Université de Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Télécommunications

Série de TD sur les guides d'ondes et fibres optiques

Exercice 1 :

Déterminer la fréquence de coupure du mode TE_{10} d'un guide d'onde rectangulaire (G.O.R), rempli d'air (vide) et de dimensions a =22,9cm et b=10,2cm.

Calculer son impédance caractéristique (impédance d'onde) à la fréquence 10 GHz.

Solution :

Dans un GOR : $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

Or $k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad \Rightarrow \quad \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$

Pour le mode TE_{10}, on a m=1 et n=0 ; et λ_c= 2a=c_0/f_c d'où f_c= $c_0/(2a)$=……

Pour les modes TE, $Z_c = \omega\mu/\beta_g = 2\pi f\mu_0/\beta_g$; avec f= 10GHz et $\mu_0 = 4\pi.\ 10^{-7}$ H/m

Il reste à calculer la constante de propagation longitudinale β_g.

Nous avons l'équation de dispersion : $k_c^2 = k^2 - \beta_g^2 \Rightarrow \beta_g^2 = k^2 - k_c^2$

D'où $\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$ avec $\lambda = c_0/f$ et λ_c= 2a=c_0/f_c

on déduit $\beta_g = 2\pi/\lambda_g$ =………

et puis $Z_c = \omega\mu/\beta_g$ =……………..

Exercice 2 :

On décide de limiter l'utilisation d'un (G.O.R) aux fréquences pour lesquelles il n'existe qu'un seul mode possible et f>1,25 f_c . Déterminer les dimensions d'un (G.O.R.) vide pouvant transmettre la bande de fréquence (3,75 – 5,5)GHz ; f_c étant la fréquence de coupure.

Solution :

Dans un GOR vide, si ses dimensions sont (a,b) tels que a>b, alors le premier mode (mode dominant ou fondamental) du GOR est le TE_{10} et le second mode (premier mode supérieur) est le TE_{01}.

Si l'on considère f_{c1} la fréquence de coupure du mode dominant (ici TE_{10}) et f_{c2} la fréquence de coupure du second mode (ici TE_{01}) ; alors la bande passante BP théorique pour un fonctionnement monomodal est : $BP_{theo}= f_{c2}-f_{c1}$.

Et la bande passante pratique est $BP_{pratique}= f_{c2}-1{,}25f_{c1}$.

$f_{c2}= c_0/(2b)$= fréquence de coupure du mode TE_{01}=5,5GHz d'où l'on déduit b :

$b= c_0/(2\ f_{c2})$=…….

$1{,}25f_{c1}= 1{,}25c_0/(2a)$= 1,25x fréquence de coupure du mode TE_{10}=3,75GHz d'où l'on déduit a : f_{c1}=3,75GHz/1,25=…….

Et $a= c_0/(2\ f_{c1})$=…………………………..

Exercice 3 :

La fréquence de coupure d'un mode de propagation dans un (G.O.R) vaut 143 MHz. Déterminer la fréquence, les vitesses de phase et de groupe, ainsi que l'impédance caractéristique respectivement pour un mode TE et un mode TM, pour β_g= 4rad/m.

Solution :

Pour un mode TE, on considère sa fréquence de coupure f_c= 143MHz et nous avons de plus β_g= 4rad/m ; d'où l'on déduit la fréquence f à partir de la relation :

$k_c^2 = k^2 - \beta_g^2 \Rightarrow k^2 = k_c^2 - \beta_g^2$ avec $k=2\pi/\lambda$ et $\lambda= c_0/f$ et $k_c=2\pi/\lambda_c$ et $\lambda_c=c_0/f_c$

Ensuite, on écrit : $Z_{TE}= Z_c= \omega\mu/\beta_g = 2\pi f\mu_0/\beta_g$=……..

Pour un mode TM, on considère sa fréquence de coupure f_c=143MHz et on trouve la même fréquence f.

On calcule ensuite $Z_{TM}= Z_c= \beta_g /(\omega\varepsilon) = \beta_g /(2\pi f\varepsilon_0)$=……..

avec $\varepsilon_0= 1/(36\pi.\ 10^{+9})$ en F/m

La vitesse de phase s'écrit : $v_f= \omega/\beta_g$=…….

