permet de représenter graphiquement la phase (l'argument) de C_n en fonction de n ou $n\omega$, ce spectre est impair : $\varphi_n = -\varphi_{-n}$.

$$\varphi_n = Arg(C_n) = Arctg\left(\frac{Im(C_n)}{Re(C_n)}\right) = Arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$



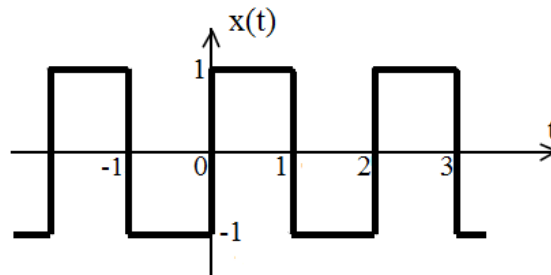
Spectre bilatéral d'amplitude



Spectre bilatéral de phase

Exemple :

Décomposer le signal représenté sur la figure suivante en S.F.C puis tracer son spectre de module et de phase (spectres bilatéraux) :

Solution :

$$x(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$T = 2s; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

On calcul maintenant les coefficients C_0 et C_n

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 (1) dt + \int_1^2 (-1) dt \right] \\ &= \frac{1}{2} [t \Big|_0^1 - t \Big|_1^2] \\ &= \frac{1}{2} [(1 - 0) - (2 - 1)] \end{aligned}$$

$$C_0 = 0$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 1 e^{-jn\omega t} dt + \int_1^2 (-1) e^{-jn\omega t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{jn\omega} \cdot e^{-jn\omega t} \Big|_0^1 + \frac{1}{jn\omega} \cdot e^{-jn\omega t} \Big|_1^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{jn\omega} \cdot (e^{-jn\omega} - 1) + \frac{1}{jn\omega} \cdot (e^{-jn2\omega} - e^{-jn\omega}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{jn\pi} \cdot (e^{-jn\pi} - 1) + \frac{1}{jn\pi} \cdot (e^{-jn2\pi} - e^{-jn\pi}) \right] \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} e^{-jn\pi} = \cos(n\pi) - j \sin(n\pi) = (-1)^n \\ e^{-jn2\pi} = \cos(2n\pi) - j \sin(2n\pi) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{jn\pi} \cdot ((-1)^n - 1) + \frac{1}{jn\pi} \cdot (1 - (-1)^n) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{jn\pi} \cdot (1 - (-1)^n) + \frac{1}{jn\pi} \cdot (1 - (-1)^n) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{jn\pi} \cdot (1 - (-1)^n) \right] \\ &= \frac{1}{jn\pi} \cdot (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2}{jn\pi} = -j \frac{2}{n\pi}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Donc :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{jn\pi} (1 - (-1)^n) e^{jn\pi t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{j(2k+1)\pi} \cdot e^{j(2k+1)\pi t}$$

$$x(t) = \dots - \frac{2}{j3\pi} e^{-j3\pi t} - \frac{2}{j\pi} e^{-j\pi t} + \frac{2}{j\pi} e^{j\pi t} + \frac{2}{j3\pi} e^{j3\pi t} + \dots$$

Spectre de module :

$$C_0 = 0 \Rightarrow |C_0| = 0$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -j \frac{2}{n\pi}, & n = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow |C_n| = |C_{-n}| = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \left| \frac{2}{n\pi} \right|, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

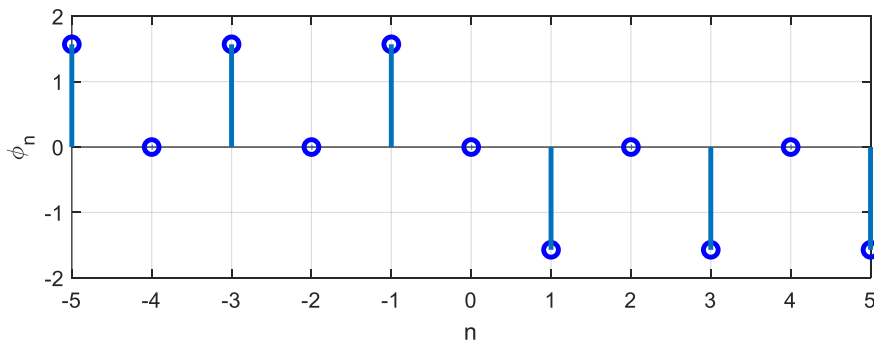
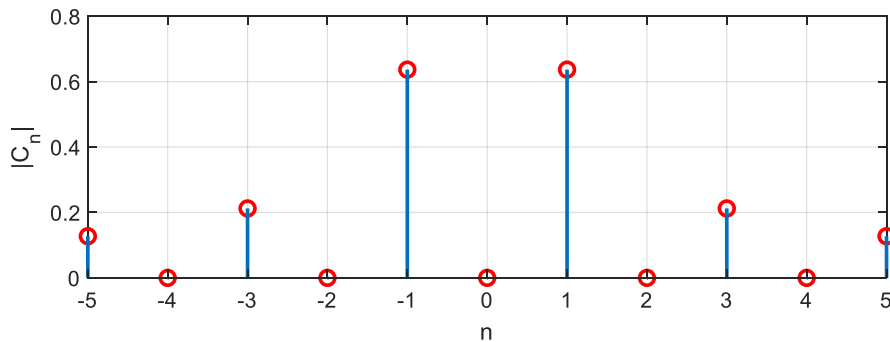
Spectre de phase :

$$\varphi_n = \text{Arg}(C_n)$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -j \frac{2}{n\pi}, & n = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{\pi}{2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

$$C_{-n} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ j\frac{2}{n\pi}, & n = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi_{-n} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ +\frac{\pi}{2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

n	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$ C_n $...	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$...
φ_n	...	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$...



II.3. Série de Fourier Polaire (S.F.P)

Soit un signal périodique $x(t)$ décomposable en S.F.T telle que :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

On pose : $\begin{cases} a_n = P_n \cos(\theta_n) \\ b_n = P_n \sin(\theta_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta_n) = \frac{a_n}{P_n} \\ \sin(\theta_n) = \frac{b_n}{P_n} \end{cases} \Rightarrow \tan(\theta_n) = \frac{b_n}{a_n}$

$$a_n^2 + b_n^2 = P_n^2 \cos^2(\theta_n) + P_n^2 \sin^2(\theta_n) = P_n^2 [\cos^2(\theta_n) + \sin^2(\theta_n)] = P_n^2$$

$$\Rightarrow P_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Remplaçons a_n et b_n dans l'expression de $x(t)$, on trouve :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (P_n \cos(\theta_n) \cos(n\omega t) + P_n \sin(\theta_n) \sin(n\omega t))$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n (\cos(\theta_n) \cos(n\omega t) + \sin(\theta_n) \sin(n\omega t))$$

On a : $\cos(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha \mp \beta)$, alors :

$$x(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

C'est la forme polaire de la série de Fourier avec :

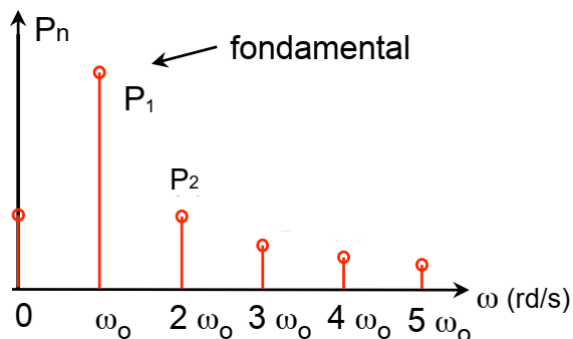
$$P_0 = A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$P_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

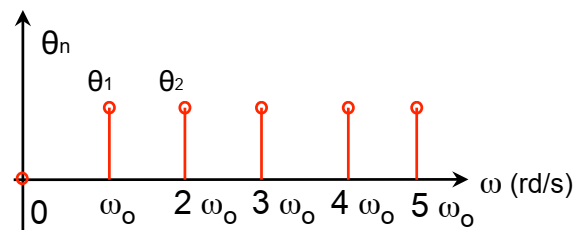
$$\theta_n = \text{Arctg} \left(\frac{b_n}{a_n} \right)$$

❖ Spectres de module et de phase (spectres unilatéraux)

C'est la représentation de P_n et θ_n en fonction de n ou $n\omega$, la représentation spectrale graphique qui lui est associée porte le nom de **spectre unilatéral**, parce que les fréquences sont positives ou nulles car le compteur n des harmoniques varie de 0 à $+\infty$.



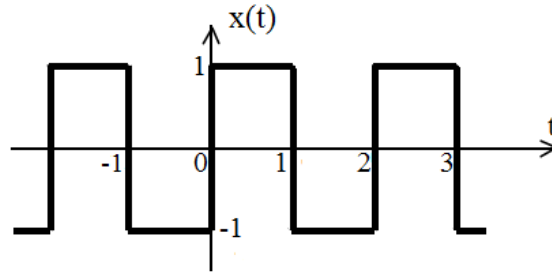
Spectre unilatéral d'amplitude



Spectre unilatéral de phase

Exemple :

Décomposer le signal représenté sur la figure suivante en S.F.P puis tracer son spectre de module et de phase (spectres unilatéraux) :



Solution :

$$x(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$T = 2s; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{On a trouvé : } A_0 = 0; \quad a_n = 0 \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

$$P_0 = A_0 = 0; \quad P_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta_n) = \frac{a_n}{P_n} = 0 \\ \sin(\theta_n) = \frac{b_n}{P_n} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 2k + 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \theta_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{\pi}{2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Donc :

$$x(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \cos\left((2k+1)\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3\pi} \cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{5\pi} \cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

Spectre de module :