On déduit ensuite la vitesse de groupe v_g, de la relation : $v_f.v_g=c_0^2$;

d'où $v_g=c_0^2/v_f$=………………………

Exercice 4 :

Un signal de 3GHz traversant une longueur de 2cm d'un (G.O.R) rempli d'un diélectrique (ε_r) non aimantable (μ_r=1), subi un déphasage de 288°. On sait de plus que la fréquence de coupure du (G.O.R) vide vaut 9GHz. Calculer la permittivité relative ε_r du diélectrique.

Solution :

Le déphasage dû à la propagation est représenté par l'exposant de propagation des champs ; soit $\varphi= \beta_g L$ avec L la longueur parcouru par le signal.

On a ici $\varphi= \beta_g L$=288°= π.288°/180° en rad ;

D'où $\beta_g= \varphi /L$ en rad/m

Dans ce guide, on connait f=3GHz et la fréquence f_{c0}=9GHz avec f_{c0} la fréquence de coupure du mode fondamental du GOR vide.

Si l'on pose f_c la fréquence de coupure du mode fondamental du GOR chargé par le diélectrique de permittivité relative ε_r, alors :

$$k_c = k_{c0} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_c} = \frac{2\pi}{\lambda_{c0}} \Rightarrow \lambda_c = \lambda_{c0}$$

Or dans le guide chargé $\lambda_c= c/f_c$ et dans le guide vide $\lambda_{c0}= c_0/f_{c0}$ avec $c = c_0 / \sqrt{\varepsilon_r}$; d'où l'on déduit : $f_c = f_{c0} / \sqrt{\varepsilon_r}$ =……….

On utilise ensuite la relation de dispersion pour le guide chargé, soit :

$$k_c^2 = k^2 - \beta_g^2 = \left(2\pi f_{c0} / c_0\right)^2 \Rightarrow \left(2\pi f_{c0} / c_0\right)^2 = \left(2\pi f \sqrt{\varepsilon_r} / c_0\right)^2 - \beta_g^2$$

On connait f_{c0}, f, β_g et $c_0= 3.10^{+8}$m/s, d'où l'on tire la permittivité relative:

ε_r=……………………..

Exercice 5 :

Déterminer l'impédance caractéristique (impédance d'onde) d'un (G.O.R) vide, ayant une section droite (2cm x 4cm), dans lequel se propage un signal à 9GHz (mode dominant).

Quel est le déphasage produit par ce (G.O.R) de 1m de longueur ?

Quel temps faut-il à une impulsion du signal pour parcourir 10m de ce guide ?

Solution :

Dans ce GOR vide, on a les dimensions (a,b)= (2cm, 4cm) d'où a= 2cm et b=4cm, Donc a<b, d'où le mode fondamental est le TE_{01}.

On a de plus f =9GHz et la longueur du guide L=1m.

Le déphasage $\varphi= \beta_g L$, il nous reste à déterminer la constante de propagation longitudinale β_g pour pouvoir calculer ce déphasage.

Nous avons aussi l'équation de dispersion : $k_c^2 = k^2 - \beta_g^2 \Rightarrow \beta_g^2 = k^2 - k_c^2$

Avec $k_c= 2\pi/\lambda_c$ avec $\lambda_c=2b$ et $k= 2\pi/\lambda=2\pi f/c_0$

D'où l'on déduit β_g=…………………… et ensuite $\varphi= \beta_g L$=……………………….

Pour connaitre le temps t que met une impulsion de signal pour parcourir L'=10m de ce GOR, il faut calculer la vitesse de phase $v_f=L'/t$, d'où $t=L'/v_f$

Sachant que $v_f= \omega/\beta_g= 2\pi f/ \beta_g$, on déduit facilement :

$t=L'/v_f= L' \beta_g /(2\pi f)$=……………………………

Exercice 6 :

Quels sont les modes qui peuvent se propager à 15GHz dans un (G.O.R) ayant une section droite de (3cm x 1,5cm) ?

Déterminer les vitesses de phase et de groupe, ainsi que la longueur d'onde λ_g du guide pour chacun des modes.

Solution :

Les modes propagation sont caractérisés par leurs fréquences de coupure fc.

Pour qu'un mode soit présent dans un GOR, il faut que sa fréquence de coupure fc soit inférieure à la fréquence du signal f guidé dans ce GOR.

Ici on a f= 15GHz, et les dimensions a=3cm et b=1,5cm du GOR, il faut donc trouver les modes ayant f_c<15GHz.

Dans un GOR, les fréquences de coupure des modes TE_{mn} et TM_{mn} sont décrites par la relation :

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} = \frac{c}{f_c}$$

$$\Rightarrow \quad f_c = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{c_0}{2\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Le GOR étant vide $(\varepsilon_r = \mu_r = 1)$, on calcule ensuite pour chaque couple d'entiers (m,n), les fréquences de coupure fc.

Pour m=1 et n=0, $f_c=c_0/2a$=……

Pour m=0 et n=1, $f_c=c_0/2b$=……

…….

……..

Exercice 7 :

On désire utiliser un (G.O.R) dans la bande de fréquence (12,5 – 19)GHz. Déterminer les dimensions du (G.O.R) vide adéquat.

Exercice 8 :

Etudier l'évolution de la bande passante monomodale d'un (G.O.R) vide de section droite (a,b) en fonction du rapport d=a/b.

Solution :

Les fréquences de coupure des modes TE_{mn} et TM_{mn} sont déduits de la formule :

$$f_{cmn} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{c_0}{2\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Qui s'écrit encore en fonction du rapport d=a/b :

$$f_{cmn} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \sqrt{m^2 + (d.n)^2}$$

La bande passante BP théorique s'écrit :

BP=fc (1er mode supérieur) – fc (mode fondamental)

Si a>b, alors le mode fondamental (dominant) du GOR est le TE_{10} ayant pour fréquence de coupure f_{c1} , telle que : $f_{c10} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$

Le premier mode supérieur peut être le mode TE_{01} ou le TE_{20}, tout dépend du rapport d=a/b.

Avec $f_{c01} = \frac{c_0}{2b\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = d.\frac{c_0}{2a\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = d.f_{c10}$

Et $f_{c20} = \frac{c_0}{a\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = 2\,f_{c10}$

d	1er mode supérieur	BP théorique
d=1	TE_{01}	BP Nulle car TE10 et TE01 ont la même fréquence de coupure
1<d<2	TE_{01}	$BP=d.f_{c10}-f_{c10}=(d-1)f_{c10}$
d=2	TE_{01} et TE_{20}	$BP=2f_{c10}- f_{c10}= f_{c10}$
d>2	TE_{20}	$BP=2f_{c10}- f_{c10}= f_{c10}$

Exercice 9 :

Calculer les fréquences de coupure des trois premiers modes d'un guide d'onde vide, de section droite carrée de coté a.

Exercice 10 :

Un (G.O.R) vide de dimension (a,b) et a>b, admet une bande passante monomodale pratique de 500MHz. La fréquence de coupure du 2ème mode de ce guide est de 3GHz.

1/ Trouver les dimensions (a,b) de ce guide.

2/ Le mode TE11 de ce même guide, chargé d'un diélectrique de permittivité relative ε_r et μ_r=1, admet une fréquence de coupure de 7,2GHz. Déterminer la valeur de la permittivité relative ε_r.

Solution :

1/ GOR vide de dimensions (a,b) et a>b. Le mode fondamental est donc le TE_{10} de fréquence de coupure f_{c10} et si on ne précise pas le rapport a/b, considérer le TE_{01} comme 1[er] mode supérieur ayant une fréquence de coupure f_{c01}.