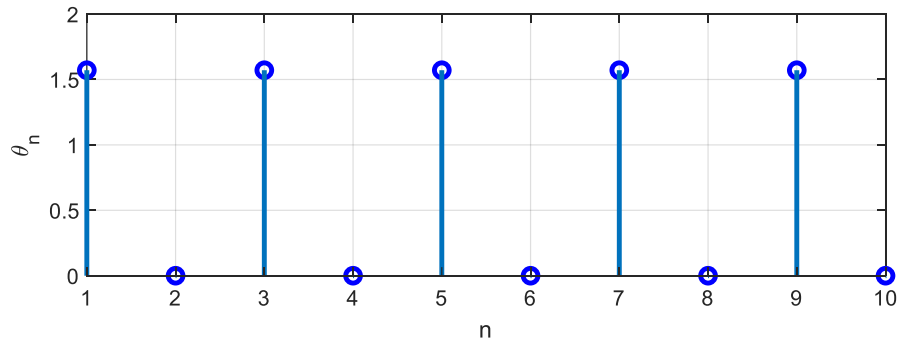
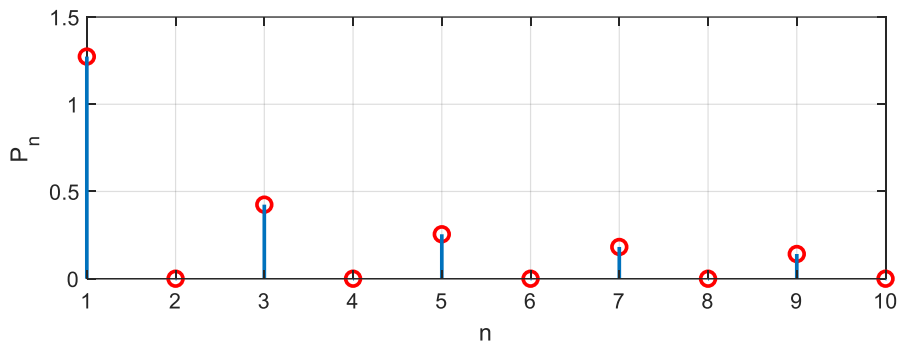
$$P_0 = 0 \rightarrow |P_0| = 0$$

$$P_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow |P_n| = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \left|\frac{4}{n\pi}\right|, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Spectre de phase :

$$\theta_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{\pi}{2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

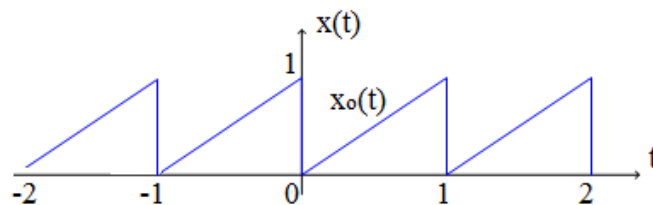
n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P_n	0	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{4}{5\pi}$	0	$\frac{4}{7\pi}$...
θ_n	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$...



Remarque :

Une fonction $x_0(t)$ non périodique et finie (définie sur l'intervalle $[a, b]$ et nulle ailleurs) peut être aussi développée en série de Fourier, pour cela nous considérons la fonction $x(t)$ périodique de période $T = [a, b]$ et elle est égal à $x_0(t)$ sur cet intervalle.

Exemple : $x_0(t) = t; t \in [0,1]$



II.4. Relation entre les trois formes de la série de Fourier

Les relations existantes entre les trois représentations de Fourier sont présentées dans le tableau suivant, ce tableau est important car elle permet de voir en un coup d’œil les relations simples liant les trois représentations spectrales.

$$S.F.T: x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$S.F.C: x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

$$S.F.P: x(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

Forme de la série de Fourier	Trigonométrique (Réelle)	Complexe (Exponentielle)	Polaire (En cosinus)
Trigonométrique (Réelle)	$A_0, a_n \text{ et } b_n$	$C_0 = A_0$ $C_n = \left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)$ $C_{-n} = \left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right)$ $\varphi_n = \text{Arctg}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$	$P_0 = A_0$ $P_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\theta_n = \text{Arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$
Complexe (Exponentielle)	$A_0 = C_0$ $a_n = C_n + C_{-n} = 2 \cdot \text{Re}(C_n)$ $b_n = j(C_n - C_{-n}) = -2 \cdot \text{Im}(C_n)$	$C_0, C_n \text{ et } C_{-n}$ φ_n, φ_{-n}	$P_0 = C_0$ $P_n = 2C_n e^{-j\varphi_n} = 2 C_n $ $\theta_n = -\varphi_n$
Polaire (En cosinus)	$A_0 = P_0$ $a_n = P_n \cos(\theta_n)$ $b_n = P_n \sin(\theta_n)$	$C_0 = P_0$ $C_n = \frac{1}{2} P_n e^{-j\theta_n}$ $C_{-n} = \frac{1}{2} P_n e^{j\theta_n}$ $ C_n = \frac{1}{2} P_n$ $\varphi_n = -\theta_n$	P_0, P_n θ_n

Exercice 1 :

Décomposer le signal périodique $x(t)$ suivant en *S.F.T*, *S.F.C* et *S.F.P* puis tracer ses spectres de module et de phase unilatéraux et bilatéraux correspondants

$$x(t) = A \cdot \cos^2(\omega t), T = 1s$$

Solution :

$$\text{On a : } \cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \Rightarrow x(t) = A \left(\frac{1+\cos(2\omega t)}{2} \right) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \cdot \cos(2\omega t)$$

$$\text{S.F.T: } x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$x(t) = A_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots$$

On compare les deux expressions :

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \cdot \cos(2\omega t) = A_0 + a_2 \cos(2\omega t)$$

On déduit que : $A_0 = \frac{A}{2}$; $a_2 = \frac{A}{2}$; $b_n = 0$ et $a_n = 0, \forall n \neq 2$

$$\text{S.F.P : } x(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

$$x(t) = P_0 + P_1 \cos(\omega t - \theta_1) + P_2 \cos(2\omega t - \theta_2) + P_3 \cos(3\omega t - \theta_3) + \dots$$

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \cdot \cos(2\omega t) = P_0 + P_2 \cos(2\omega t - \theta_2)$$

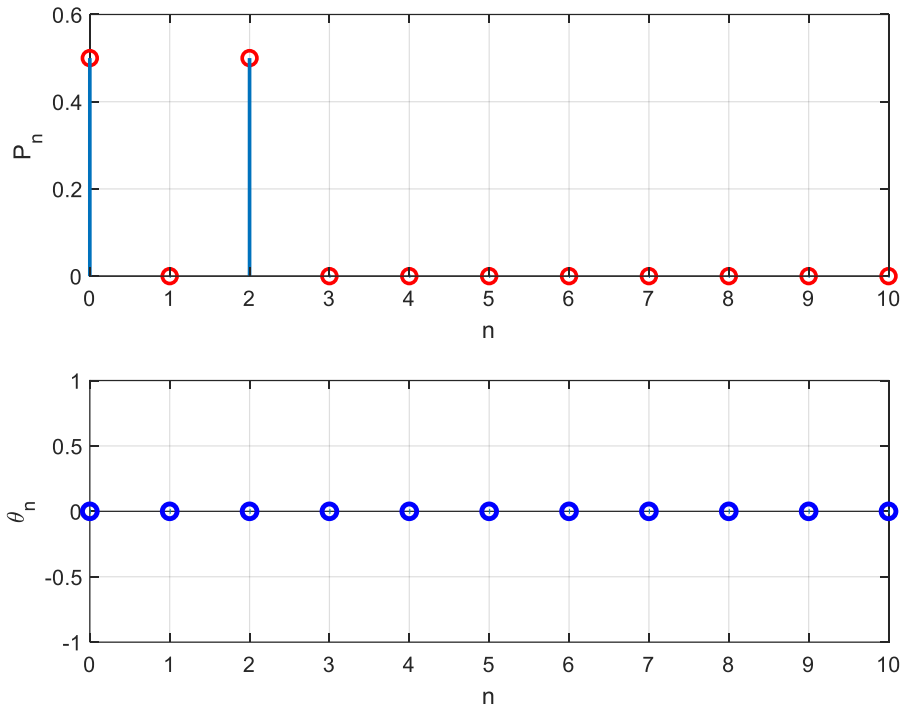
On trouve : $P_0 = \frac{A}{2}$; $P_2 = \frac{A}{2}$; $\theta_2 = 0$ et $P_n = 0, \forall n \neq 2$; $\theta_n = 0$

Ou bien : $P_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = a_n \Rightarrow P_0 = A_0 = \frac{A}{2}$ et $P_2 = a_2 = \frac{A}{2}$

$$\theta_n = \text{Arctg} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) = \text{Arctg}(0) \Rightarrow \theta_n = 0$$

Spectres de module et de phase (spectres unilatéraux) :

On prend $A = 1$:



$$S.F.C : x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

$$x(t) = \dots + C_{-2}e^{-j2\omega t} + C_{-1}e^{-j\omega t} + C_0 + C_1e^{j\omega t} + C_2e^{j2\omega t} + \dots$$

$$\text{On a : } \cos(\alpha) = \frac{e^{-j\alpha} + e^{j\alpha}}{2} \Rightarrow \cos(2\omega t) = \frac{e^{-j2\omega t} + e^{j2\omega t}}{2}$$

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \cdot \cos(2\omega t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \left(\frac{e^{-j2\omega t} + e^{j2\omega t}}{2} \right) = \frac{A}{2} + \frac{A}{4} e^{-j2\omega t} + \frac{A}{4} e^{j2\omega t}$$

On compare avec la forme complexe :

$$x(t) = \frac{A}{4} e^{-j2\omega t} + \frac{A}{2} + \frac{A}{4} e^{j2\omega t} = C_{-2}e^{-j2\omega t} + C_0 + C_2e^{j2\omega t}$$

On trouve que : $C_{-2} = C_2 = \frac{A}{4}$; $C_0 = \frac{A}{2}$ et $C_n = 0 \forall n \neq \pm 2$

$$\varphi_n = \text{Arctg} \left(\frac{\text{Im}(C_n)}{\text{Re}(C_n)} \right) = \text{Arctg}(0) \rightarrow \varphi_n = 0$$

$$\text{Ou bien : } C_n = \left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) = \frac{a_n}{2} \rightarrow C_2 = \frac{a_2}{2} = \frac{A}{4}$$

$$C_{-n} = \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right) = \frac{a_n}{2} \rightarrow C_{-2} = \frac{a_2}{2} = \frac{A}{4}$$

$$C_0 = A_0 = \frac{A}{2}$$

$$\varphi_n = \text{Arctg}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = \text{Arctg}(0) \Rightarrow \varphi_n = 0$$

$$\text{Ou bien : } C_n = \frac{1}{2}P_n e^{-j\theta_n} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}P_2 e^{-j0} = \frac{A}{4}$$

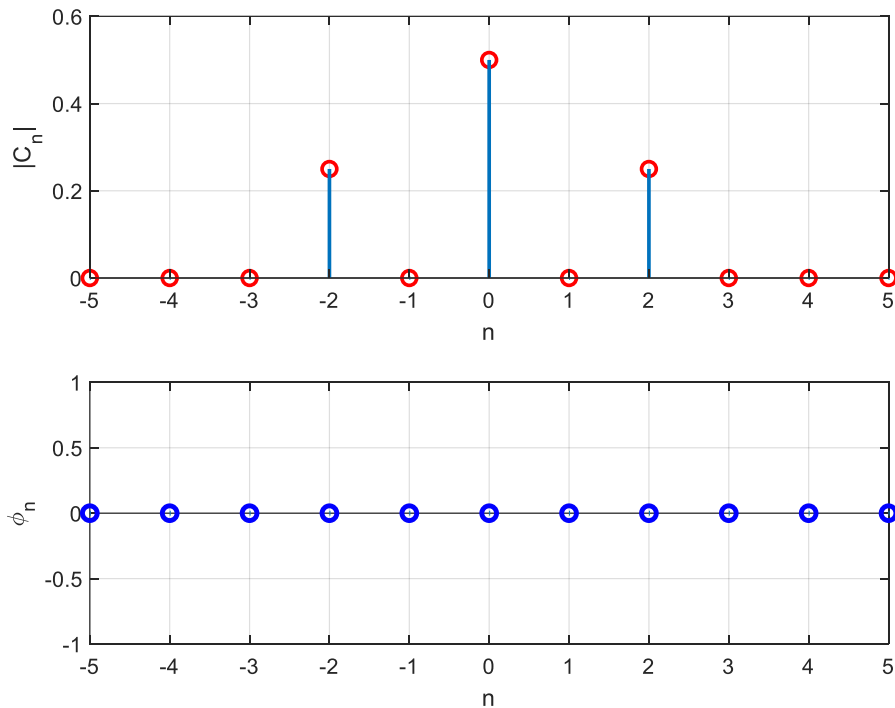
$$C_{-n} = \frac{1}{2}P_n e^{j\theta_n} \Rightarrow C_{-2} = \frac{1}{2}P_2 e^{j0} = \frac{A}{4}$$

$$C_0 = P_0 = \frac{A}{2}$$

$$\varphi_n = -\theta_n \Rightarrow \varphi_n = 0$$

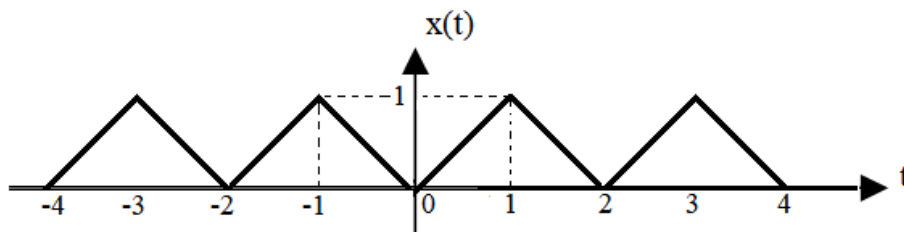
Spectres de module et de phase (spectres bilatéraux) :

On prend $A = 1$:



Exercice 2 :

On considère le signal périodique $x(t)$ représenté sur la figure suivante :



1. Donner l'expression du signal $x(t)$ sur une période T , en déduire la pulsation propre ω .
2. Décomposer ce signal en série de Fourier trigonométrique.
3. En déduire les formes complexe et polaire.
4. Tracer les spectres de module et phase bilatéraux et unilatéraux pour $n = 0, 1, 2, 3$.

Solution :

$$1. x(t) = |t|, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ -t, & -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

$$T = 2s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

2. S.F.T :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 (-t) dt + \int_0^1 t dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left. \frac{-t^2}{2} \right|_{-1}^0 + \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 \right) \right]$$

$A_0 = \frac{1}{2}$; c'est la valeur moyenne du signal

$x(t)$ est un signal pair alors : $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$= \frac{2}{2} \left[\underbrace{\int_{-1}^0 (-t) \cos(n\omega t) dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 t \cos(n\omega t) dt}_{I_2} \right]$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 (-t) \cos(n\omega t) dt = \int_0^1 t \cos(n\omega t) dt = I_2$$

$$a_n = 2 \cdot I_1 = \int_0^1 2t \cos(n\omega t) dt$$

C'est un intégral par partie :

$$\begin{cases} u = 2t \rightarrow u' = 2 \\ v' = \cos(n\omega t) \rightarrow v = \frac{1}{n\omega} \sin(n\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2t}{n\omega} \cdot \sin(n\omega t) \Big|_0^1 - \left(\frac{2}{n\omega}\right) \cdot \int_0^1 \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2t}{n\omega} \cdot \sin(n\omega t) \Big|_0^1 + \frac{2}{(n\omega)^2} \cdot \cos(n\omega t) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{n\pi} (\sin(n\pi) - 0) + \frac{2}{(n\pi)^2} (\cos(n\pi) - \cos(0)) \end{aligned}$$

On a : $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$a_n = \frac{2}{(n\pi)^2} ((-1)^n - 1)$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-4}{(n\pi)^2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n\pi)^2} ((-1)^n - 1) \cos(n\pi t)$$

$$x(t) = \frac{A}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{((2k+1)\pi)^2} \cos((2k+1)\pi t)$$

3. S.F.C :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

$$C_0 = A_0 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{(n\pi)^2} ((-1)^n - 1) - j \cdot 0 \right] \\ &= \frac{1}{(n\pi)^2} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-2}{(n\pi)^2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

S.F.P :

$$x(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

$$P_0 = A_0 = \frac{1}{2}$$

$$P_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{a_n^2}$$

$$P_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{(n\pi)^2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Ou bien :

$$P_0 = C_0 = \frac{1}{2}$$

$$P_n = 2|C_n|$$

$$P_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{(n\pi)^2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

4. Spectres de module et phase :

✚ Spectres bilatéraux :

$$C_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow |C_0| = \frac{1}{2}$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-2}{(n\pi)^2}, & n = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow |C_n| = |C_{-n}| = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2}{n^2\pi^2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Le spectre de module est pair.

$$\varphi_n = \text{Arg}(C_n)$$

$$C_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = 0 \text{ (Parce que } C_0 \text{ est réel positif)}$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-2}{(n\pi)^2}, & n = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \pm\pi, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

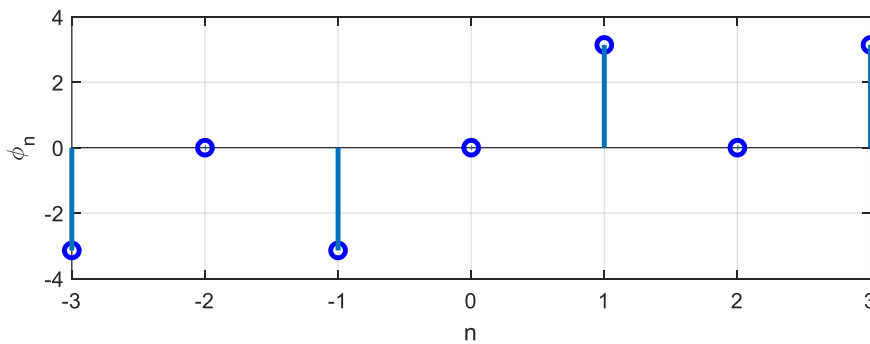
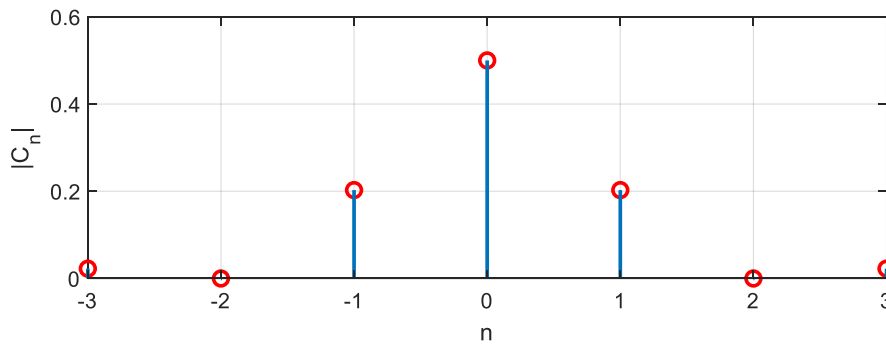
(Si C_n est nul alors φ_n est nul, si C_n est réel négatif alors $\varphi_n = \pm\pi$)

$$C_{-n} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-2}{(-n\pi)^2}, & n = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi_{-n} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \mp\pi, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

(Si C_{-n} est nul alors φ_{-n} est nul, si C_{-n} est réel négatif alors $\varphi_{-n} = \mp\pi$)

Le spectre de phase est impair donc il faut choisir $\varphi_n = -\varphi_{-n}$

n	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$ C_n $...	$\frac{2}{9\pi^2}$	0	$\frac{2}{\pi^2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi^2}$	0	$\frac{2}{9\pi^2}$...
φ_n	...	$-\pi$	0	$-\pi$	0	π	0	π	...



✚ Spectres unilatéraux :

$$P_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow |P_0| = \frac{1}{2}$$

$$P_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{(n\pi)^2}, & n = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow |P_n| = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{n^2\pi^2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_0 = 0$$

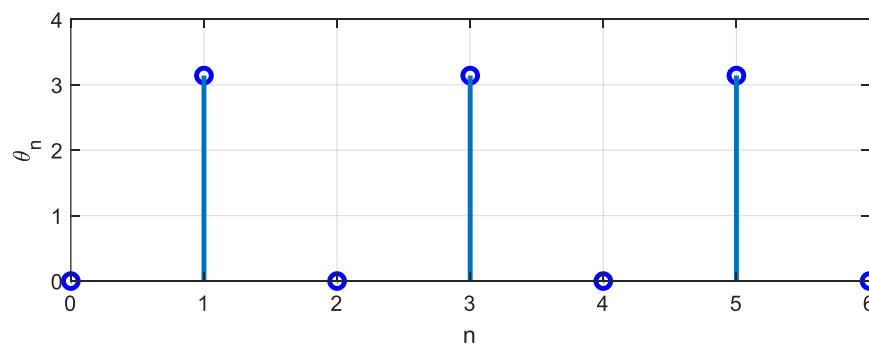
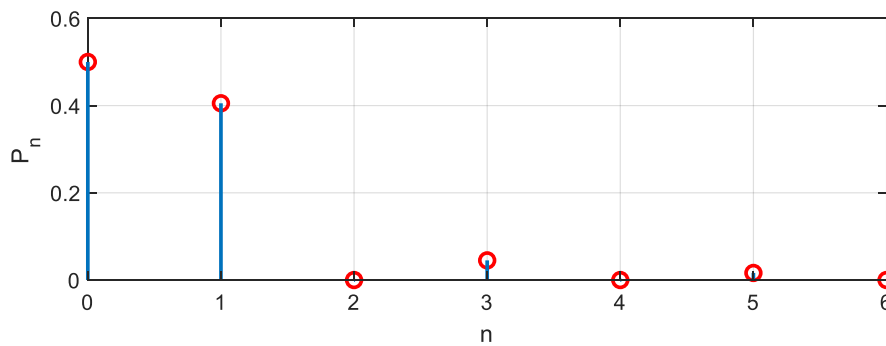
$$\theta_n = \text{Arctg} \left(\frac{b_n}{a_n} \right)$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-4}{(n\pi)^2}, & n = 2k + 1 \end{cases} \text{ et } b_n = 0$$

$$P_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{(n\pi)^2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