Ici on a $BP=f_{c01}-f_{c10}$=500MHz=0,5GHz et f_{c01}=3GHz,

d'où : $f_{c10}=f_{c01}-BP$= 3GHz-0,5GHz=2,5GHz

On déduit ensuite de l'expression de fc1 la dimension a et de fc2 la dimension b.

$$f_{c10} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \Rightarrow a = \frac{c_0}{2 f_{c10}\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{2 f_{c10}} = \ldots\ldots\ldots$$

$$f_{c01} = \frac{c_0}{2b\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \Rightarrow b = \frac{c_0}{2 f_{c01}\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{2 f_{c01}} = \ldots\ldots\ldots$$

2/ Lorsque ce GOR de dimensions (a,b) est chargé par un diélectrique de permittivité relative ε_r et μ_r=1, le mode TE_{11} admet alors une fréquence de coupure f_{c11}=7,2GHz.

$$\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{c_0}{2 f_{c11}}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r = \left(\frac{c_0}{2 f_{c11}}\right)^2\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2\right] = \ldots\ldots$$

Avec c_0= 3.10^{+8}m/s

Exercice 11 :

Dans une ligne de mesure fendue, réalisée à partir d'un (G.O.R) vide, de section droite (5cm x 2cm) et fonctionnant sur son mode fondamental, on trouve un taux d'onde stationnaire 'TOS= 1,5. On trouve également de maximas consécutifs de tension, situés en z_1=7,5cm et z_2=9,5cm.

Déterminer le module du coefficient de réflexion, la fréquence du signal et la constante de propagation longitudinale β_g.

Solution :

Dans une ligne de mesure en GOR, comme dans une ligne de transmission, deux ventres (ou nœuds) consécutifs sont séparés de $d=\lambda_g/2$.

D'où $d=\lambda_g/2=z_2-z_1$, donc $\lambda_g=2(z_2-z_1)$ et $\beta_g=2\pi/\lambda_g=$........

La relation liant le TOS et le coefficient de réflexion τ est :

$|\tau|=(TOS-1)/(TOS+1)=$..........

Le mode fondamental du GOR est le TE_{10} car a>b.

Sa fréquence de coupure vaut : $f_{c10} = \dfrac{c_0}{2a\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \dfrac{c_0}{2a} = \ldots\ldots\ldots$

Et la constante de coupure $k_{c10}=2\pi/\lambda_{c10}=2\pi f_{c10}/c_0=$.........

La relation de dispersion donne : $k_c^2 = k^2 - \beta_g^2 \Rightarrow k^2 = k_c^2 - \beta_g^2$

avec $k=2\pi/\lambda=2\pi f/c_0$, d'où l'on déduit la fréquence f du signal :

$f= k\, c_0/2\pi$ =.........

Exercice 12 :

Quel rayon minimum doit avoir un guide d'onde cylindrique (G.O.C) vide pour propager le mode TE_{04} à 60GHz. On donne (x'_{04}=13,3237 ; x_{04}=11,7951).

Solution :

La fréquence de coupure f_{c04} du mode TE_{04} est déduite comme suit :

$\lambda_{c04}=2\pi a/x'_{04}=c_0/f_{c04}$, donc $f_{c04}= c_0\, x'_{04}/(2\pi a)$.

Le GOC vide propageant le mode TE_{04} à la fréquence f=60GHz, veut dire que la fréquence f doit être supérieure à la fréquence de coupure f_{c04} du mode TE_{04}, pour que ce mode soit présent.

D'où f>fc04 ; donc $f> c_0\, x'_{04}/(2\pi a)$; avec f=60GHz, x'_{04}=13,3237 et $c_0=3.10^{+8}$m/s ;

On déduit alors le rayon a du cylindre : $a> c_0\, x'_{04}/(2\pi f)$, donc a>............

Exercice 13 :

Dans un guide d'onde cylindrique (G.O.C) vide, le mode TE_{21} apparait à 7GHz. Lorsqu'on rempli ce même guide par un diélectrique (ε_r et μ_r=1), le mode TM_{01} apparait à 5GHz.

Déterminer la valeur de la permittivité relative ε_r.

On donne : x'_{11}= 1,841 ; x'_{21}= 3,054 ; x'_{31}= 4,201 ; x_{01}= 2,405 ; x_{11}= 3,832 ; x_{12}= 5,136

Solution :

Le mode TE_{21} apparait à 7GHz, veut dire $f_{c21}= c_0\, x'_{21}/(2\pi a)$= 7GHz ; d'où je peux déduire de cette relation le rayon a du GOC.

Soit $a= c_0\, x'_{21}/(2\pi\, f_{c21})$=…………

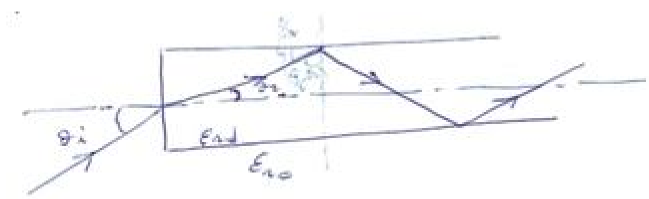
Lorsqu'on rempli ce GOC, de rayon a calculé précédemment, par un diélectrique (ε_r et μ_r=1), le mode TM_{01} apparait à 5GHz.

D'où $f_{c01}= c\, x_{01}/(2\pi a)= c_0\, x_{01}/(2\pi a\, \varepsilon_r^{1/2})$=5GHz.

Ce qui permet de calculer permittivité relative ε_r=……………………..

Exercice 14 :

Une onde électromagnétique tombe sur l'extrémité d'une plaque diélectrique de permittivité relative ε_{rd}=9, avec un angle d'incidence θ_i. Déterminer les valeurs de θ_i pour lesquelles l'onde reste entièrement dans le diélectrique. Le milieu entourant le diélectrique admet une permittivité relative ε_{r0}=6.



Solution :

Nous avons la relation :

$$n_0 \sin\theta_i = n_1 \sin\theta_r = n_1 \sin\left(\frac{\Pi}{2} - \theta'_m\right) = n_1 \cos\theta'_m = n_1\sqrt{1-\sin^2\theta'_m}$$

$$\text{Or}\ \begin{cases} n_1 \sin\theta'_m = n_0 \sin\dfrac{\Pi}{2} \Rightarrow \sin\theta'_m = \dfrac{n_0}{n_1} \\ \theta'_m \ \textit{angle critique} \end{cases}$$

D'où $n_0 \sin\theta_i = n_1 \sqrt{1-\left(\dfrac{n_0}{n_1}\right)^2} \Rightarrow \theta_i = \arcsin(\sqrt{n_1^2 - n_0^2})$

Avec $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{rd}} = \sqrt{9} = 3$ et $n_0 = \sqrt{\varepsilon_{r0}} = \sqrt{6} = 2,4495$

les valeurs de θ_i pour lesquelles l'onde reste entièrement dans le diélectrique, sont $\theta_i \leq \arcsin(\sqrt{n_1^2 - n_0^2}) \Rightarrow \theta_i \leq ....$

Exercice 15 :

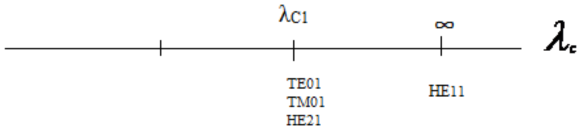
On désire disposer d'une fibre à saut d'indice monomodale à λ=890 nm. Quel diamètre doit avoir le cœur de la fibre, sachant que la variation d'indice Δ= 0,01 et la permittivité relative du cœur est ε_{r1}=2,34 ?
Qu'en est-il lorsque à λ=1,5 µm.

Solution :

On considère la fibre placée dans l'air s'il n'y a aucune précision sur le milieu entourant la fibre.
Le mode fondamental (dominant) de la fibre optique est le HE_{11} puisqu'il a une fréquence de coupure nulle. Les modes supérieurs suivants sont TE_{01}, TM_{01} et HE_{21}, admettant tous la même longueur d'onde de coupure λ_{c1} donc la même fréquence de coupure.

Soit $\lambda_{c1} = \dfrac{2\pi a}{2,405} n_1 \sqrt{2\Delta}$

Le classement des premiers modes dans la fibre est représenté sur la figure suivante.



Pour que la fibre soit monomodale, il faut que :
λ> λ_{c1} et λ=850 nm

D'où : $\dfrac{2\pi a}{2,405} n_1 \sqrt{2\Delta} \prec \lambda \Rightarrow d = 2a \prec \dfrac{\lambda.\ 2,405}{\pi n_1 \sqrt{2\Delta}}$

Soit d=2a<…….

On déduit de la relation précédente, que si la longueur d'onde λ augmente, alors d augmente aussi.
D'où si λ=1,5μm, alors d<…….