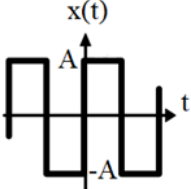
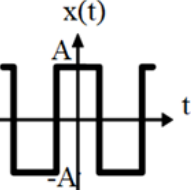
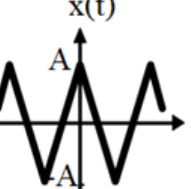
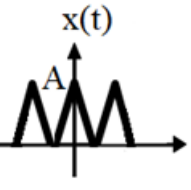
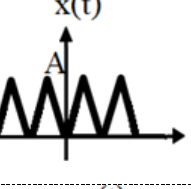
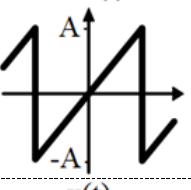
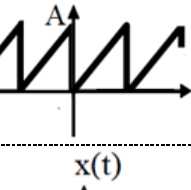
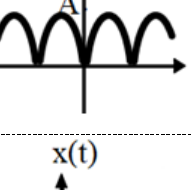
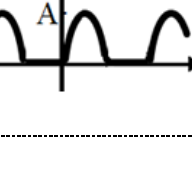
$$\begin{cases} \cos(\theta_n) = \frac{a_n}{P_n} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -1, & n = 2k + 1 \end{cases} \\ \sin(\theta_n) = \frac{b_n}{P_n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \pi, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{\pi^2}$	0	$\frac{4}{9\pi^2}$	0	$\frac{4}{25\pi^2}$	0	$\frac{4}{49\pi^2}$	0
θ_n	0	π	0	π	0	π	0	π	...



II.5. Série de Fourier de quelques signaux périodiques

Les séries de Fourier de certains signaux périodiques sont présentées dans le tableau suivant :

Signal $x(t)$	Expression de $x(t)$	Série de Fourier (Forme Trigonométrique)
	$\begin{cases} A; & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -A; & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$	$x(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin(2\pi(2k+1)f_0t)$
	$\begin{cases} A; & -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} \\ -A; & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \end{cases}$	$x(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cos(2\pi(2k+1)f_0t)$
	$\begin{cases} -\frac{4A}{T}t + A; & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{4A}{T}t + A; & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \end{cases}$	$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2\pi(2k+1)f_0t)$
	$\begin{cases} -\frac{2A}{T}t + A; & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{2A}{T}t + A; & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \end{cases}$	$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2\pi(2k+1)f_0t)$
	$\begin{cases} -\frac{2A}{T}t; & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{2A}{T}t; & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \end{cases}$	$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2\pi(2k+1)f_0t)$
	$\frac{2A}{T}t; \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$	$x(t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(2\pi k f_0 t)$
	$\frac{A}{T}t; \quad 0 \leq t \leq T$	$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi k f_0 t)$
	$ A \cdot \sin(\omega_0 t) ; \quad 0 \leq t \leq T$	$x(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2\pi 2k f_0 t)$
	$\begin{cases} A \cdot \sin(\omega_0 t); & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & ; \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$	$x(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin(2\pi f_0 t) - \frac{A}{\pi} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{((-1)^k + 1)}{k^2 - 1} \cos(2\pi k f_0 t)$

III. Transformée de Fourier

La transformée de Fourier s'applique aux signaux non périodiques (signaux d'énergie finie), elle effectue le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel.

III.1. Définition

On définit la transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ par :

$$TF\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

La transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$TF^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

$$x(t) = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Condition d'existence :

La T.F existe si la condition de Dirichlet est vérifiée (suffisante et non nécessaire) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| < \infty$$

❖ Spectres de module et de phase

$X(f)$ est une fonction de f , généralement complexe :

$$X(f) = \text{Re}\{X(f)\} + j\text{Im}\{X(f)\} = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$$

$$X(f) = |X(f)| \cos(\varphi(f)) + j \cdot |X(f)| \sin(\varphi(f))$$

Où : $|X(f)|$ et $\varphi(f)$ sont respectivement le module et la phase de $X(f)$ avec :

$$|X(f)| = \sqrt{(\text{Re}\{X(f)\})^2 + (\text{Im}\{X(f)\})^2}$$

$$\varphi(f) = \text{Arctg} \left(\frac{\text{Im}\{X(f)\}}{\text{Re}\{X(f)\}} \right)$$

Le spectre de module est pair et le spectre de phase est impair.

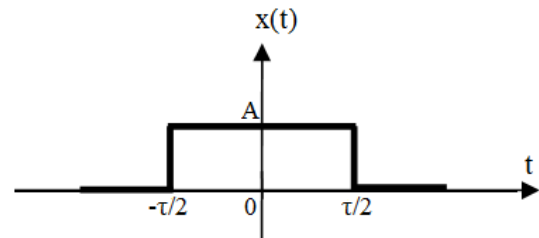
Exemple :

Calculer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ puis tracer leurs spectres de module et de phase :

$$x(t) = A \cdot \text{rect} \left(\frac{t}{\tau} \right)$$

Solution :

$$x(t) = A \cdot \text{rect} \left(\frac{t}{\tau} \right) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

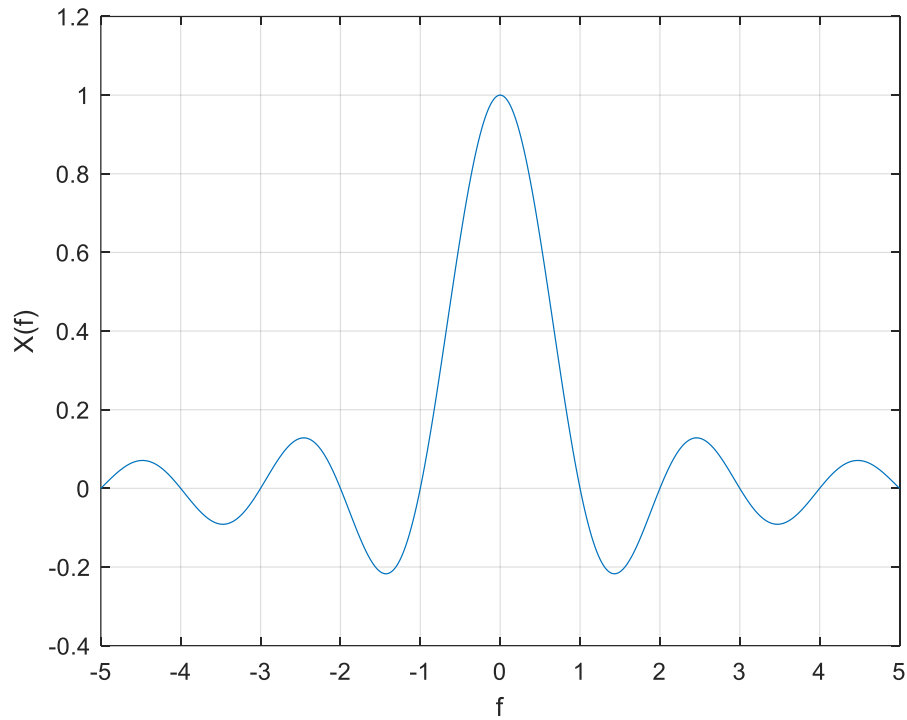


On calcule la transformée de Fourier du signal $x(t)$:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{-A}{j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{-A}{j2\pi f} \cdot \left(e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{+j2\pi f \frac{\tau}{2}} \right) \\ &= \frac{A}{j2\pi f} \cdot \left(e^{j\pi f \tau} - e^{-j\pi f \tau} \right) \\ &= \frac{A}{\pi f} \cdot \frac{(e^{j\pi f \tau} - e^{-j\pi f \tau})}{2j} \\ &= \frac{A}{\pi f} \cdot \sin(\pi f \tau) \cdot \frac{\tau}{\tau} \\ &= A\tau \cdot \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \end{aligned}$$

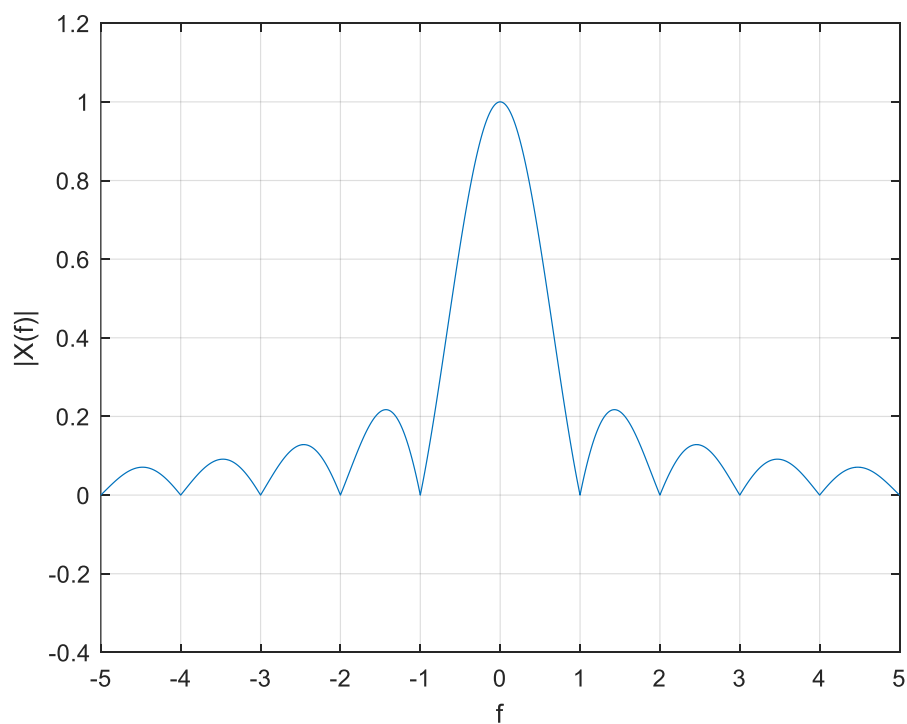
$$X(f) = A\tau \cdot \text{sinc}(f\tau)$$

Si : $A = \tau = 1 \Rightarrow X(f) = \text{sinc}(f)$



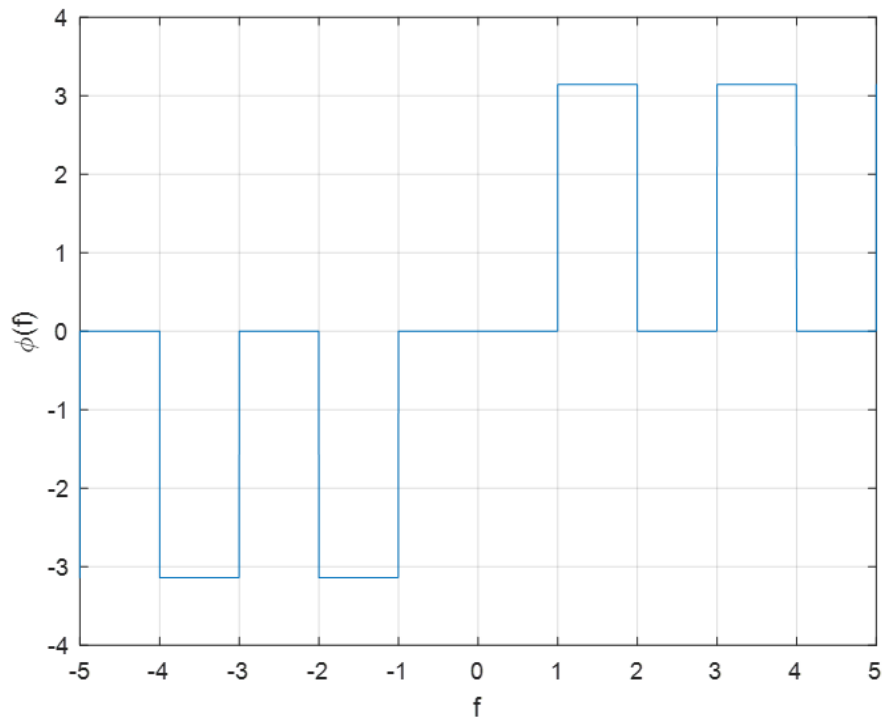
Spectre de module :

$X(f)$ est purement réel alors le module de $X(f)$ est toujours positif



Spectre de phase :

Si $X(f)$ est positif alors $\varphi = 0$, si $X(f)$ est négatif alors $\varphi = \pm\pi$



Cas particuliers :

$$TF\{\delta(t)\} = 1$$

$$TF\{1\} = \delta(f)$$

$$TF\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0}$$

$$TF\{e^{\pm j2\pi f_0 t}\} = \delta(f \mp f_0)$$

Exemple :

Calculer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ puis tracer leurs spectres de module et de phase :

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

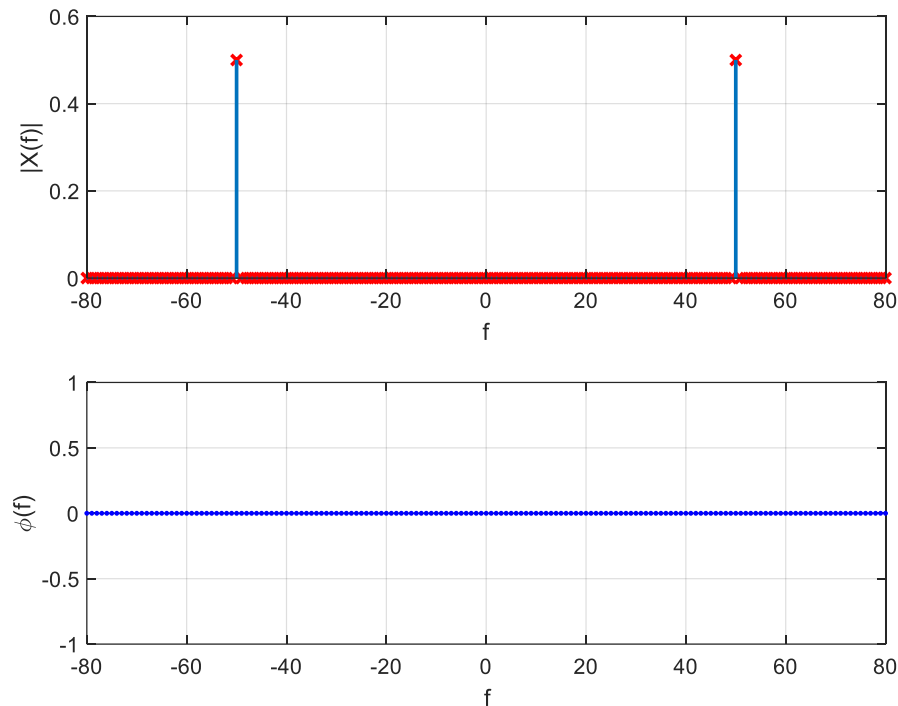
Solution :

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t) = A \left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right)$$

$$X(f) = \frac{A}{2} TF\{e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{A}{2} TF\{e^{-j2\pi f_0 t}\}$$

$$X(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$

On prend : $A = 1$ et $f_0 = 50$ Hz :



III.2. Propriétés de la transformée de Fourier

➤ Linéarité :

$$\alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t) \xrightarrow{T.F} \alpha \cdot X(f) + \beta \cdot Y(f)$$

➤ Translation temporelle :

$$x(t - t_0) \xrightarrow{T.F} e^{-j2\pi f t_0} \cdot X(f)$$

➤ Translation fréquentielle :

$$X(f - f_0) \xrightarrow{T.F^{-1}} e^{j2\pi f_0 t} \cdot x(t)$$

➤ Conjugaison :

$$x^*(\pm t) \xrightarrow{T.F} X^*(\mp f)$$

➤ Dérivation temporelle :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{T.F} (j2\pi f)^n \cdot X(f)$$

➤ Dérivation fréquentielle :

$$\frac{d^n X(f)}{df^n} \xrightarrow{T.F^{-1}} (-j2\pi t)^n \cdot x(t)$$

- Intégration temporelle :

$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \xrightarrow{T.F} \frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f) + \frac{1}{2} \cdot X(0) \cdot \delta(f)$$

- Intégration fréquentielle :

$$\int_{-\infty}^f X(f) df \xrightarrow{T.F^{-1}} \frac{-1}{j2\pi t} \cdot x(t)$$

- Changement d'échelle :

$$x(at) \xrightarrow{T.F} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right), \quad a \neq 0$$

- L'inverse :

$$x(-t) \xrightarrow{T.F} X(-f)$$

- Dualité (symétrie) :

$$X(t) \xrightarrow{T.F} x(-f)$$

- Convolution :

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{T.F} X(f) \cdot Y(f)$$

$$x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{T.F} X(f) * Y(f)$$

Exemple 1 :

Soit le signal analogique suivant : $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ avec :

$$x_1(t) = e^{-t} \cdot u(t) \quad \& \quad x_2(t) = e^t \cdot u(-t)$$

1. Représenter les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
2. Calculer la transformée de Fourier du signal $x(t)$.
3. Tracer le spectre de module et de phase du signal $x(t)$.

Solution :

1. Représentation graphique des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$x_1(t) = e^{-t} \cdot u(t) = \begin{cases} e^{-t}; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$$

$$x_2(t) = e^t \cdot u(-t) = \begin{cases} 0 & ; t \geq 0 \\ e^t & ; t < 0 \end{cases}$$



2. La transformée de Fourier du signal $x(t)$:

En utilisant la propriété de la linéarité : $\alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t) \xrightarrow{T.F.} \alpha \cdot X(f) + \beta \cdot Y(f)$, donc :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(1+j2\pi f)t} dt \\ &= \frac{-1}{1+j2\pi f} \cdot e^{-(1+j2\pi f)t} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{-1}{1+j2\pi f} \cdot (0 - 1) \end{aligned}$$

$$X_1(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

On voit que $x_2(t) = x_1(-t)$, donc on utilise la propriété de l'inverse : $x(-t) \xrightarrow{T.F.} X(-f)$

$$X_2(f) = X_1(-f)$$

$$X_2(f) = \frac{1}{1+j2\pi(-f)}$$

$$X_2(f) = \frac{1}{1-j2\pi f}$$

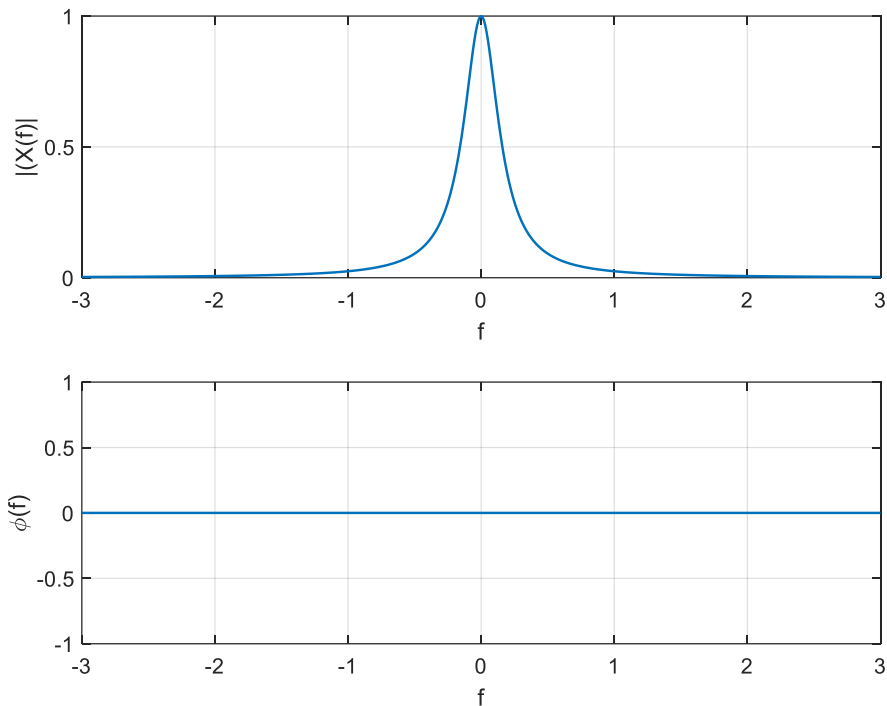
$$X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{1-j2\pi f}$$

$$X(f) = \frac{1-j2\pi f + 1+j2\pi f}{(1+j2\pi f)(1-j2\pi f)}$$

$$X(f) = \frac{2}{1+4\pi^2 f^2}$$

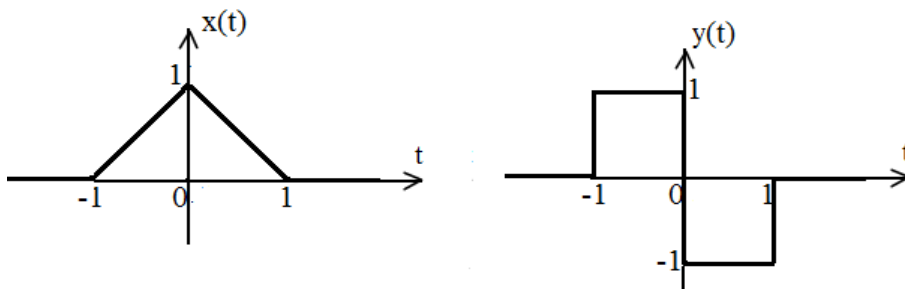
3. Spectre de module et de phase du signal $x(t)$.

$X(f)$ est purement réel positif alors $|X(f)| = X(f)$ et $\varphi = 0$.



Exemple 2 :

Soit les deux signaux analogiques $x(t)$ et $y(t)$ représentés par les figures ci-dessous :



1. Trouver la relation mathématique liant $y(t)$ à $x(t)$.

2. En utilisant les propriétés de la T.F et sachant que : $TF \left\{ A \cdot \text{rect} \left(\frac{t}{\tau} \right) \right\} = A\tau \cdot \text{sinc}(\tau f)$, calculer $X(f)$ et $Y(f)$ les transformées de Fourier respectives de $x(t)$ et $y(t)$.

Solution :

1. Relation mathématique liant $y(t)$ à $x(t)$:

On voit que : $x(t) = \int y(t) dt$, ou bien : $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

2. $X(f)$ et $Y(f)$:

On a : $TF \left\{ A \cdot \text{rect} \left(\frac{t}{\tau} \right) \right\} = A\tau \cdot \text{sinc}(\tau f) \Rightarrow TF\{\text{rect}(t)\} = \text{sinc}(f)$

$$y(t) = \text{rect} \left(t + \frac{1}{2} \right) - \text{rect} \left(t - \frac{1}{2} \right)$$

En utilisant la propriété de décalage : $x(t - t_0) \xrightarrow{T.F} e^{-j2\pi f t_0} \cdot X(f)$

$$Y(f) = e^{+j2\pi f \frac{1}{2}} \cdot \text{sinc}(f) - e^{-j2\pi f \frac{1}{2}} \cdot \text{sinc}(f)$$

$$= (e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}) \cdot \text{sinc}(f)$$

$$= (2j \cdot \sin(\pi f)) \cdot \text{sinc}(f) \cdot \frac{\pi f}{\pi f}$$

$$= j2\pi f \cdot \text{sinc}(f) \cdot \text{sinc}(f)$$

$$Y(f) = j2\pi f \cdot \text{sinc}^2(f)$$

$$x(t) = \int y(t) dt$$

En utilisant la propriété de l'intégral : $\int_{-\infty}^t x(t) dt \xrightarrow{T.F} \frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f) + \frac{1}{2} \cdot X(0) \cdot \delta(f)$

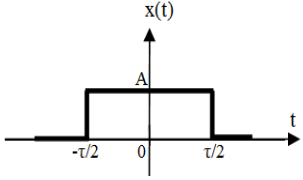
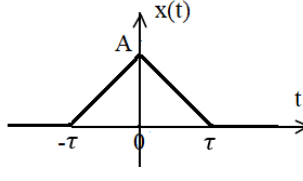
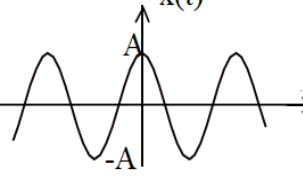
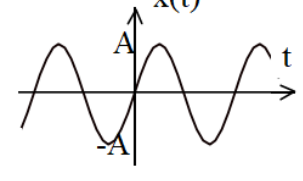
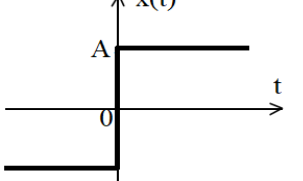
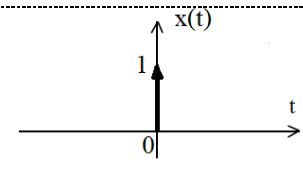
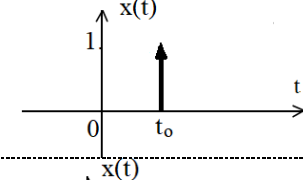
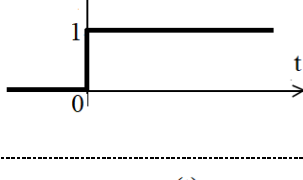
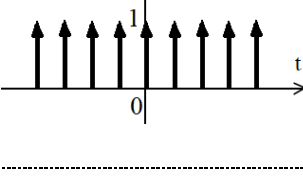
$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f} \cdot Y(f) + \frac{1}{2} \cdot \overset{0}{\cancel{Y(0)}} \cdot \delta(f)$$

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f} \cdot j2\pi f \cdot \text{sinc}^2(f)$$

$$X(f) = \text{sinc}^2(f)$$

III.3. Transformée de Fourier de quelques signaux

Les transformées de Fourier de certains signaux sont présentées dans le tableau suivant :

Signal $x(t)$	Expression de $x(t)$	Transformée de Fourier
	$A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$A\tau \cdot \text{sinc}(\tau f)$
	$A \cdot \text{tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$A\tau \cdot \text{sinc}^2(\tau f)$
	$A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{A}{2} \cdot \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \cdot \delta(f + f_0)$
	$A \cdot \sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{A}{2j} \cdot \delta(f - f_0) - \frac{A}{2j} \cdot \delta(f + f_0)$
	$A \cdot \text{sgn}(t)$	$\frac{A}{j\pi f}$
	$\delta(t)$	1
	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
	$u(t)$	$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0)$

IV. Théorème de Parseval

IV.1. Théorème de Parseval pour la série de Fourier (signaux périodiques)

Soit un signal périodique $x(t)$ décomposable en série de Fourier Trigonométrique :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

La puissance moyenne de $x(t)$:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t) dt$$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T A_0 \cdot x(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \left[\sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \right] dt$$

$$P_x = A_0 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cdot \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$P_x = A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^2}{2}$$

$$P_x = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

C'est la forme trigonométrique de l'égalité de Parseval.

$$P_x = P_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} P_n^2$$

C'est la forme polaire de l'égalité de Parseval.

La forme complexe :

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x^*(t) dt$$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} \right] \cdot x^*(t) dt$$

$$P_x = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_0^T x^*(t) \cdot e^{jn\omega t} dt$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \overline{x(t) \cdot e^{-jn\omega t}} dt$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot \overline{C_n}$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^2$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{-1} |C_n|^2 + |C_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2$$

$$P_x = \sum_{n=1}^{+\infty} |C_{-n}|^2 + |C_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2$$

Si $x(t)$ est réel : $|C_n| = |C_{-n}|$

$$P_x = |C_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2$$

C'est la forme complexe de l'égalité de Parseval.

Exemple :

En utilisant les trois formes du théorème de Parseval pour les signaux périodiques, calculer la puissance moyenne du signal suivant :

$$x(t) = A \cdot \cos^2(\omega t) ; A = 1, T = 1s$$

Solution :

La forme trigonométrique :

On a trouvé : $A_0 = \frac{A}{2}$; $a_2 = \frac{A}{2}$; $b_n = 0$ et $a_n = 0, \forall n \neq 2$

$$P_x = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$P_x = A_0^2 + \frac{1}{2} a_2^2$$

$$P_x = \frac{3}{8} \text{ Watt}$$

La forme polaire :

On a trouvé : $P_0 = \frac{A}{2}$; $P_2 = \frac{A}{2}$; $\theta_2 = 0$ et $P_n = 0, \forall n \neq 2$; $\theta_n = 0$

$$P_x = P_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} P_n^2$$

$$P_x = P_0^2 + \frac{1}{2} P_2^2$$

$$P_x = \frac{3}{8} \text{ Watt}$$

La forme complexe :

On a trouvé : $C_{-2} = C_2 = \frac{A}{4}$; $C_0 = \frac{A}{2}$ et $C_n = 0 \forall n \neq \pm 2$

$$P_x = |C_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2$$

$$P_x = |C_0|^2 + 2|C_2|^2$$

$$P_x = \frac{3}{8} \text{ Watt}$$

IV.2. Théorème de Parseval pour la transformée de Fourier (signaux apériodiques)

L'énergie d'un signal $x(t)$ est :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) e^{-j2\pi ft} df$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) e^{-j2\pi ft} df \cdot dt$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \cdot df$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \cdot X(f) \cdot df$$

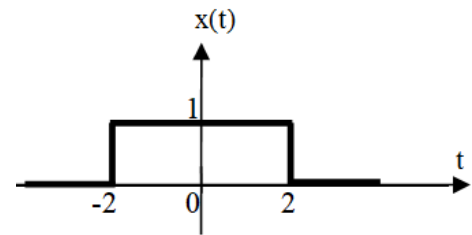
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \cdot df$$

C'est l'énergie fréquentielle du signal $x(t)$.

$|X(f)|^2$: s'appelle la densité spectrale d'énergie du signal $x(t)$.

Exemple :

En utilisant le théorème de Parseval pour les signaux non périodiques, calculer l'énergie du signal représenté ci-contre puis déduire sa densité spectrale d'énergie *DSE*.



Solution :

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$$

$$\text{On a : } TF \left\{ A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \right\} = A\tau \cdot \text{sinc}(\tau f) \Rightarrow TF \left\{ \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right) \right\} = 4 \cdot \text{sinc}(4f)$$

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 16 \cdot \text{sinc}^2(4f) df \end{aligned}$$

L'une des propriétés de la fonction sinus cardinal est : $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(f) df = 1$

$$\text{On pose : } f' = 4f \Rightarrow df = \frac{1}{4} df'$$

$$E_x = \frac{16}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(f') df'$$

$$E_x = 4 \text{ Joules}$$

$$DSE = |X(f)|^2$$

$$DSE = 16 \cdot \text{sinc}^2(4f).$$

Chapitre IV

Transformée de Laplace

I. Introduction

L'analyse temporelle des circuits linéaires en régime transitoire nécessite la résolution des équations différentielles. Pour cela, nous allons introduire un outil mathématique puissant : La transformation de Laplace ; elle permet de remplacer les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques. Cette propriété facilite la résolution des équations différentielles.

II. Transformée de Laplace

II.1. Définition

On appelle la transformée de Laplace bilatéral d'une fonction $f(t)$, la fonction de variable complexe $F(p)$ noté $\mathcal{L}\{f(t)\}$ telle que :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

p est opérateur de Laplace indépendant du temps où : $p = \sigma + j\omega$

Condition d'existence

$F(p)$ existe si $f(t)$ est causal, c.à.d. $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Donc, la transformée de Laplace devient la transformée de Laplace unilatéral :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

$F(p)$ est la transformée de Laplace ou l'image de $f(t)$.

$f(t)$ est l'originale de $F(p)$.

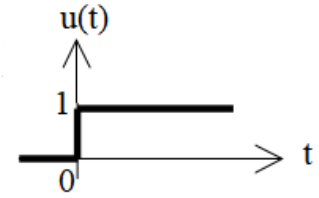
Exemple :

Calculer la transformée de Laplace des fonctions causales suivantes :

1. $f_1(t) = u(t)$
2. $f_2(t) = r(t)$
3. $f_3(t) = e^{-at} \cdot u(t)$
4. $f_4(t) = \cos(\omega t)$

Solution :

$$1. f_1(t) = u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$F_1(p) = \mathcal{L}\{f_1(t)\} = \int_0^{+\infty} f_1(t)e^{-pt} dt$$

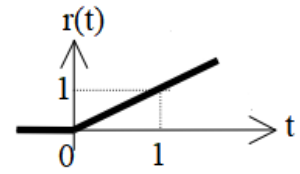
$$= \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt$$

$$= \frac{-1}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{p} \cdot (0 - 1)$$

$$F_1(p) = \frac{1}{p}$$

$$2. f_2(t) = r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$F_2(p) = \mathcal{L}\{f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} f_2(t)e^{-pt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-pt} dt$$

C'est un intégral par partie :

$$\begin{cases} u = t \rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-pt} \rightarrow v = \frac{-1}{p} e^{-pt} \end{cases}$$

$$F_2(p) = \frac{-t}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-1}{p} e^{-pt} dt$$

$$F_2(p) = \frac{-t}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{p^2} \cdot e^{-pt} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{p^2} \cdot (0 - 1)$$

$$F_1(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$3. f_3(t) = e^{-at} \cdot u(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$F_3(p) = \mathcal{L}\{f_3(t)\} = \int_0^{+\infty} f_3(t) e^{-pt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-pt} dt$$

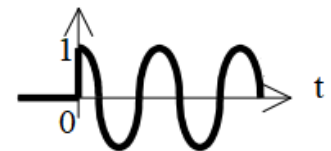
$$= \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} dt$$

$$= \frac{-1}{p+a} \cdot e^{-(p+a)t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{p+a} \cdot (0 - 1)$$

$$F_3(p) = \frac{1}{p+a}$$

$$4. f_4(t) = \cos(\omega t)$$



$$\text{On a : } \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$F_4(p) = \mathcal{L}\{f_4(t)\} = \int_0^{+\infty} f_4(t) e^{-pt} dt$$

$$= \frac{1}{2} [\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} + \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}]$$

On a trouvé précédemment que : $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{p+a}$, alors :

$$F_4(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right]$$

$$F_4(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{p+j\omega + p-j\omega}{p^2 - (j\omega)^2} \right]$$

$$F_4(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

II.2. Table de la Transformée de Laplace

Les transformées de Laplace de certains signaux utiles sont présentées dans le tableau suivant :

$f(t), t \geq 0$	$F(p)$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Echelon unitaire $u(t)$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n \cdot e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

$f(t), t \geq 0$	$F(p)$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

II.3. Propriétés de la transformée de Laplace

- Linéarité :

$$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t) \xrightarrow{T.L} \alpha \cdot F(p) + \beta \cdot G(p)$$

- Translation temporelle :

$$f(t - t_0) \xrightarrow{T.L} e^{-pt_0} \cdot F(p)$$

- Translation fréquentielle (Fonction amortie) :

$$F(p - a) \xrightarrow{T.L^{-1}} e^{at} \cdot f(t)$$

$$e^{-at} \cdot f(t) \xrightarrow{T.L} F(p + a)$$

- Dérivation temporelle :

$$\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{T.L} p \cdot F(p) - f(0)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \xrightarrow{T.L} p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$$

- Dérivation fréquentielle (Multiplication par t^n) :

$$t \cdot f(t) \xrightarrow{T.L^{-1}} - \frac{dF(p)}{dp}$$

$$t^n \cdot f(t) \xrightarrow{T.L^{-1}} (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

- Intégration temporelle :

$$\int_0^\infty f(t) dt \xrightarrow{T.L} \frac{1}{p} \cdot F(p) + \frac{1}{2} \cdot G(0); \quad g(t) = \int f(t) dt$$

- Intégration fréquentielle :

$$\int_0^\infty F(p) dp \xrightarrow{T.L^{-1}} \frac{1}{t} \cdot f(t)$$

- Changement d'échelle :

$$f(at) \xrightarrow{T.F} \frac{1}{|a|} \cdot F\left(\frac{f}{a}\right), \quad a \neq 0$$

$$f\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{T.L} a \cdot F(ap), \quad a \neq 0$$

- Convolution :

$$f(t) * g(t) \xrightarrow{T.L} F(f) \cdot G(f)$$

$$f(t) \cdot g(t) \xrightarrow{T.L} F(f) * G(f)$$

- Théorème de la valeur initiale :

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$$

- Théorème de la valeur finale :

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

III. Transformée inverse de Laplace

III.1. Définition

On peut exprimer la Transformée inverse de Laplace, en utilisant les intégrales de Fourier et de Melin-Fourier. Si $F(p)$ est la Transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, on a :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p) \cdot e^{pt} dp, t > 0$$

Où c : est une constante, appelée abscisse de convergence ; cette méthode est difficile à utiliser et on préfère d'autres méthodes.

III.2. Méthode de calcul

En pratique, les transformées de Laplace sont des fractions rationnelles, il suffit de les décomposer en fractions simples et d'utiliser la propriété linéaire de la table de Laplace :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a + b \cdot p + c \cdot p^2 + \dots + k \cdot p^m}{a' + b' \cdot p + c' \cdot p^2 + \dots + k' \cdot p^n}$$

$N(p)$ est le numérateur de m degré, $D(p)$ est le dénominateur de n degré, on général $n \geq m$

Les racines de $N(p)$ sont appelées les zéros de $F(p)$.

Les racines de $D(p)$ sont appelées les pôles de $F(p)$.

III.2.1. Décomposition en éléments simples (pôles simples distinctes)

Si $D(p)$ contient des pôles simples et distinctes, on peut le décomposer en éléments simples sous la forme suivante (à condition que : $n > m$) :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a + b \cdot p + c \cdot p^2 + \dots + k \cdot p^m}{a' + b' \cdot p + c' \cdot p^2 + \dots + k' \cdot p^n}$$

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot (p - p_3) \dots (p - p_n)}$$

$$F(p) = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} + \frac{C}{p - p_3} + \dots + \frac{Z}{p - p_n}$$

A, B, C, \dots sont appelées les résidus, ils sont faciles à trouver :

$$A = F(p) \cdot (p - p_1)|_{p=p_1}$$

$$B = F(p) \cdot (p - p_2)|_{p=p_2}$$

$$C = F(p) \cdot (p - p_3)|_{p=p_3}$$

Exemple :

Calculer la transformée inverse de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

$$1. F_1(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$$

$$2. F_2(p) = \frac{1}{p^2+3p+2}$$

$$3. F_3(p) = \frac{p+1}{p^3+5p+6p}$$

Solution :

$$1. F_1(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$$

$$F_1(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

$$A = F_1(p) \cdot (p+1) \Big|_{p=-1}$$

$$A = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} \cdot (p+1) \Big|_{p=-1}$$

$$A = \frac{p+3}{p+2} \Big|_{p=-1}$$

$$A = \frac{-1+3}{-1+2}$$

$$A = 2$$

$$B = F_1(p) \cdot (p+2) \Big|_{p=-2}$$

$$B = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} \cdot (p+2) \Big|_{p=-2}$$

$$B = \frac{p+3}{p+1} \Big|_{p=-2}$$

$$B = \frac{-2+3}{-2+1}$$

$$B = -1$$

$$F_1(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\}$$

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}$$

$$f_1(t) = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}$$

On utilise directement la table des transformées de Laplace, on trouve :

$$f_1(t) = 2 \cdot e^{-t} - e^{-2t} = e^{-t}(2 - e^{-t}), \quad t \geq 0$$

$$2. \quad F_2(p) = \frac{1}{p^2+3p+2}$$

Les pôles de $F_2(p)$ sont : $p_1 = -1$ et $p_2 = -2$

$$F_2(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$F_2(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

$$A = F_2(p) \cdot (p+1) \Big|_{p=-1}$$

$$A = \frac{1}{\cancel{(p+1)}(p+2)} \cdot \cancel{(p+1)} \Big|_{p=-1}$$

$$A = \frac{1}{(p+2)} \Big|_{p=-1}$$

$$A = \frac{1}{-1+2}$$

$$A = 1$$

$$B = F_2(p) \cdot (p+2) \Big|_{p=-2}$$

$$B = \frac{1}{(p+1)\cancel{(p+2)}} \cdot \cancel{(p+2)} \Big|_{p=-2}$$

$$B = \frac{1}{(p+1)} \Big|_{p=-2}$$

$$B = \frac{1}{-2 + 1}$$

$$B = -1$$

$$F_2(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_2(p)\}$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}$$

On utilise directement la table des transformées de Laplace, on trouve :

$$f_2(t) = e^{-t} - e^{-2t} = e^{-t}(1 - e^{-t}), \quad t \geq 0$$

$$3. F_3(p) = \frac{p+1}{p^3+5p+6p}$$

Les pôles de $F_3(p)$ sont : $p_1 = 0$, $p_2 = -2$ et $p_3 = -3$

$$F_3(p) = \frac{p+1}{p(p+2)(p+3)}$$

$$F_3(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$$

$$A = F_3(p) \cdot p \Big|_{p=0}$$

$$A = \frac{p+1}{\cancel{p}(p+2)(p+3)} \cdot \cancel{p} \Big|_{p=0}$$

$$A = \frac{p+1}{(p+2)(p+3)} \Big|_{p=0}$$

$$A = \frac{1}{(2)(3)}$$

$$A = \frac{1}{6}$$

$$B = F_3(p) \cdot (p+2) \Big|_{p=-2}$$

$$B = \frac{p+1}{p(\cancel{p+2})(p+3)} \cdot (\cancel{p+2}) \Big|_{p=-2}$$

$$B = \left. \frac{p+1}{p(p+3)} \right|_{p=-2}$$

$$B = \frac{-2+1}{-2(-2+3)}$$

$$B = \frac{1}{2}$$

$$C = F_3(p) \cdot (p+3) \Big|_{p=-3}$$

$$C = \frac{p+1}{p(p+2)(p+3)} \cdot (p+3) \Big|_{p=-2}$$

$$C = \left. \frac{p+1}{p(p+2)} \right|_{p=-3}$$

$$C = \frac{-3+1}{-3(-3+2)}$$

$$C = \frac{-2}{3}$$

$$F_3(p) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p+3}$$

On utilise directement la table des transformées de Laplace, on trouve :

$$f_3(t) = \frac{1}{6}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

III.2.2. Pôles doubles ou multiples

Si $F(p)$ contient des pôles doubles (ou multiples), on peut le décomposer sous la forme suivante (toujours à condition que : $n > m$) :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a + b \cdot p + c \cdot p^2 + \dots + k \cdot p^m}{a' + b' \cdot p + c' \cdot p^2 + \dots + k' \cdot p^n}$$

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p-p_1)^k \cdot (p-p_2) \cdot (p-p_3) \dots (p-p_n)}$$

$$F(p) = \frac{A_k}{(p-p_1)^k} + \frac{A_{k-1}}{(p-p_1)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2} + \frac{C}{p-p_3} + \dots + \frac{Z}{p-p_n}$$

A_i : sont trouvés par la méthode suivante :

$$A_i = \frac{1}{r!} \left[\frac{d^r [F(p) \cdot (p - p_1)^k]}{dp^r} \right]_{p=p_1}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} r = 0, 1, 2, 3, \dots \\ i = k, k-1, k-2, \dots, 1 \end{cases}$$

B, C, \dots sont trouvés comme suit :

$$B = F(p) \cdot (p - p_2) \Big|_{p=p_2}$$

$$C = F(p) \cdot (p - p_3) \Big|_{p=p_3}$$

Exemple :

Calculer la transformée inverse de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

$$1. F_1(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$$

$$2. F_2(p) = \frac{p^2+2p+3}{(p+1)^3}$$

$$3. F_3(p) = \frac{3p}{p^2+4p+4}$$

Solution :

$$1. F_1(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$$

On voit que $F_1(p)$ contient un pôle double : $p_1 = -1$ et un pôle simple : $p_1 = -2$, alors on peut écrire $F_1(p)$ sous la forme suivante :

$$F_1(p) = \frac{A_2}{(p+1)^2} + \frac{A_1}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

A_2, A_1 : sont calculés comme suit :

$$A_2 = \frac{1}{0!} \left[\frac{d^0 [F_1(p) \cdot (p+1)^2]}{dp^0} \right]_{p=-1}$$

$$A_2 = F_1(p) \cdot (p+1)^2 \Big|_{p=-1}$$

$$A_2 = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)} \cdot (p+1)^2 \Big|_{p=-1}$$

$$A_2 = \frac{1}{(p+2)} \Big|_{p=-1}$$

$$A_2 = 1$$

$$A_1 = \frac{1}{1!} \left[\frac{d[F_1(p) \cdot (p+1)^2]}{dp} \Big|_{p=-1} \right]$$

$$A_1 = \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{(p+1)^2(p+2)} \cdot (p+1)^2 \right) \Big|_{p=-1}$$

$$A_1 = \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{(p+2)} \right) \Big|_{p=-1}$$

$$A_1 = \frac{-1}{(p+2)^2} \Big|_{p=-1}$$

$$A_1 = -1$$

$$B = F_1(p) \cdot (p+2) \Big|_{p=-2}$$

$$B = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)} \cdot (p+2) \Big|_{p=-2}$$

$$B = \frac{1}{(p+1)^2} \Big|_{p=-2}$$

$$B = \frac{1}{(-2+1)^2}$$

$$B = 1$$

$$F_1(p) = \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}$$

On utilise directement la table des transformées de Laplace, on trouve :

$$f_1(t) = te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

$$2. F_2(p) = \frac{p^2+2p+3}{(p+1)^3}$$

$F_2(p)$ contient un seul pôle triple : $p_1 = -1$, alors on peut écrire $F_2(p)$ sous la forme suivante :

$$F_2(p) = \frac{A_3}{(p+1)^3} + \frac{A_2}{(p+1)^2} + \frac{A_1}{p+1}$$

A_3, A_2, A_1 sont calculés comme suit :

$$A_3 = \frac{1}{0!} \left[\frac{d^0 [F_2(p) \cdot (p+1)^3]}{dp^0} \right]_{p=-1}$$

$$A_3 = F_2(p) \cdot (p+1)^3 \Big|_{p=-1}$$

$$A_3 = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p+1)^3} \cdot (p+1)^3 \Big|_{p=-1}$$

$$A_3 = p^2 + 2p + 3 \Big|_{p=-1}$$

$$A_3 = 2$$

$$A_2 = \frac{1}{1!} \left[\frac{d[F_2(p) \cdot (p+1)^3]}{dp} \right]_{p=-1}$$

$$A_2 = \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2 + 2p + 3}{(p+1)^3} \cdot (p+1)^3 \right) \Big|_{p=-1}$$

$$A_2 = \frac{d}{dp} (p^2 + 2p + 3) \Big|_{p=-1}$$

$$A_2 = (2p + 2) \Big|_{p=-1}$$

$$A_2 = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 [F_2(p) \cdot (p+1)^3]}{dp^2} \right]_{p=-1}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{p^2 + 2p + 3}{(p+1)^3} \cdot (p+1)^3 \right) \right]_{p=-1}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dp^2} (p^2 + 2p + 3) \right]_{p=-1}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} [2]_{p=-1}$$

$$A_1 = 1$$

$$F_2(p) = \frac{2}{(p+1)^3} + \frac{1}{p+1}$$

On utilise directement la table des transformées de Laplace, on trouve :

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(p+1)^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\}, \quad t \geq 0$$

$$f_2(t) = t^2 e^{-t} + e^{-t}, \quad t \geq 0$$

$$3. F_3(p) = \frac{3p}{p^2+4p+4}$$

$F_3(p)$ contient un seul pôle double : $p_1 = -2$, alors on peut écrire $F_3(p)$ sous la forme suivante :

$$F_3(p) = \frac{3p}{(p+2)^2}$$

$$F_3(p) = \frac{A_2}{(p+2)^2} + \frac{A_1}{p+2}$$

A_2, A_1 sont calculés comme suit :

$$A_2 = \frac{1}{0!} [F_3(p) \cdot (p+2)^2]_{p=-2}$$

$$A_2 = \frac{3p}{(p+2)^2} \cdot (p+2)^2 \Big|_{p=-2}$$

$$A_2 = 3p|_{p=-2}$$

$$A_2 = -6$$

$$A_1 = \frac{1}{1!} \left[\frac{d[F_3(p) \cdot (p+2)^2]}{dp} \Big|_{p=-2} \right]$$

$$A_1 = \frac{d}{dp} \left(\frac{3p}{(p+2)^2} \cdot (p+2)^2 \right) \Big|_{p=-2}$$

$$A_1 = \frac{d(3p)}{dp} \Big|_{p=-2}$$

$$A_1 = 3|_{p=-2}$$

$$A_1 = 3$$

$$F_3(p) = \frac{-6}{(p+2)^2} + \frac{3}{p+2}$$

On utilise directement la table des transformées de Laplace, on trouve :

$$f_3(t) = -6 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}\right\} + 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}, \quad t \geq 0$$

$$f_3(t) = -6te^{-2t} + 3e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

III.2.3. Division euclidienne

Dans le cas où : $m \geq n$, il faut réécrire $F(p)$ en opérant une division euclidienne du numérateur $N(p)$ par le dénominateur $D(p)$ puis appliquer la méthode des fractions simples.

Exemple :

Calculer la transformée inverse de Laplace de la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{2p^2 + 7p + 8}{p^2 + 3p + 2}$$

Solution :

On voit que : $m \geq n$, donc il faut d'abord utiliser la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} \widehat{2p^2 + 7p + 8} & \widehat{p^2 + 3p + 2} \\ - & \hline 2p^2 + 6p + 4 & 2 \\ \hline & p + 4 \end{array}$$

$$F(p) = 2 + \frac{p+4}{p^2+3p+2}$$

On pose : $G(p) = \frac{p+4}{p^2+3p+2}$

Les pôles de $G(p)$ sont : $p_1 = -1$ et $p_2 = -2$, donc on peut écrire $F(p)$ sous la forme suivante :

$$F(p) = 2 + \frac{p+4}{(p+1)(p+2)}$$

$$F(p) = 2 + \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

$$A = G(p) \cdot (p+1)|_{p=-1}$$

$$A = \frac{p+4}{(p+1)(p+2)} \cdot (p+1) \Big|_{p=-1}$$

$$A = \frac{p+4}{p+2} \Big|_{p=-1}$$

$$A = \frac{-1+4}{-1+2}$$

$$A = 3$$

$$B = G(p) \cdot (p+2) \Big|_{p=-2}$$

$$B = \frac{p+4}{(p+1)(p+2)} \cdot (p+2) \Big|_{p=-2}$$

$$B = \frac{p+4}{p+1} \Big|_{p=-2}$$

$$B = -2$$

$$F(p) = 2 + \frac{3}{p+1} - \frac{2}{p+2}$$

$$f(t) = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{1\} + 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} - 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}, \quad t \geq 0$$

$$f(t) = 2 \cdot \delta(t) + 3e^{-t} - 2e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

Références

1. A. Ouahabi, Fondements théoriques du Signal, OPU, 1993.
2. F. de Coulon, Théorie et traitement des signaux, Edition PPUR. 2013.
3. B. Picinbono, Théorie des signaux et des systèmes avec problèmes résolus, Edition Bordas, 1989.
4. J. P. Delmas, Elément de théorie du signal : Les signaux déterministes, Collection pédagogique des télécoms, ELLIPSES, 1995.
5. M. Benidir, Théorie et Traitement du signal, tome 1 : Représentation des signaux et des systèmes - Cours et exercices corrigés, Dunod, 2004.
6. M. Benidir, Théorie et Traitement du signal, tome 2 : Méthodes de base pour l'analyse et le traitement du signal - Cours et exercices corrigés, Dunod, 2004.